

Einführung in die Theorie der Lieschen Algebren

Wintersemester 2003/04

Christoph Schweigert

Universität Hamburg

Fachbereich Mathematik

Schwerpunkt Algebra und Zahlentheorie

(Stand: 03.03.2004)

Inhaltsverzeichnis

1	Allgemeine Theorie	1
1.1	Grundlegende Definitionen, Beispiele	1
1.2	Hintergrund: Lie-Gruppen und Lie-Algebren	6
1.3	Darstellungen von Lie-Algebren	11
1.4	Irreduzible endlich-dimensionale Darstellungen von $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. .	14
1.5	Ideale, Quotienten, Radikal	17
1.6	Die Sätze von Engel und von Lie	21
2	Komplexe halbeinfache Lie-Algebren	25
2.1	Das Auflösbarkeitskriterium von Cartan	25
2.2	Halbeinfache Lie-Algebren	31
2.3	Der Satz von Weyl	35
2.4	Die Jordan-Zerlegung einer halbeinfachen Lie-Algebra	43
2.5	Wurzelraumzerlegung	48
3	Spiegelungsgruppen und Wurzelsysteme	58
3.1	Endliche Spiegelungsgruppen	58
3.2	Wurzelsysteme	62
3.3	Basen und Systeme positiver Wurzeln	65
3.4	Klassifikation von Wurzelsystemen	70
4	Darstellungen halbeinfacher Lie-Algebren	73
4.1	Gewichte	73
4.2	Die universelle einhüllende Algebra	78

Literatur:

Literatur, die ich bei der Vorbereitung häufig herangezogen habe:

- Wolfgang Soergel, Skript zur Vorlesung Lie-Algebren, erhältlich unter <http://home.mathematik.uni-freiburg.de/soergel/Skripten/Lie.pdf>
- J.E. Humphreys, Introduction to Lie Algebras and Representation Theory. Springer, 1972.
- Jean-Pierre Serre, Lie Algebras and Lie Groups, Springer, 1992.
- Jürgen Fuchs und Christoph Schweigert, Symmetries, Lie algebras and representations, Cambridge University Press, 1997 (hardcover) und 2003 (paperback).

Die aktuelle Version dieses Skriptes finden Sie unter <http://www.math.uni-hamburg.de/home/schweigert/skripten/lskript.pdf> als pdf-Datei. Bitte schicken Sie Korrekturen und Bemerkungen an christoph.schweigert@uni-hamburg.de!

Bei Frau D. Glasenapp möchte ich mich für Ihre große Hilfe bei der Erstellung dieses Skriptes und bei den Hamburger Studenten, bes. bei Frau M. Pilca, für zahlreiche Hinweise bedanken.

1 Allgemeine Theorie

1.1 Grundlegende Definitionen, Beispiele

Definition 1.1.1.

Eine Lie-Algebra über einem Körper k ist ein k -Vektorraum \mathfrak{g} mit einer k -bilinearen Abbildung, der so genannten Lie-Klammer

$$\begin{aligned}\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} &\rightarrow \mathfrak{g} \\ (x, y) &\mapsto [x, y]\end{aligned}$$

derart, dass für alle $x, y, z \in \mathfrak{g}$ gilt

- Antisymmetrie: $[x, x] = 0$
- Jacobi-Identität: $[x, [y, z]] + [z, [x, y]] + [y, [z, x]] = 0$

Bemerkungen 1.1.2.

(i) Aus der Identität $[x, x] = 0$ folgt

$$\begin{aligned}0 &= [x + y, x + y] = [x, x] + [x, y] + [y, x] + [y, y] \\ &= [x, y] + [y, x] \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}\end{aligned}$$

was den Namen Antisymmetrie rechtfertigt. Ist $\text{char } k \neq 2$, so folgt umgekehrt auch aus der Forderung

$$[x, y] = -[y, x] \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}$$

Antisymmetrie wie in Definition 1.1.1 formuliert.

(ii) $\text{Mat}_n(k)$, der n^2 -dimensionale Vektorraum aller $n \times n$ Matrizen mit Einträgen in einem Körper k , wird durch den Kommutator bezüglich der Matrixmultiplikation zu einer Lie-Algebra:

$$[x, y] = xy - yx \quad \forall x, y \in \text{Mat}_n(k)$$

Daher spricht man manchmal auch vom Kommutator statt von der Lie-Klammer. Für einen Kommutator ist die Jacobi-Identität trivialerweise erfüllt.

(iii) Man könnte die Definition auch für den Fall erweitern, in dem k ein kommutativer Ring mit Eins ist und \mathfrak{g} ein k -Modul. Wir wollen dies in dieser Vorlesung nicht tun.

Definition 1.1.3.

(i) Eine k -Algebra ist ein k -Vektorraum A mit einer k -bilinearen Abbildung

$$A \times A \rightarrow A,$$

der Multiplikation.

(ii) Eine Algebra heißt assoziativ, wenn gilt

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \quad \forall x, y, z \in A$$

(iii) Eine Algebra heißt unitär oder auch unital, wenn es in A ein Einselement $1 \in A$ für die Multiplikation gibt, $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ für alle $x \in A$.

