Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Einführung in die Mathematische Logik und Modelltheorie

Tabea Beese
Prof. Dr. Benedikt Löwe
Ilya Sharankou, Dipl.-Math.

Übungsblatt 8

Abgabe am 4. Juni 2015 am Anfang der Vorlesung.

Aufgabe 1 (Die Bedeutung von "Unterfall 1"; 2 Punkte)

In der Vorlesung hatten wir im Beweis des Vollständigkeitssatzes zunächst *Unterfall 1* betrachtet: Formelmengen Φ in denen nur endliche viele Variablen frei vorkommen. Wir hatten bewiesen, dass für widerspruchsfreie solche Formelmengen Φ eine widerspruchsfreie Obermenge Φ' existiert, die Beispiele enthält.

Sei S beliebig und $\Phi = \left\{v_0 = t \ ; \ t \in T^S\right\} \cup \{\exists v_0 \exists v_1 \ \neg v_0 = v_1\}$. Zeigen Sie, dass Wf Φ und dass es in L^S keine widerspruchsfreie Obermenge von Φ gibt, die Beispiele enthält. Folgern Sie daraus, dass das o.g. Lemma aus der Vorlesung nicht ohne die Voraussetzung über die Endlichkeit der Menge der frei vorkommenden Variablen bewiesen werden kann.

Lösung:

Sei S eine Symbolmenge. Um die Widerspruchsfreiheit von Φ zu zeigen, betrachte die Struktur $\mathcal{A}$ mit der zweielementigen Grundmenge $A = \{0, 1\}$ und sei

$$\begin{array}{ll} f^{\mathcal{A}}\left(a_1, \ldots, a_{\mathrm{ar}(f)}\right) := 0 & \text{für alle Funktionssymbole } f \in S, \\ R^{\mathcal{A}}\left(a_1, \ldots, a_{\mathrm{ar}(R)}\right) & \text{für alle Relationssymbole } R \in S, \\ c^{\mathcal{A}} := 0 & \text{für alle Konstantensymoble } c \in S. \end{array}$$

Dann erfüllt die S-Struktur $\mathcal{A}$ die Formelmenge Φ, wenn man alle v_i mit 0 belegt, d.h.

$$\left(A, \beta\frac{0}{v_i}\right) \models \Phi.$$

Also Wf Φ.

Eine Formelmenge Φ enthält Beispiele, falls für jeden Ausdruck von der Form $\exists x\phi$ ein Term t mit $\Phi \vdash \left(\exists x\phi \rightarrow \phi\frac{t}{x}\right)$ existiert. Sei Φ' eine Obermenge von Φ, die Beispiele enthält. Betrachte die Formel

$$\exists v_0 \exists v_1 \ \neg v_0 = v_1.$$

Dann muss ein Term t_0 existieren mit

$$\Phi' \vdash (\exists v_0 \exists v_1 \ \neg v_0 = v_1 \rightarrow \exists v_1 \ \neg t_0 = v_1).$$

Die Definition von Beispiele enthalten jetzt angewandt auf

$$\exists v_1 \ \neg t_0 = v_1$$

liefert ein Term t_1 mit

$$\Phi' \vdash (\exists v_1 \ \neg t_0 = v_1 \rightarrow \neg t_0 = t_1).$$

Jetzt ist

$$\Phi' \vdash \exists v_0 \exists v_1 \ \neg v_0 = v_1,$$

da Φ' Obermenge von Φ. Somit folgt mit Modus ponens

$$\Phi' \vdash \neg t_0 = t_1,$$

insbesondere wegen der Korrektheit des Ableitungskalküls

$$\Phi' \models \neg t_0 = t_1.$$

Nun ist aber

$$\Phi' \vdash v_0 = t_0 \text{ und } \Phi' \vdash v_0 = t_1,$$

da $\Phi' \supseteq \Phi$ und der Voraussetzungsregel, und wieder nach Korrektheit

$$\Phi' \models v_0 = t_0 \text{ und } \Phi' \models v_0 = t_1.$$

Nun, wäre jetzt $\mathfrak{J} := (\mathfrak{A}, \beta)$ ein Modell von Φ', so würde einerseits folgen

$$\mathfrak{J}(t_0) = \beta(v_0) = \mathfrak{J}(t_1),$$

andererseits aber

$$\mathfrak{J}(t_0) \neq \mathfrak{J}(t_1).$$

Widerspruch. Also hat Φ' keine Modelle und ist somit widerspruchsvoll.

