Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Einführung in die Mathematische Logik und Modelltheorie

Tabea Beese
Prof. Dr. Benedikt Löwe
Ilya Sharankou, Dipl.-Math.

Übungsblatt 3

Abgabe am 21. April 2015 am Anfang der Vorlesung.

Aufgabe 1 (Eindeutige Lesbarkeit von Ausdrücken) (4 Punkte)
Sei S eine Symbolmenge. Zeigen Sie: Sind ϕ und ϕ' S-Ausdrücke, so ist ϕ kein echtes Anfangsstück von ϕ'.

Daraus kann man folgern, dass Ausdrücke auf eine eindeutige Weise lesbar sind.

Aufgabe 2 (Ableitungen von Ausdrücken) (4 Punkte)
Wir arbeiten in der Sprache über der Symbolmenge $S = \{f, g, h, a, b, c, R\}$, wobei a, b, c Konstantensymbole, f ein 2-stelliges, g ein 1-stelliges, h ein 3-stelliges Funktionssymbol und R ein 3-stelliges Relationssymbol bezeichnen.

Überprüfen Sie, ob die folgenden Zeichenketten Ausdrücke sind. Falls ja, geben Sie die Ableitung im Ausdruckskalkül an; falls nein, beweisen Sie (mittels Induktion über die Formelkomplexität), dass die Zeichenkette kein Ausdruck ist.

1. $\forall v_0 \exists v_1 \left(f\left(v_0, g\left(v_1\right)\right) = f\left(v_0, f\left(v_1, a\right)\right) \to \exists v_1 \ f\left(v_0, f\left(v_1, a\right)\right) = v_2\right)$
2. $R\left(f\left(v_0, v_1\right), g\left(v_1\right), v_3\right)$
3. $\forall v_0 \forall v_1 \exists v_1 f\left(v_0, v_1\right) = v_3 \vee \exists v_3 \left(\neg v_0 = v_3\right)$
4. $\forall v_0 \forall v_1 \left(\exists v_1 f\left(v_0, v_1\right) = v_3 \vee \exists v_3 \neg v_0 = v_3\right)$

Aufgabe 3 (Quantorenfreie Ausdrücke) (4 Punkte)
Wir arbeiten mit der Symbolmenge $S = \emptyset$ und betrachten S-Ausdrücke, wo die Zeichen $\forall$ und $\exists$ nicht vorkommen, d.h. quantorenfreie S-Ausdrücke. Für ein Wort $w = z_1 \ldots z_n \in \mathcal{A}_S^*$ sei $j\left(w\right)$ die Anzahl der $i \in \{1, \ldots, n\}$ mit $z_i \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$ (die Anzahl der 2-stelligen Junktoren) und $p\left(w\right)$ sei die Anzahl der $i \in \{1, \ldots, n\}$ mit $z_i \in \{v_0, v_1, \ldots\}$ (die Anzahl der Variablen).

1. Definieren Sie die Funktionen $j\left(w\right)$ und $p\left(w\right)$ mittels Induktion über den Formelaufbau.
2. Beweisen Sie mittels Induktion über die Formelkomplexität:

$$\text{ist } w \text{ ein } S\text{-Ausdruck, so gilt } p\left(w\right) = 2\left(j\left(w\right) + 1\right).$$

Gilt die Umkehrung dieses Satzes, d.h. folgt aus $p\left(w\right) = 2\left(j\left(w\right) + 1\right)$ für ein quantorenfreies Wort w, dass w ein S-Ausdruck ist?

Aufgabe 4 (Direktes Produkt) (4 Punkte)

Für S-Strukturen $\mathcal{A} = (A, \mathfrak{a})$ und $\mathcal{B} = (B, \mathfrak{b})$ sei $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$, das direkte Produkt von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$, die S-Struktur mit Träger

$$A \times B := \{(a,b) \mid |a \in A, b \in B\},$$

die durch die folgenden Festlegungen gegeben ist: für n-stelliges Relationssymbol R aus S und $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n) \in A \times B$ gelte

$$R^{\mathcal{A} \times \mathcal{B}}((a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)) \text{ gdw. } R^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n) \text{ und } R^{\mathcal{B}}(b_1, \ldots, b_n),$$

für n-stelliges Funktionssymbol f aus S und $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n) \in A \times B$ sei

$$f^{\mathcal{A} \times \mathcal{B}}((a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)) := \left(f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n), f^{\mathcal{B}}(b_1, \ldots, b_n)\right),$$

für $c \in S$ Konstante sei

$$c^{\mathcal{A} \times \mathcal{B}} := \left(c^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{B}}\right).$$

Sei $S_{\mathrm{Gr}} = \{\circ, e\}$ die Symbolmenge der Gruppen. Wir nennen eine S_{Gr}-Struktur $\mathcal{A}$ eine Gruppe, falls

- $\mathcal{A} \models \forall v_0 \forall v_1 \forall v_2\ v_0 \circ (v_1 \circ v_2) = (v_0 \circ v_1) \circ v_2$
- $\mathcal{A} \models \forall v_0\ (e \circ v_0 = v_0 \wedge v_0 \circ e = v_0)$
- $\mathcal{A} \models \forall v_0 \exists v_1\ (v_0 \circ v_1 = e \wedge v_1 \circ v_0 = e)$

Dabei benutzen wir die übliche Schreibweise der Operation $\circ$ als $v_0 \circ v_1$ statt $\circ(v_0, v_1)$. Man zeige: Sind S_{Gr}-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Gruppen, so ist auch $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ eine Gruppe.