(iv) Eine Algebra heißt kommutativ, wenn gilt $xy = yx$ für alle $x, y \in A$.

Definition 1.1.4.

Seien A und B zwei k -Algebren.

(i) Ein k -Algebren-Homomorphismus von A nach B ist eine k -lineare Abbildung $\varphi : A \rightarrow B$ derart, dass gilt

$$\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(xy)$$

(ii) Ist φ überdies ein Isomorphismus von Vektorräumen, so heißt φ auch ein k -Algebren-Isomorphismus.

(iii) Sind A, B unitär mit Eins-Elementen $1_A \in A$ und $1_B \in B$, so heißt ein Algebrenhomomorphismus

$$\phi : A \rightarrow B$$

unitär genau dann, wenn $\phi(1_A) = 1_B$.

Bemerkungen 1.1.5.

(i) Ein Lie-Algebra-Homomorphismus ist also eine lineare Abbildung

$$\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$$

so dass $\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)]$

(ii) Manchmal, wenn alle Algebren unitär sind, vergisst man, explizit unitärer Algebrenhomomorphismus zu sagen.

- (iii) Eine unitäre assoziative k -Algebra A ist nichts anderes als ein unitärer Ring A mit einem unitären Ring-Homomorphismus $k \rightarrow A$, dessen Bild im Zentrum von A liegt.

Beispiele 1.1.6.

- 1) Der Polynomring $k[x_1, \dots, x_n]$ über einem Körper k ist eine assoziative, kommutative, unitäre k -Algebra.
- 2) Sei V ein k -Vektorraum. Der Vektorraum $A = \text{End}(V)$ der Endomorphismen ist bezüglich der Hintereinanderausführung

$$(f, g) \mapsto f \circ g$$

eine assoziative unitäre k -Algebra.

- 3) Der Vektorraum $\text{Mat}_n(k)$ der $n \times n$ -Matrizen mit Einträgen im Körper k wird durch die Matrizenmultiplikation eine assoziative unitäre k -Algebra.
- 4) Wie in Bemerkung 1.1.2 (ii) erklärt wird $\text{Mat}_n(k)$ durch den Kommutator zur Lie-Algebra. Diese Lie-Algebra wird auch mit $\mathfrak{gl}(n, k)$ bezeichnet. Dies ist die Lie-Algebra der allgemeinen linearen Gruppe, auf Englisch **g**eneral **l**inear **g**roup, daher die Abkürzung.

Definition 1.1.7.

Sei A eine Algebra.

- (i) Ein Untervektorraum $U \subset A$ heißt eine Unteralgebra genau dann, wenn mit $x \in U$ und $y \in U$ auch $x \cdot y \in U$ liegen.
- (ii) Ein Untervektorraum $U \subset A$ heißt eine unitale Unteralgebra, (für den Fall, dass A selbst unital ist), wenn $U \ni 1_A$.
- (iii) Ein Untervektorraum $U \subset A$ heißt ein Linksideal genau dann, wenn für jedes $x \in A$ und jedes $y \in U$ das Produkt $xy \in U$ liegt. Entsprechend definiert man Rechtsideale. Folgt aus $x \in A$ und $y \in U$, dass sowohl $xy \in U$ und $yx \in U$, so heißt U ein beidseitiges Ideal.

Bemerkungen 1.1.8.

- 1) Eine Unteralgebra einer (assoziativen, kommutativen, Lie-)Algebra ist mit der induzierten Verknüpfung eine (assoziative, kommutative, Lie-)Algebra.

2) Der Schnitt von Untereralgebren ist wieder eine Untereralgebra. Achtung, dies gilt nicht für die Vereinigung. Gegenbeispiel:

$$A = \text{Mat}_2(\mathbb{C}) \quad U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \quad U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right\}$$

Beispiele 1.1.9.

1) $k[X] \subset k[X, Y]$ ist eine Untereralgebra.

2) Auf den quadratischen Matrizen $A \in \text{Mat}_n(k)$ betrachten wir die Spur $\text{tr}A = \sum_{i=1}^n A_{ii} \in k$. Wir definieren

$$\mathfrak{sl}(n, k) = \left\{ A \in \mathfrak{gl}(n, k) \mid \text{tr}A = 0 \right\}.$$

Dies ist eine Lie-Untereralgebra von $\mathfrak{gl}(n, k)$, da gilt

$$\text{tr} [x, y] = \text{tr} (xy - yx) = 0.$$

Man nennt sie die spezielle lineare Lie-Algebra $\mathfrak{sl}(n, k)$. (Man beachte, dass $\mathfrak{sl}(n, k)$ keine Subalgebra der assoziativen Algebra $\text{Mat}_n(k)$ ist!)

3) Sei V ein Vektorraum und

$$f : V \times V \rightarrow W$$

eine bilineare Abbildung in einen Vektorraum W . Dann ist

$$\mathfrak{o}(V, f) = \{x \in \mathfrak{gl}(V) \mid f(xv, w) + f(v, xw) = 0 \quad \forall v, w \in V\}$$

eine Lie-Untereralgebra von $\mathfrak{gl}(V)$:

$$f((xy - yx)v, w) = -f(yv, xw) + f(xv, yw) = -f(v, (xy - yx)w).$$

Lie-Algebren treten also auf, wenn man Abbildungen betrachtet, die gewisse vorgegebene algebraische Strukturen erhalten, hier etwa eine Bilinearform auf einem Vektorraum.