Die Formelmenge Φ hat unendlich viele freie Variablen, da man die Formeln $v_0 = t$ für alle Terme $t \in T^S$ in Φ hat, und somit zeigt Φ, dass die Voraussetzung über die endliche Anzahl von freien Variablen notwendig ist, damit eine widerspruchsfreie Formelmenge zu einer widerspruchsfreien Formelmenge, die Beispiele enthält, erweitert werden kann.

Aufgabe 2 (Termmodelle in der Gruppentheorie; 9 Punkte)

Im folgenden sei $S_{\mathrm{GrmI}} = \left\{\circ, ^{-1}, e\right\}$ die Symbolmenge der Sprache der Gruppen mit der Inversenoperation. Es sei Z eine beliebige Menge, die keine Elemente von $\mathcal{A}_{S_{\mathrm{GrmI}}}$ enthält. Für jedes $z \in Z$ nehmen wir ein neues Konstantensymbol c_z und setzen $S_Z := S_{\mathrm{GrmI}} \cup \{c_z \mid z \in Z\}$. Mit Φ_{GrmI} bezeichnen wir die drei Axiome der Gruppentheorie:

$$\forall v_0 \ (v_0 \circ e = v_0 \wedge e \circ v_0 = v_0),$$

$$\forall v_0 \forall v_1 \forall v_2 \ (v_0 \circ v_1) \circ v_2 = v_0 \circ (v_1 \circ v_2),$$

$$\forall v_0 \ v_0 \circ (v_0)^{-1} = e.$$

Wir bezeichnen die abzählbare Menge von Variablen mit $V := \{v_i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

Wir betrachten das Termmodell $\mathfrak{T}_Z^{\Phi_{\mathrm{GrmI}}}$ in der Sprache mit Symbolmenge S_Z. Für einen S_Z-Term t bezeichnen wir seine Äquivalenzklasse im Termmodell mit $\bar{t}$.

1. Zeigen Sie, dass für jede Wahl von Z die Struktur $\mathfrak{T}_Z^{\Phi_{\mathrm{GrmI}}}$ eine Gruppe ist (3 Punkte)

2. Zeigen Sie, dass für jede Gruppe $\mathfrak{G} = \left(G, \times, ^{-1}, 1\right)$ und jede Abbildung $g : V \cup Z \to G$ ein eindeutiger Gruppenhomomorphismus $f : \mathfrak{T}_Z^{\Phi_{\mathrm{GrmI}}} \to G$ existiert, so dass $g(v_i) = f(\overline{v}_i)$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und $g(z) = f(\overline{c_z})$ für alle $z \in Z$ (2 Punkte).

3. Angenommen Z ist höchstens abzählbar. Zeigen Sie,d ass $\mathfrak{T}_\varnothing^{\Phi_{\mathrm{GrmI}}} \cong \mathfrak{T}_Z^{\Phi_{\mathrm{GrmI}}}$ (2 Punkte).

4. Beweisen Sie oder widerlegen Sie: Es gibt Z und Z', so dass $\mathfrak{T}_Z^{\Phi_{\mathrm{GrmI}}} \ncong \mathfrak{T}_{Z'}^{\Phi_{\mathrm{GrmI}}}$ (2 Punkte).

Lösung:

Das Termmodell $\mathfrak{T}_Z^{\Phi_{\mathrm{GrmI}}}$ hat als Grundmenge die Menge der Äquivalenzklassen aller Terme über S_Z, d.h.

$$\mathfrak{T}_Z^{\Phi_{\mathrm{GrmI}}} = \left\{\bar{t} \mid t \in T^{S_Z}\right\} = \left\{\overline{t_1 \circ t_2} \mid t_1, t_2 \in T^{S_Z}\right\} \cup \left\{\overline{t^{-1}} \mid t \in T^{S_Z}\right\} \cup \{\overline{e}\} \cup \{\overline{c_z} \mid z \in Z\} \cup \{\overline{v}_i \mid i \in \mathbb{N}\},$$

und die Interpretationen von S_Z sind

$$\overline{t_1} \circ^{\mathfrak{T}_Z^{\Phi_{\mathrm{GrmI}}}} \overline{t_2} = \overline{t_1 \circ t_2},$$

$$\left((\overline{t})^{-1}\right)^{\mathfrak{T}_Z^{\Phi_{\mathrm{GrmI}}}} = \overline{t^{-1}},$$

