Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Einführung in die Mathematische Logik und Modelltheorie

Tabea Beese
Prof. Dr. Benedikt Löwe
Ilya Sharankou, Dipl.-Math.

Übungsblatt 7

Abgabe am 19. Mai 2015 am Anfang der Vorlesung.

Aufgabe 1 (Ableitbarkeit; 6 Punkte) Man zeige, dass die folgenden Regeln ableitbar sind:

(a1) $\dfrac{\Gamma \quad \forall x\phi}{\Gamma \quad \phi\frac{t}{x}}$, (a2) $\dfrac{\Gamma \quad \forall x\phi}{\Gamma \quad \phi}$,

(b1) $\dfrac{\Gamma \quad \phi\frac{t}{x} \quad \psi}{\Gamma \quad \forall x\phi \quad \psi}$, (b2) $\dfrac{\Gamma \quad \phi\frac{y}{x}}{\Gamma \quad \forall x\phi}$, falls y nicht frei in $\Gamma\forall x\phi$,

(b3) $\dfrac{\Gamma \quad \phi \quad \psi}{\Gamma \quad \forall x\phi \quad \psi}$, (b4) $\dfrac{\Gamma \quad \phi}{\Gamma \quad \forall x\phi}$, falls x nicht frei in Γ.

Aufgabe 2 ((∃∀)-Regel; 4 Punkte) Sei (∃∀) die Regel

$$\frac{}{\Gamma \quad \exists x\phi \quad \forall x\phi}.$$

1. Man prüfe, ob (∃∀) eine ableitbare Regel ist.
2. $\mathfrak{S}'$ entstehe aus dem Sequenzenkalkül $\mathfrak{S}$ durch Hinzunahme der Regel (∃∀). Ist jede Sequenz in $\mathfrak{S}'$ ableitbar?

Aufgabe 3 (Lineare Ordnungen; 4 Punkte) Betrachten Sie die Sprache mit der Symbolmenge $S = \{<, s\}$, wobei $<$ ein zweistelliges Relationssymbol und s ein einstelliges Funktionssymbol ist. Betrachten Sie die Axiome

$$\begin{aligned}
\phi_1 &: \forall x \forall y \, (x < y \vee y < x)\,,\\
\phi_2 &: \forall x \forall y \forall z \, ((x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z)\,,\\
\phi_3 &: \forall x \neg x < x,\\
\phi_4 &: \forall x \; x < s\,(x)\,,\\
\phi &:= \phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \phi_3 \wedge \phi_4.
\end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass eine Struktur $(A, , <, s)$ ein Modell von ϕ ist genau dann, wenn $(A, <)$ eine lineare Ordnung ohne größtes Element ist.

(b) Betrachten Sie das Termmodell $\mathfrak{T}^{\phi}$ und beschreiben Sie es. Ist es ein Modell von ϕ?

Aufgabe 4 ($\mathfrak{J}^{\Phi}$; 2 Punkte) Die Symbolmenge S sei fest vorgegeben. Man bestimme $\mathfrak{J}^{\Phi}$ für widerspruchsvolles Φ. Hängt $\mathfrak{J}^{\Phi}$ von der widerspruchsvollen Menge Φ ab?