4) Habe V gerade Dimension, $V = k^{2n}$. Betrachte dann die antisymmetrische Bilinearform f , die durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Man bezeichnet dann $\mathfrak{o}(V, f)$ mit $\mathfrak{sp}(2n, k)$ und nennt sie die symplektische Lie-Algebra.

- 5) Betrachte auf $V = k^n$ die Bilinearform $f : V \times V \rightarrow k$ die durch die Einheitsmatrix gegeben ist. Die zugehörige Lie-Algebra wird mit $\mathfrak{so}(n, k)$ bezeichnet und heißt orthogonale Lie-Algebra. Sie besteht aus allen schief-symmetrischen Matrizen.
- 6) Sowohl die oberen Dreiecksmatrizen als auch die echten oberen Dreiecksmatrizen, ebenso wie die Diagonalmatrizen bilden (Lie-)Unteralgebren von $\mathfrak{gl}(n, k)$.
- 7) Eine Lie-Algebra heißt abelsch, wenn gilt $[x, y] = 0$ für alle $x, y \in \mathfrak{g}$. Offensichtlich kann jeder Vektorraum mit der Struktur einer abelschen Lie-Algebra versehen werden. Die Diagonalmatrizen bilden eine abelsche Subalgebra von $\mathfrak{gl}(n, k)$.

Definition 1.1.10.

Eine Lie-Algebra \mathfrak{g} heißt einfach, wenn sie nicht abelsch ist und jeder von Null verschiedene Lie-Algebren Homomorphismus von \mathfrak{g} in eine andere Lie-Algebra injektiv ist.

Ein wesentliches Ziel der Vorlesung ist das Verständnis des folgenden Klassifikationsresultats (cf. Theorem 3.4.6):

Satz 1.1.11 (Killing, Cartan).

Jede einfache, endlich-dimensionale komplexe Lie-Algebra ist isomorph zu genau einer der klassischen Lie-Algebren

$$\left. \begin{array}{ll} \mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C}) & n \geq 1 \\ \mathfrak{so}(2n+1, \mathbb{C}) & n \geq 2 \\ \mathfrak{sp}(2n, \mathbb{C}) & n \geq 3 \\ \mathfrak{so}(2n, \mathbb{C}) & n \geq 4 \end{array} \right\} 4 \text{ klassische Serien}$$

oder einer der 5 exzeptionellen Lie-Algebren

$$\mathfrak{e}_6, \mathfrak{e}_7, \mathfrak{e}_8, \mathfrak{f}_4 \quad \text{oder} \quad \mathfrak{g}_2.$$

Bemerkung 1.1.12.

- (i) Die Werte von n im Satz 1.1.11 werden durch die folgenden Ausnahme-Isomorphismen erklärt, die wir nicht beweisen werden:

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{so}(3, \mathbb{C}) & \cong \mathfrak{sp}(2, \mathbb{C}) \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \\ \mathfrak{sp}(4, \mathbb{C}) & \cong \mathfrak{so}(5, \mathbb{C}) \\ \mathfrak{so}(2, \mathbb{C}) & \cong \mathbb{C} \text{ ist abelsch, also nicht einfach} \\ \mathfrak{so}(4, \mathbb{C}) & \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \times \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \\ \mathfrak{so}(6, \mathbb{C}) & \cong \mathfrak{sl}(4, \mathbb{C}) \end{array}$$

(ii) Lie-Algebren treten in vielen physikalischen Theorien auf. Hier sind einige Beispiele: Im Standardmodell der Elementarteilchenphysik spielt die komplexe Lie-Algebra $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}$ eine wichtige Rolle. In Versuchen der vereinheitlichten Beschreibung der fundamentalen Wechselwirkungen wurde die Lie-Algebra $\mathfrak{sl}(5, \mathbb{C})$ benutzt. Im heterotischen String in 4 Dimensionen spielt die Lie-Algebra $\mathfrak{e}_6 \oplus \mathfrak{e}_8$ eine wichtige Rolle, in 10 Dimensionen $\mathfrak{e}_8 \oplus \mathfrak{e}_8$ und $\mathfrak{so}(32, \mathbb{C})$.

Beispiel 1.1.13.

Wir wollen die Dimension von $\mathfrak{sp}(2n, k)$ berechnen. Sei F eine quadratische Matrix, die eine Bilinearform auf k^n beschreibt durch

$$f(x, y) = x^t F y.$$

Dann ist eine quadratische Matrix $M \in \mathfrak{gl}(n, k)$ genau dann in $\mathfrak{so}(k^n, f)$, wenn gilt

$${}^t(Mx)Fy = -x^t FMy \quad \forall x, y \in k^n,$$

also wenn gilt $M^t F = -FM$.