$$e^{\mathfrak{T}_Z^{\Phi_{\mathrm{GrmI}}}} = \overline{e},$$

$$c_z^{\mathfrak{T}_Z^{\Phi_{\mathrm{GrmI}}}} = \overline{c_z}.$$

1. Wir prüfen die drei Gruppenaxiome für das Termmodell $\mathfrak{T}_Z^{\Phi_{\mathrm{GrmI}}}$ nach.

$$\mathfrak{T}_Z^{\Phi_{\mathrm{GrmI}}} \models \forall v_0 \ \ (v_0 \circ e = v_0 \wedge e \circ v_0 = v_0)$$

$$\begin{aligned}
&\iff && \text{für alle } t \in T^{S_Y} \text{ gilt } \left(\mathfrak{T}_Z^{\Phi_{\mathrm{GrmI}}}, \beta \tfrac{\overline{t}}{v_0}\right) \models (v_0 \circ e = v_0 \wedge e \circ v_0 = v_0)\\
&\iff && \text{für alle } t \in T^{S_Y} \text{ gilt } \left(\mathfrak{T}_Z^{\Phi_{\mathrm{GrmI}}}, \beta \tfrac{\overline{t}}{v_0}\right) \models v_0 \circ e = v_0 \text{ und } \left(\mathfrak{T}_Z^{\Phi_{\mathrm{GrmI}}}, \beta \tfrac{\overline{t}}{v_0}\right) \models e \circ v_0 = v_0\\
&\iff && \text{für alle } t \in T^{S_Y} \text{ gilt } \overline{t} \circ^{\mathfrak{T}_Z^{\Phi_{\mathrm{GrmI}}}} \overline{e} = \overline{t} \text{ und } \overline{e} \circ^{\mathfrak{T}_Z^{\Phi_{\mathrm{GrmI}}}} \overline{t} = \overline{t}\\
&\iff && \text{für alle } t \in T^{S_Y} \text{ gilt } \overline{t \circ e} = \overline{t} \text{ und } \overline{e \circ t} = \overline{t}\\
&\iff && \text{für alle } t \in T^{S_Y} \text{ gilt } \Phi_{\mathrm{GrmI}} \vdash t \circ e = t \text{ und } \Phi_{\mathrm{GrmI}} \vdash e \circ t = t
\end{aligned}$$

Nun ist für jeden Term $t \in T^{S_Y}$ die Formel $t \circ e = t$ aus Φ_{GrmI} ableitbar, denn

$\Phi_{\mathrm{GrmI}} \vdash \forall v_0 \ \ (v_0 \circ e = v_0 \wedge e \circ v_0 = v_0)$	(Voraussetzunsregel)
$\Phi_{\mathrm{GrmI}} \vdash (v_0 \circ e = v_0 \wedge e \circ v_0 = v_0) \frac{t}{v_0}$	(Übungsblatt 7, Aufgabe 1, (a1))
$\Phi_{\mathrm{GrmI}} \vdash t \circ e = t \wedge e \circ t = t$	(Substitution)
$\Phi_{\mathrm{GrmI}} \vdash t \circ e = t$ und $\Phi_{\mathrm{GrmI}} \vdash e \circ t = t$	(Übungsblatt 6, Aufgabe 3, (c1)-(c2))

Somit erfüllt das Termmodell $\mathfrak{T}_Z^{\Phi_{\mathrm{GrmI}}}$ das Axiom des neutralen Elementes.

Analog gehen wir mit den anderen zwei Axiomen vor

$$\mathfrak{T}_Z^{\Phi_{\mathrm{GrmI}}} \models \forall v_0 \forall v_1 \forall v_2 \ \ (v_0 \circ v_1) \circ v_2 = v_0 \circ (v_1 \circ v_2)$$