Im Falle $\mathfrak{sp}(2n, k)$ hat man

$$F = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$$

Man erhält dann explizit

$$\begin{pmatrix} {}^tA & {}^tC \\ {}^tB & {}^tD \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} {}^tC & -{}^tA \\ {}^tD & -{}^tB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & D \\ -A & -B \end{pmatrix}$$

woraus folgt $C = {}^tC, B = {}^tB$ und $-{}^tA = D$. Also sind die Untermatrizen B und C symmetrisch, A ist beliebig, legt aber D eindeutig fest. Damit hat man

$$\dim_k \mathfrak{sp}(2n, k) = n(n+1) + n^2 = 2n^2 + n.$$

1.2 Hintergrund: Lie-Gruppen und Lie-Algebren

Nur in diesem Abschnitt dieser Vorlesung wird eine gewisse Vertrautheit mit dem Begriff einer Mannigfaltigkeit vorausgesetzt.

Definition 1.2.1.

- (i) Eine Mannigfaltigkeit M ist ein Hausdorffscher topologischer Raum mit einer abzählbaren Basis für die Topologie. Er muss eine Überdeckung durch offene Mengen besitzen

$$M = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$$

mit injektiven Homeomorphismen

$$\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$$

für festes $n \in \mathbb{N}$. n heißt Dimension von M . Die Abbildungen

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

seien stetige Abbildungen von Untermengen des \mathbb{R}^n mit stetigen Inversen. Die so erhaltene Struktur ist die einer topologischen Mannigfaltigkeit. Fordert man mehr für diese Abbildungen, so erhält man spezieller Klassen von Mannigfaltigkeiten: sind sie p -fach differenzierbar, so liegt eine C^p -Mannigfaltigkeit vor; sind sie unendlich oft differenzierbar, eine C^∞ - oder glatte Mannigfaltigkeit, sind sie analytisch, so liegt eine analytische Mannigfaltigkeit vor.

$(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ heißt auch Karte, φ_α Kartenabbildung. Die Gesamtheit aller Karten heißt ein Atlas für M .

- (ii) Eine stetige Abbildung

$$f : M \rightarrow N$$

zwischen zwei Mannigfaltigkeiten M mit Atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ und N mit Atlas $\{(\tilde{U}_{\tilde{\alpha}}, \tilde{\varphi}_{\tilde{\alpha}})\}$ heißt n -fach differenzierbare / differenzierbare / analytische Abbildung wenn für alle $\alpha \in I, \tilde{\alpha} \in \tilde{I}$ die Abbildung

$$\tilde{\varphi}_{\tilde{\alpha}} \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1} : V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \tilde{V}_{\tilde{\alpha}} \subseteq \mathbb{R}^m$$

n -fach differenzierbar / differenzierbar / analytisch ist.

Definition 1.2.2.

Eine Lie-Gruppe ist eine C^∞ -Mannigfaltigkeit G mit einer Gruppenstruktur, derart, dass die Multiplikation

$$\begin{aligned} G \times G &\rightarrow G \\ (x, y) &\mapsto x \cdot y \end{aligned}$$

und die Inversenabbildung

$$\begin{aligned} G &\rightarrow G \\ x &\mapsto x^{-1} \end{aligned}$$

C^∞ -Abbildungen sind.

Beispiel 1.2.3.

- (i) \mathbb{R}^n , allgemeiner jeder endlich-dimensionale reelle Vektorraum, ist eine Lie-Gruppe bezüglich der Addition.
- (ii) Die Menge der oberen Dreiecksmatrizen mit Einsen auf der Diagonale ist eine Lie-Gruppe bezüglich der Matrizenmultiplikation.
- (iii) Offene Teilmengen des \mathbb{R}^n tragen in natürlicher Weise die Struktur einer C^∞ -Mannigfaltigkeit. Mit dieser Struktur ist $GL(n, \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n^2}$ eine Lie-Gruppe, ebenso $GL(n, \mathbb{C}) \subset \mathbb{R}^{2n^2}$.
- (iv) Die Sphären $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ sind C^∞ -Mannigfaltigkeiten. Koordinatensystem kann man zum Beispiel durch stereographische Projektion angeben. $S^0 = \{+1, -1\}$ und $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ sind auch Lie-Gruppen. Allerdings gilt dies nicht für Sphären beliebiger Dimension, etwa S^2 . Um S^3 zu einer Lie-Gruppe zu machen, benutzen wir den Schiefkörper der Quaternionen. Dies ist die vier-dimensionale reelle Algebra \mathbb{H} mit Basis $1, i, j, k$ und Relationen

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1 \quad ijk = -1.$$

Wir definieren eine Konjugation

$$\begin{aligned} \mathbb{H} &\rightarrow \mathbb{H} \\ q = a + ib + jc + kd &\mapsto \bar{q} = a - ib - jc - kd \end{aligned}$$

Sie ist ein Antiautomorphismus der Algebra \mathbb{H} , $\overline{\bar{q}} = q$. Ausserdem gilt $q\bar{q} = \bar{q}q = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, so dass man einen Betrag durch

$$\|q\| = \sqrt{q\bar{q}}$$

definieren kann. Wir identifizieren jetzt die 3-Sphäre mit der Lie-Gruppe der Einheitsquaternionen

$$S^3 \cong \{z \in \mathbb{H} \mid |z| = 1\}.$$

Für die weiteren Überlegungen betrachten wir den drei-dimensionalen Unterraum der rein-imaginären Quaternionen:

$$Q = \{q \in \mathbb{H} \mid \bar{q} = -q\} = \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k \cong \mathbb{R}^3.$$

Auf ihm definieren wir ein reelles Skalarprodukt durch $(q_1, q_2) = P_1(q_1 \bar{q}_2)$, wobei P_1 die Projektion auf das Basiselement 1 ist. Bezüglich dieses Skalarprodukts ist die Basis $\{i, j, k\}$ orthonormal. Nun operieren die Einheitsquaternionen S^3 auf den rein imaginären Quaternionen Q durch

$$\begin{aligned} S^3 \times Q &\rightarrow Q \\ (u, q) &\mapsto uqu^{-1} = u\bar{q}u. \end{aligned}$$

In der Tat gilt:

$$\overline{u\bar{q}u} = u\bar{q}u = -u\bar{q}u$$

für $u \in S^3$ $q \in Q$. Da diese Operation das Skalarprodukt erhält, bekommen wir einen Gruppenhomomorphismus

$$S^3 \rightarrow O(3).$$

Da S^3 zusammenhängend ist, liegt das Bild in $SO(3)$. Man kann zeigen, dass das Bild gleich $SO(3)$ ist, und dass der Kern der Abbildung die Gruppe $\{+1, -1\}$ ist. Daher ist S^3 als Lie-Gruppe eine zweifache Überlagerung der Drehgruppe. Man nennt sie auch die Spingruppe.

(v) Auch $GL(n, \mathbb{H})$ ist eine Lie-Gruppe.

Man kann folgenden Satz zeigen:

Satz 1.2.4.

Sei G eine Lie-Gruppe. Bezeichne $T_e G$ den Tangentialraum von G im neutralen Element $e \in G$. So erhalten wir eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{l} C^\infty\text{-Gruppenhomomorphismen} \\ \varphi : \mathbb{R} \rightarrow G \\ \varphi \end{array} \right\} \begin{array}{l} \simeq T_e G \\ \mapsto \dot{\varphi}(0) \\ \text{Geschwindigkeit zu } t = 0 \end{array}$$

Ein-Parameter-Untergruppe

Beispiel 1.2.5.

(i) Im Falle der Lie-Gruppe \mathbb{R}^n ist alles ganz einfach

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \\ \varphi : t \mapsto vt \end{array} \right\} \simeq v$$

(ii) Im Falle der Lie-Gruppe $GL(n, \mathbb{R})$ liefert die Exponentialfunktion den gesuchten Zusammenhang: die Ein-Parameter-Untergruppen sind

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow GL(n, \mathbb{R}) \\ t &\mapsto \exp(tA) = 1 + tA + \frac{t^2 A^2}{2!} + \dots \end{aligned}$$

Sie sind in Bijektion zu dem Geschwindigkeitsvektor, der nun die Matrix $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R}) = T_e GL(n, \mathbb{R})$ ist.

(iii) Im Falle von Sphären hat man die folgende Situation. Für S^1 sind die Ein-Parameter-Untergruppen

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow S^1 \\ t &\mapsto \exp(iat) \quad \text{mit } a \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

In der Tat können wir den Tangentialraum im Einselement identifizieren mit den rein imaginären Zahlen, $T_1 S^1 \cong i\mathbb{R}$, und die relevante Abbildung schickt die obige Ein-Parameter-Untergruppe auf die Zahl ia .

Im Falle S^3 sind die Ein-Parameter-Untergruppen

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow S^3 \\ t &\mapsto \exp(tq) \end{aligned}$$

mit q rein imaginär, also $q = -\bar{q}$. In der Tat gilt dann:

$$\begin{aligned} \|\exp(tq)\|^2 &= \exp(tq)\overline{\exp(tq)} = \exp(tq)\exp(t\bar{q}) \\ &= \exp(tq)\exp(-tq) = 1 \quad , \end{aligned}$$

also $\exp(tq) \in S^3$.

(iv) Sei G nun eine beliebige Lie-Gruppe. Für $A \in T_e G$ bezeichne

$$\varphi_A : \mathbb{R} \rightarrow G$$

die Ein-Parameter-Untergruppe mit $\dot{\varphi}_A(0) = A$. Diese Gruppe erlaubt es uns, allgemein eine Exponentialabbildung zu definieren:

$$\begin{aligned} \exp : \quad T_e G &\rightarrow G \\ A &\rightarrow \varphi_A(1) \end{aligned}$$

Dann kann man unter Benutzung der Kettenregel zeigen, dass $\varphi_{tA}(s) = \varphi_A(ts)$ gilt. Daraus folgt

$$\exp(tA) = \varphi_{tA}(1) = \varphi_A(t)$$

Definition 1.2.6.

Die Lie-Algebra $\text{Lie}G$ der Lie-Gruppe G ist der Vektorraum T_eG mit der Lie-Klammer

$$[A, B] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} \left\{ \varphi_A(t)^{-1} \varphi_B(t)^{-1} \varphi_A(t) \varphi_B(t) - e \right\}$$

Dieser Ausdruck ist nur definiert in einer Karte, aber man kann dann zeigen, dass er unabhängig ist von der Wahl der Karte. In diesem Sinn ist also die Lie-Klammer der "infinitesimaler Kommutator der Gruppenelemente".