$$\begin{aligned}
&\iff && \text{für alle } t_0, t_1, t_2 \in T^{S_Y} \text{ gilt } \left(\mathfrak{T}_Z^{\Phi_{\mathrm{GrmI}}}, \beta \tfrac{\overline{t_0}}{v_0} \tfrac{\overline{t_1}}{v_1} \tfrac{\overline{t_2}}{v_2}\right) \models (v_0 \circ v_1) \circ v_2 = v_0 \circ (v_1 \circ v_2)\\
&\iff && \text{für alle } t_0, t_1, t_2 \in T^{S_Y} \text{ gilt } \left(\overline{t}_0 \circ^{\mathfrak{T}_Z^{\Phi_{\mathrm{GrmI}}}} \overline{t}_1\right) \circ_2^{\mathfrak{T}_Z^{\Phi_{\mathrm{GrmI}}}} \overline{t}_2 = \overline{t}_0 \circ^{\mathfrak{T}_Z^{\Phi_{\mathrm{GrmI}}}} \left(\overline{t}_1 \circ^{\mathfrak{T}_Z^{\Phi_{\mathrm{GrmI}}}} \overline{t}_2\right)\\
&\iff && \text{für alle } t_0, t_1, t_2 \in T^{S_Y} \text{ gilt } \overline{(t_0 \circ t_1)} \circ^{\mathfrak{T}_Z^{\Phi_{\mathrm{GrmI}}}} \overline{t_2} = \overline{t}_0 \circ^{\mathfrak{T}_Z^{\Phi_{\mathrm{GrmI}}}} \overline{(t_1 \circ t_2)}\\
&\iff && \text{für alle } t_0, t_1, t_2 \in T^{S_Y} \text{ gilt } \overline{(t_0 \circ t_1) \circ t_2} = \overline{t_0 \circ (t_1 \circ t_2)}\\
&\iff && \text{für alle } t_0, t_1, t_2 \in T^{S_Y} \text{ gilt } \Phi_{\mathrm{GrmI}} \vdash (t_0 \circ t_1) \circ t_2 = t_0 \circ (t_1 \circ t_2)
\end{aligned}$$

Genauso wie beim ersten Axiom verläuft die Ableitung für das Assoziativgesetz:

$\Phi_{\mathrm{GrmI}} \vdash \forall v_0 \forall v_1 \forall v_2 \ \ (v_0 \circ v_1) \circ v_2 = v_0 \circ (v_1 \circ v_2)$	(Voraussetzunsregel)
$\Phi_{\mathrm{GrmI}} \vdash ((v_0 \circ v_1) \circ v_2 = v_0 \circ (v_1 \circ v_2)) \frac{t_0}{v_0} \frac{t_1}{v_1} \frac{t_2}{v_2}$	(Übungsblatt 7, Aufgabe 1, (a1))
$\Phi_{\mathrm{GrmI}} \vdash (t_0 \circ t_1) \circ t_2 = t_0 \circ (t_1 \circ t_2)$	(Substitution).

Schließlich gilt für das Axiom über das Inverse:

$$\mathfrak{T}_Z^{\Phi_{\mathrm{GrmI}}} \models \forall v_0 \ v_0 \circ (v_0)^{-1} = e$$

$$\begin{aligned}
&\iff && \text{für alle } t_0 \in T^{S_Y} \text{ gilt } \left(\mathfrak{T}_Z^{\Phi_{\mathrm{GrmI}}}, \beta \tfrac{\overline{t_0}}{v_0}\right) \models v_0 \circ (v_0)^{-1} = e\\
&\iff && \text{für alle } t_0 \in T^{S_Y} \text{ gilt } \overline{t}_0 \circ^{\mathfrak{T}_Z^{\Phi_{\mathrm{GrmI}}}} \left((\overline{t}_0)^{-1}\right)^{\mathfrak{T}_Z^{\Phi_{\mathrm{GrmI}}}} = e^{\mathfrak{T}_Z^{\Phi_{\mathrm{GrmI}}}}\\
&\iff && \text{für alle } t_0 \in T^{S_Y} \text{ gilt } \overline{t}_0 \circ^{\mathfrak{T}_Z^{\Phi_{\mathrm{GrmI}}}} \overline{(t_0)^{-1}} = \overline{e}\\
&\iff && \text{für alle } t_0 \in T^{S_Y} \text{ gilt } \overline{t_0 \circ (t_0)^{-1}} = \overline{e}\\
&\iff && \text{für alle } t_0 \in T^{S_Y} \text{ gilt } \Phi_{\mathrm{GrmI}} \vdash t_0 \circ (t_0)^{-1} = e
\end{aligned}$$

Und wir leiten die Formel $t_0 \circ (t_0)^{-1} = e$ ab:

$$\begin{array}{ll}
\Phi_{\mathrm{GrmI}} \vdash \forall v_0 \; v_0 \circ (v_0)^{-1} = e & \text{(Voraussetzunsregel)} \\
\Phi_{\mathrm{GrmI}} \vdash \left(v_0 \circ (v_0)^{-1} = e\right) \frac{t_0}{v_0} & \text{(Übungsblatt 7, Aufgabe 1, (a1))} \\
\Phi_{\mathrm{GrmI}} \vdash t_0 \circ (t_0)^{-1} = e & \text{(Substitution).}
\end{array}$$

2. Seien $\mathfrak{G} = \left(G, \times, ^{-1}, 1\right)$ eine Gruppe und $g : V \cup Z \to G$ eine Abbildung gegeben. Wir definieren $f : \mathfrak{T}_Z^{\Phi_{\mathrm{GrmI}}} \to G$, indem wir $f\left(\bar{t}\right)$ angeben durch Fallunterscheidung.

   Falls ein $i \in \mathbb{N}$ existiert mit $v_i \in \bar{t}$, so sei $f\left(\bar{t}\right) := g\left(v_i\right)$.

   Falls $v_i \notin \bar{t}$ für alle $i \in \mathbb{N}$, und ein $z \in Z$ mit $c_z \in \bar{t}$ existiert, so sei $f\left(\bar{t}\right) := g\left(z\right)$.

   Falls $v_i \notin \bar{t}$ für alle $i \in \mathbb{N}$, und $c_z \notin \bar{t}$ für alle $z \in Z$, und $e \in \bar{t}$, so sei $f\left(\bar{t}\right) := 1$.

   Falls $v_i \notin \bar{t}$ für alle $i \in \mathbb{N}$, und $c_z \notin \bar{t}$ für alle $z \in Z$, und $e \notin \bar{t}$, und ein $t' \in T^{Sz}$ existiert mit $(t')^{-1} \in \bar{t}$, so sei $f\left(\bar{t}\right) := \left(f\left(\bar{t}\right)\right)^{-1}$.

   Falls $v_i \notin \bar{t}$ für alle $i \in \mathbb{N}$, und $c_z \notin \bar{t}$ für alle $z \in Z$, und $e \notin \bar{t}$, und $(t')^{-1} \notin \bar{t}$ für alle $t' \in T^{Sz}$, und $t_1, t_2 \in T^{Sz}$ existieren mit $t_1 \circ t_2 \in \bar{t}$, so sei $f\left(\bar{t}\right) := f\left(\bar{t}_1\right) \times f\left(\bar{t}_2\right)$.

   Durch Induktion über Aufbau der Terme sieht man, dass man diese Fälle alle Möglichkeiten überdecken.

   Um zu zeigen, dass f wohldefiniert ist, müssen folgendes überprüfen

$$\text{sind } t_1, t_2 \text{ Terme mit } \bar{t}_1 = \bar{t}_2, \text{ so gilt } f\left(\bar{t}_1\right) = f\left(\bar{t}_2\right).$$

   Nun ist

$$\overline{v}_i = \overline{v}_j \implies \Phi_{\mathrm{GrmI}} \vdash v_i = v_j \implies \Phi_{\mathrm{GrmI}} \models v_i = v_j \implies i = j \implies g\left(v_i\right) = g\left(v_j\right).$$

   Dabei folgt aus $\Phi_{\mathrm{GrmI}} \models v_i = v_j$, dass $i = j$, denn für $i \neq j$ zeigt jede Gruppe und verschiedene Belegung von v_i und v_j, dass $\Phi_{\mathrm{GrmI}} \not\models v_i = v_j$. Ähnlich gilt

$$\overline{c}_{z_1} = \overline{c}_{z_2} \implies \Phi_{\mathrm{GrmI}} \vdash c_{z_1} = c_{z_2} \implies \Phi_{\mathrm{GrmI}} \models c_{z_1} = c_{z_2} \implies z_1 = z_2 \implies g\left(z_1\right) = g\left(z_2\right).$$

   Schließlich überlegt man sich:

$$\overline{t_1^{-1}} = \overline{t_2^{-1}} \implies \left(f\left(\bar{t}_1\right)\right)^{-1} = \left(f\left(\bar{t}_2\right)\right)^{-1},$$

   denn

$$\begin{aligned}
\overline{t_1^{-1}} = \overline{t_2^{-1}} &\implies \Phi_{\mathrm{GrmI}} \vdash t_1^{-1} = t_2^{-1}, \\
&\implies \Phi_{\mathrm{GrmI}} \vdash t_1 = t_2, \\
&\implies \overline{t_1} = \overline{t_2}, \\
&\implies f\left(\bar{t}_1\right) = f\left(\bar{t}_2\right), \\
&\implies f\left(\bar{t}_1\right)^{-1} = f\left(\bar{t}_2\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