Beispiel 1.2.7.

Wir wollen dies noch konkret für $G = \text{GL}(n, \mathbb{R})$ ansehen und entwickeln dafür den folgenden Ausdruck bis zu Termen quadratisch in t :

$$\begin{aligned} & \exp(tA) \exp(-tB) \exp(tA) \exp(tB) \\ &= 1 + t(-A - B + A + B) + \frac{1}{2}t^2(A^2 + B^2 + A^2 + B^2 \\ & \quad + 2AB - 2A^2 - 2AB - 2BA - 2B^2 + 2AB) + O(t^3) \\ &= 1 + t^2(AB - BA) + O(t^3). \end{aligned}$$

1.3 Darstellungen von Lie-Algebren

Definition 1.3.1.

- (i) Eine Darstellung einer Lie-Algebra \mathfrak{g} ist ein Paar (V, ρ) bestehend aus einem Vektorraum V und einem Homomorphismus

$$\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \text{gl}(V)$$

von Lie-Algebren.

- (ii) Ist ρ injektiv, so nennt man die Darstellung treu.

Eine äquivalente Definition des Begriffs der Darstellung ist die folgende: Eine Darstellung einer Lie-Algebra \mathfrak{g} ist ein Vektorraum V mit einer bilinearen Abbildung

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} \times V &\rightarrow V \\ (x, v) &\rightarrow xv \end{aligned}$$

so dass

$$x(yv) - y(xv) = [x, y]v \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}, \quad v \in V.$$

Der Zusammenhang zwischen beiden Definitionen folgt durch die Setzung

$$\rho(x)v = xv.$$

Beispiel 1.3.2.

- (i) Jeder Vektorraum V trägt eine Darstellung von $\mathfrak{gl}(V) \times V \rightarrow V$ durch die offensichtliche Operation.
- (ii) Jeder Vektorraum V trägt eine Darstellung jeder Lie-Algebra durch die triviale Operation $xv = 0$ für alle $x \in \mathfrak{g}$ und alle $v \in V$.
- (iii) Der Grundkörper k selbst mit der trivialen Operation heißt auch die triviale Darstellung von \mathfrak{g} .

Definition 1.3.3.

- (i) Eine lineare Abbildung $\varphi : V \rightarrow W$ zwischen zwei Darstellungen einer Lie-Algebra \mathfrak{g} heißt Homomorphismus von Darstellungen (oder auch Intertwiner), wenn gilt

$$\varphi(xv) = x\varphi(v) \quad \forall v \in V, x \in \mathfrak{g}.$$

- (ii) Zwei Darstellungen heißen isomorph, wenn es einen Homomorphismus gibt, der ein Isomorphismus von Vektorräumen ist.

Beispiel 1.3.4.

Sei \mathfrak{g} eine Lie-Algebra über k . Eine Linearform $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ ist eine Darstellung von \mathfrak{g} genau dann, wenn λ auf dem von allen Kommutatoren erzeugten Untervektorraum $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}$ verschwindet. Wir haben also eine Bijektion

$$(\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}])^* \leftrightarrow \begin{cases} \text{ein-dimensionale Darstellungen von } \mathfrak{g}, \\ \text{bis auf Isomorphismus} \end{cases}$$

Die Elemente der linken Seite werden manchmal auch Charaktere auf \mathfrak{g} genannt.

Definition 1.3.5.

- (i) Ein Untervektorraum U einer Darstellung V von \mathfrak{g} heißt Unterdarstellung genau dann, wenn $xv \in U$ für alle $x \in \mathfrak{g}$ und $v \in U$.

Beispiel: Ist $\varphi : V \rightarrow W$ ein Homomorphismus von Darstellungen, so sind $\text{im } \varphi$ und $\ker \varphi$ Unterdarstellungen (Übung).

- (ii) Eine Darstellung V einer Lie-Algebra \mathfrak{g} heißt einfach oder irreduzibel genau dann, wenn ganz V und der Nullvektor 0 die einzigen Unterdarstellungen von V sind und V selbst nicht Null ist.

(iii) Ist $U \subseteq V$ eine Unterdarstellung einer Darstellung V , so gibt es genau eine Darstellung von \mathfrak{g} auf V/U , so dass

$$\text{can} : V \rightarrow V/U$$

ein Homomorphismus von Darstellungen wird. Man nennt V/U die Quotientendarstellung.