   Weiter gilt

$$\begin{aligned}
\overline{t_1 \circ t_2} = \overline{t_3 \circ t_4} &\implies \Phi_{\mathrm{GrmI}} \vdash t_1 \circ t_2 = t_3 \circ t_4, \\
&\implies \Phi_{\mathrm{GrmI}} \models t_1 \circ t_2 = t_3 \circ t_4, \\
&\implies \left(\mathfrak{G}, \beta \frac{g\left(v_i\right)}{v_i}\right) \models t_1 \circ t_2 = t_3 \circ t_4, \text{ wobei man } c_z \text{ als } g\left(z\right) \text{ interpretiert}, \\
&\implies f\left(\bar{t}_1\right) \times f\left(\bar{t}_2\right) = f\left(\bar{t}_3\right) \times f\left(\bar{t}_4\right).
\end{aligned}$$

Somit ist die Abbildung f auf der ganzen Grundmenge des Termmodells $\mathfrak{T}_Z^{\Phi_{\mathrm{GrmI}}}$ definiert. Es ist klar, dass f ein Gruppenhomomorphismus zwischen $\left(\mathfrak{T}_Z^{\Phi_{\mathrm{GrmI}}}, \circ^{\mathfrak{T}_Z^{\Phi_{\mathrm{GrmI}}}}, e^{\mathfrak{T}_Z^{\Phi_{\mathrm{GrmI}}}}\right)$ und $\mathfrak{G} = \left(G, \times, ^{-1}, 1\right)$ ist.

Die Eindeutigkeit von f folgt aus der Tatsache, dass es ein Homomorphismus sein soll. Denn ist h ein Gruppenhomomorphismus zwischen

$$\left(\mathfrak{T}_z^{\Phi_{Gr}}, \circ^{\mathfrak{T}_z^{\Phi_{Gr}}}, \left(^{-1}\right)^{\mathfrak{T}_z^{\Phi_{Gr}}}, e^{\mathfrak{T}_z^{\Phi_{Gr}}}\right)$$

und

$$\left(G, \times, ^{-1}, 1\right)$$

mit $g\left(v_i\right) = f\left(\overline{v_i}\right)$ und $g\left(z\right) = f\left(\overline{c_z}\right)$, so folgt durch Induktion $f\left(\overline{t}\right) = h\left(\overline{t}\right)$ für alle Terme $t \in T^{S_Z}$, also $f = h$.

3. Sei Z höchstens abzählbar. Wir nehmen eine Zerlegung von $V = V_0 \cup V_1$, so dass $|V_0| = |Z|$ und V_1 unendlich ist. Seien $b_1 : Z \to V_0$ und $b_2 : V \to V_1$ Bijektionen. Sei g die Abbildung gegeben durch

$$g : V \cup Z \to \mathfrak{T}_{\varnothing}^{\Phi_{\mathrm{GrmI}}},$$

$$\begin{aligned} g\left(z\right) &:= \overline{b_1\left(z\right)} \text{ für } z \in Z, \\ g\left(v_i\right) &:= \overline{b_2\left(v_i\right)}. \end{aligned}$$

Nach Aufgabenteil (2) existiert ein eindeutiger Homomorphismus

$$f : \mathfrak{T}_Z^{\Phi_{\mathrm{GrmI}}} \to \mathfrak{T}_{\varnothing}^{\Phi_{\mathrm{GrmI}}},$$

mit

$$\begin{aligned} f\left(\overline{c_z}\right) &= g\left(z\right) = \overline{b_1\left(z\right)} \text{ für } z \in Z, \\ f\left(\overline{v_i}\right) &= g\left(v_i\right) = \overline{b_2\left(v_i\right)}. \end{aligned}$$

Betrachtet man die Abbildung

$$g^* : V \to \mathfrak{T}_Z^{\Phi_{\mathrm{GrmI}}},$$

$$g^*\left(v_i\right) := \begin{cases} \overline{c}_{b_1^{-1}\left(v_i\right)} & \text{falls } v_i \in V_0 \\ \overline{b_2^{-1}\left(v_i\right)} & \text{falls } v_i \in V_1 \end{cases}$$

und

$$f^* : \mathfrak{T}_{\varnothing}^{\Phi_{\mathrm{GrmI}}} \to \mathfrak{T}_Z^{\Phi_{\mathrm{GrmI}}},$$

den durch (2) induzierten Homomorphismus, d.h.

$$f^*\left(\overline{v_i}\right) = g^*\left(v_i\right).$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} &\text{für } v_i \in V_0: \quad f\left(g^*\left(v_i\right)\right) = f\left(\overline{c}_{b_1^{-1}\left(v_i\right)}\right) = g\left(b_1^{-1}\left(v_i\right)\right) = \overline{b_1\left(b_1^{-1}\left(v_i\right)\right)} = \overline{v_i}, \\ &\text{für } v_i \in V_1: \quad f\left(g^*\left(v_i\right)\right) = f\left(\overline{b_2^{-1}\left(v_i\right)}\right) = g\left(\overline{b_2^{-1}\left(v_i\right)}\right) = \overline{b_2\left(b_2^{-1}\left(v_i\right)\right)} = \overline{v_i}. \end{aligned}$$

Analog gilt

$$f^*\left(g\left(v_i\right)\right) = \overline{v_i}.$$

Es folgt induktiv

$$\left(f^* \circ f\right)\left(\overline{t}\right) = \left(f \circ f^*\right)\left(\overline{t}\right) = \overline{t},$$

also

$$f^* = f^{-1}$$

und somit ist f bijektiv und ein Isomorphismus.

4. Sei Z unendlich abzählbar und $Z' := \mathcal{P}(Z)$ die Potenzmenge von Z. Dann haben $\mathfrak{T}_Z^{\Phi_{\mathrm{GrmI}}}$ und $\mathfrak{T}_{Z'}^{\Phi_{\mathrm{GrmI}}}$ verschiedene Kardinalitäten und somit gibt es keine Bijektion zwischen deren Grundmengen, insbesondere auch keinen Isomorphismus.

Aufgabe 3 (Kategorizität; 2 Punkte)

Sei S eine Symbolmenge. Wir nennen eine Menge Φ von S-Sätzen *kategorisch*, falls für je zwei S-Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gilt: falls $\mathfrak{A} \models \Phi$ und $\mathfrak{B} \models \Phi$, so gilt $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$. Zeigen Sie: jede kategorische Menge von Sätzen ist negationstreu bzgl. der Sätze, d.h. für alle S-Sätze ϕ gilt $\Phi \vdash \phi$ oder $\Phi \vdash \neg\phi$.

Lösung:

Sei Φ eine Menge von S-Sätzen, die kategorisch ist. Wir zeigen, dass für alle S-Sätze $\phi \in L_0^S$ gilt $\Phi \models \phi$ oder $\Phi \models \neg\phi$. Mit dem Vollständigkeitssatz bekommt man, dass die Φ negationstreu bzgl. der Sätze ist. Sei $\mathfrak{A}$ ein beliebiges Modell von Φ. Nun gilt $\mathfrak{A} \models \phi$ oder $\mathfrak{A} \models \neg\phi$. OBdA sei $\mathfrak{A} \models \phi$. Es folgt dann $\Phi \models \phi$, denn ist $\mathfrak{B}$ ein beliebiges Modell von Φ, so ist $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, da Φ kategorisch, und somit wegen $\mathfrak{A} \models \phi$ auch $\mathfrak{B} \models \phi$.

Aufgabe 4 (Erzeugen negationstreuer Ausdrucksmengen; 3 Punkte)

Sei eine höchstens abzählbare Symbolmenge S gegeben und sei $\{\psi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine Aufzählung aller S-Formeln. Sei Φ eine widerspruchsfreie Menge von S-Formeln. In der Vorlesung haben wir definiert:

$$
\begin{aligned}
\Psi_0 &:= \Phi, \\
\Psi_{n+1} &:= \begin{cases} \Psi_n \cup \{\psi_n\} & \text{falls } \Psi_n \cup \{\psi_n\} \text{ widerspruchsfrei ist,} \\ \Psi_n \cup \{\neg\psi_n\} & \text{sonst,} \end{cases} \\
\Phi' &:= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Psi_n.
\end{aligned}
$$

Wir hatten bewiesen, dass für alle n die Menge Ψ_n widerspruchsfrei ist und dass Φ' widerspruchsfrei und negationstreu ist. Wir hatten ausserdem betont, dass die Definition der Ψ_n von der Auflistung $\{\psi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ abhängt.

Wir setzen nun $S := S_{\mathrm{Gr}} = \{\circ, e\}$ und $\Phi := \Phi_{\mathrm{Gr}}$. Wir definieren

$$
\begin{aligned}
\phi_0 &:= \forall v_0 \ v_0 = v_0, \\
\phi_1 &:= \forall v_1 \forall v_1 \ v_0 \circ v_1 = v_1 \circ v_0, \\
\phi_2 &:= \forall v_1 \forall v_1 \forall v_2 \ (v_0 = v_1 \vee (v_0 = v_2 \vee v_1 = v_2)), \\
\phi_3 &:= \neg\phi_1.
\end{aligned}
$$

1. Nehmen Sie an, dass $\psi_0 = \phi_0$, $\psi_1 = \phi_1$, $\psi_2 = \phi_2$ und $\psi_3 = \phi_3$. Bestimmen Sie die Modelle von Ψ_4.