(iv) Für jede Lie-Algebra \mathfrak{g} definiert man die Abbildung

$$\begin{aligned} \text{ad} : \mathfrak{g} &\rightarrow \text{End}\mathfrak{g} \\ x &\mapsto \text{ad}_x = [x, \cdot] \end{aligned}$$

Ausgeschrieben heißt dies, dass $\text{ad}_x(y) = [x, y]$ gilt. Man sieht mit Hilfe der Jacobi-Identität, dass ad ein Homomorphismus von Lie-Algebren ist:

$$\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \text{gl}(\mathfrak{g}),$$

denn es gilt

$$\begin{aligned} (\text{ad}_x \circ \text{ad}_y - \text{ad}_y \circ \text{ad}_x)(z) &= [x[y, z]] - [y, [x, z]] \\ &= [x, [y, z]] + [y, [z, x]] \\ &= -[z, [x, y]] = \text{ad}_{[x, y]}(z) \end{aligned}$$

Man nennt die zugehörige Darstellung die adjungierte Darstellung. Man sieht leicht, dass die Ideale von \mathfrak{g} eindeutig den Unterdarstellungen der adjungierten Darstellung entsprechen. Der Kern von ad ist

$$\ker \text{ad} = \{x \in \mathfrak{g} \mid [x, y] = 0 \quad \forall y \in \mathfrak{g}\} = Z(\mathfrak{g})$$

und heißt das Zentrum von \mathfrak{g} . Das Zentrum ist ein Ideal von \mathfrak{g} .

Bemerkung 1.3.6.

(i) Führt man eine k -Basis $\{t^i\}_{i=1, \dots, \dim \mathfrak{g}}$ von \mathfrak{g} ein, so führt die Lie-Klammer

$$[t^i, t^j] = \sum_{k=1}^{\dim \mathfrak{g}} f_k^{ij} t^k$$

auf einen Satz von Skalaren $f_k^{ij} \in k$, genannt die Strukturkonstanten von \mathfrak{g} . Sie hängen natürlich von der Wahl der Basis von \mathfrak{g} ab.

(ii) Führt man auch für den Vektorraum V , der eine Darstellung von \mathfrak{g} trägt, eine Basis $\{b^i\}_{i=1, \dots, \dim V}$ ein, so liefert die Darstellung eine Abbildung

$$\begin{aligned} R &: \mathfrak{g} \rightarrow \text{Mat}_{\dim V}(k) \\ x &\mapsto R(x)_j^i \end{aligned}$$

mit

$$\rho(x)b^i = \sum_{j=1}^{\dim V} R(x)_j^i b^j$$

Offenbar gilt

$$R(x)R(y) - R(y)R(x) = R([x, y]),$$

wobei rechts das Produkt die Matrizenmultiplikation ist.

(iii) Speziell für die adjungierte Darstellung erhält man

$$\rho(t^i)t^j = \sum_k f_k^{ij} t^k = \sum_k R(t^i)_k^j t^k,$$

also $R(t^i)_k^j = f_k^{ij}$. In der älteren physikalischen Literatur heißt daher die adjungierte Darstellung auch "Darstellung auf den Strukturkonstanten".

Die Eichbosonen einer Eichtheorie transformieren sich in der adjungierten Darstellung.

1.4 Irreduzible endlich-dimensionale Darstellungen von $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$

Ziel dieses Abschnitts ist der Beweis des folgenden Satzes. Er ist ein zentrales Hilfsmittel beim Studium von Lie-Algebren.

Satz 1.4.1.

Die Dimension liefert eine Bijektion

$$\dim : \left\{ \begin{array}{l} \text{einfache endlich-dimensionale} \\ \text{Darstellung von } \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \\ \text{bis auf Isomorphismus} \end{array} \right\} \simeq \{1, 2, 3, \dots\}.$$

Bemerkung 1.4.2.

$SO(3)$ ist die Drehgruppe in 3-Dimensionen:

$$SO(3) = \{R \in \text{End}(\mathbb{R}^3) \mid \langle Rx, Ry \rangle = \langle x, y \rangle \text{ und } \det R = 1\}.$$

Die Komplexifizierung der Lie-Algebra von $SO(3)$ ist gerade $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. In der Physik heißt $\frac{1}{2}(\dim V - 1)$ der Spin der irreduziblen Darstellung. Satz 1.4.1 rechtfertigt also insbesondere, warum man irreduzible Darstellungen durch ihren Spin klassifiziert.

Wir müssen Existenz und Eindeutigkeit der irreduziblen Darstellungen zeigen und fangen mit der Existenz an. Sei k ein Körper und $E_{ij} \in \text{Mat}_n(k)$ die quadratische Matrix, deren Einträge alle gleich 0 sind, außer dem in der i -ten Zeile und j -ten Spalte, der gleich 1 sein soll. Man rechnet leicht nach:

$$\begin{aligned} E_{ij}E_{kl} &= \delta_{jk}E_{il} \\ [E_{ij}, E_{kl}] &= \delta_{jk}E_{il} - \delta_{li}E_{kj}. \end{aligned} \quad (1)$$

Lemma 1.4.3.

Die Abbildung

$$\begin{aligned} \rho : \mathfrak{gl}(n, k) &\rightarrow \mathfrak{gl}(k[X_1, \dots, X_n]) \\ E_{ij} &\mapsto x_i \partial_j \end{aligned}$$

ist eine Darstellung von $\mathfrak{gl}(n, k)$ auf dem Polynomring $k[X_1, \dots, X_n]$ in n Variablen.

Beweis.