2. Nehmen sie an, dass $\psi_0 = \phi_0$ und $\psi_2 = \phi_2$. Finden Sie geeignete Formeln für ψ_1 und ψ_4, so dass Ψ_4 unendliche Modelle hat.

3. Nehmen Sie an, dass $\psi_0 = \phi_0$, $\psi_1 = \phi_1$, und $\psi_2 = \phi_2$. Finden Sie eine geeignete Formel für ψ_3, so dass Ψ_4 kategorisch ist (s. Aufgabe 3).

Lösung:

1. $\Psi_0 := \Phi_{\mathrm{Gr}}$, d.h. Modelle von Ψ_0 sind alle Gruppen.

   $\Phi_{\mathrm{Gr}} \cup \{\phi_0\}$ ist widerspruchsfrei, denn ϕ_0 ist in jeder Struktur wahr. Also $\Psi_1 = \Phi_{\mathrm{Gr}} \cup \{\phi_0\}$ und die Modelle davon sind genau die Gruppen.

   $\Psi_1 \cup \{\phi_1\}$ ist widerspruchsfrei, den es gibt abelsche Gruppen. Also $\Psi_2 = \Phi_{\mathrm{Gr}} \cup \{\phi_0, \phi_1\}$ und die Modelle davon sind genau die abelschen Gruppen.

   $\Psi_2 \cup \{\phi_2\}$ ist widerspruchsfrei, denn es gibt abelsche Gruppen mit höchstens 2 Elementen. Also $\Psi_3 = \Phi_{\mathrm{Gr}} \cup \{\phi_0, \phi_1, \phi_2\}$ und die Modelle davon sind genau die abelschen Gruppen mit höchstens 2 Elementen.

   $\Psi_3 \cup \{\phi_3\}$ ist widerspruchsvoll, denn $\phi_1 \in \Psi_3$ und $\phi_3 = \neg\phi_1$. Also

   $$\begin{aligned}\Psi_4 &= \Psi_3 \cup \{\neg\phi_3\} \\ &= \Phi_{\mathrm{Gr}} \cup \{\phi_0, \phi_1, \phi_2, \neg\phi_3\} \\ &= \Phi_{\mathrm{Gr}} \cup \{\phi_0, \phi_1, \phi_2, \neg\neg\phi_1\}\end{aligned}$$

   und die Modelle davon sind genau die abelschen Gruppen mit höchstens 2 Elementen.

2. Es ist also $\psi_0 = \phi_0$ und damit ist $\Psi_1 = \Phi_{\mathrm{Gr}} \cup \{\phi_0\}$ und Modelle davon sind genau die Gruppen. Damit Ψ_4 unendliche Modelle hat, müssen wir sicherstellen, dass im Schritt Ψ_3 wir die Formel $\neg\phi_2$ hinzunehmen und nicht die Formel ϕ_2. Sei also $\psi_1 := \neg\phi_2$. Dann $\Psi_2 := \Phi_{\mathrm{Gr}} \cup \{\phi_0, \neg\phi_2\}$ und die Modelle sind genau die Gruppen mit mindestens 3 Elementen. Weiter ist $\Psi_3 = \Psi_2 \cup \{\neg\phi_2\} = \Phi_{\mathrm{Gr}} \cup \{\phi_0, \neg\phi_2\}$ und die Modelle sind weiterhin genau die Gruppen mit mindestens 3 Elementen. Sei nun $\psi_3 := \neg\neg\neg\phi_2$, dann ist $\Psi_4 = \Psi_3$ und jede unendliche Gruppe ist ein Modell von Ψ_4.

3. Wie bei (1) haben wir $\Psi_3 = \Phi_{\mathrm{Gr}} \cup \{\phi_0, \phi_1, \phi_2\}$ und die Modelle davon sind genau die abelschen Gruppen mit höchstens 2 Elementen. Setzen wir

   $$\psi_3 := \exists v_0 \exists v_1 \; v_0 \neq v_1,$$

   dann ist $\Psi_4 = \Phi_{\mathrm{Gr}} \cup \{\phi_0, \phi_1, \phi_2, \psi_3\}$ und die Modelle sind genau die abelschen Gruppen mit genau 2 Elementen. Da es nur eine solche Gruppe gibt (bis auf Isomorphie) folgt, dass Ψ_4 kategorisch ist.