Für $p \in k[x_1 \dots x_n]$ gilt nach der Produktregel

$$x_i \partial_j x_k \partial_l (p) = \delta_{jk} x_i \partial_l (p) + x_i x_k \partial_j \partial_l (p)$$

Daraus folgen genau die Kommutationsrelation (1):

$$[x_i \partial_j, X_k \partial_l] = \delta_{jk} x_i \partial_l - \delta_{li} x_k \partial_j. \quad \square$$

Beweis. von Satz 1.4.1

Eine Basis für $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ bilden die drei Matrizen

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

für diese findet man die Lie-Klammern

$$[h, e] = 2e \quad [h, f] = -2f \quad [e, f] = h. \quad (2)$$

Nach Lemma 1.4.3 können wir also die Lie-Algebra $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ auf dem Polynomring $k[x, y]$ folgendermaßen darstellen:

$$\begin{aligned} \rho(e) &= x \partial_y \\ \rho(f) &= y \partial_x \\ \rho(h) &= x \partial_x - y \partial_y \end{aligned}$$

Offensichtlich erhalten alle diese Abbildungen den Totalgrad, d.h. die Summe der Grade in x und in y . Somit bildet der Unterraum $V(m) = k[x, y]^m$ der Polynome vom Totalgrad m eine Unterdarstellung. Eine Basis darin bilden die Polynome

$$v_i = y^i x^{m-i} \quad i = 0, \dots, m$$

so dass $\dim V(m) = m + 1$ mit $m = 0, 1, 2, \dots$. Eine einfache Rechnung zeigt

$$\begin{aligned} ev_i &= x \partial_y (y^i x^{m-i}) = iy^{i-1} x^{m-i+1} = iv_{i-1} \\ fv_i &= (m-i)v_{i+1} \\ hv_i &= (m-2i)v_i \end{aligned} \quad (3)$$

mit der bequemen Konvention $v_{-1} = v_{m+1} = 0$.

Daraus folgt aber, dass die Darstellung von $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ auf $V(m)$ einfach ist: denn jede Unterdarstellung U muss einen Eigenvektor von h enthalten, also ein v_i , und damit nach den Relationen (3) alle v_i . Damit folgt $U = V(m)$. Wir haben also für jede endliche Dimension eine irreduzible Darstellung von $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ konstruiert.

Unser nächstes Ziel ist es nun zu zeigen, dass je zwei irreduzible Darstellungen von $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ der gleichen endlichen Dimension isomorph sind. Dazu brauchen wir drei Schritte:

(i) Sei $\rho : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ eine Darstellung von $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ und sei

$$V_\mu = \ker(\rho(h) - \mu)$$

der Eigenraum von $\rho(h)$ zum Eigenwert μ . Aus

$$hev = [h, e]v + ehv = (2 + \mu)ev \quad \text{für } v \in V_\mu$$

folgt sofort

$$\rho(e)V_\mu \subset V_{\mu+2} \quad \rho(f)V_\mu \subset V_{\mu-2}.$$

(ii) Sei nun die Darstellung endlich-dimensional, $\dim V < \infty$. Ist $V \neq 0$, so gibt es wenigstens einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$, den wir so wählen können, dass

$$V_\lambda \neq 0 \quad \text{und} \quad V_{\lambda+2} = 0$$

Solch ein λ heißt ein höchstes Gewicht von V , wenn V auch noch irreduzibel ist.

Für jedes $v \in V_\lambda$ gilt:

$$ev = 0 \quad hv = \lambda v.$$

Per Induktion folgt daraus

$$hf^n v = (\lambda - 2n)f^n v$$

denn man rechnet leicht nach:

$$\begin{aligned} hf^n v &= hf(f^{n-1}v) = [h, f]f^{n-1}v + fh(f^{n-1}v) \\ &= (-2 + \lambda - 2(n-1))f^n v = (\lambda - 2n)f^n v. \end{aligned}$$

Ebenso zeigt man induktiv

$$ef^n v = n(\lambda - n + 1)f^{n-1}v$$

für alle $n \in \{0, 1, \dots\}$. Es folgt, dass

$$U = \text{span}_{\mathbb{C}}\{v_i = f^i v\}$$

eine Unterdarstellung von V ist.

- (iii) Ist V überdies eine einfache endlich-dimensionale Darstellung, so gilt $U = V$. Die Menge aller $v_i \neq 0$ ist als Menge von Eigenvektoren von h zu unterschiedlichen Eigenwerten linear unabhängig. Da V endlich-dimensional sein soll, gibt es $d \geq 1$ so dass $f^d v = 0$. Wähle d minimal mit dieser Eigenschaft. Wir bekommen so eine Basis $\{v, f^1 v = v_1, \dots, f^{d-1} v\}$ von V , was zeigt, dass $\dim V = d$. Außerdem impliziert $f^d v = 0$ auch

$$0 = ef^d v = d(\lambda - d + 1)f^{d-1} v,$$

mithin $d = \lambda + 1$. Man zeigt schließlich, dass die Darstellung zur Unterdarstellung $V(\lambda)$ in $k[x, y]$ isomorph ist.

1.5 Ideale, Quotienten, Radikal

Definition 1.5.1.

Sei A eine k -Algebra mit Verknüpfung $(x, y) \mapsto x \cdot y$. Ein Untervektorraum $I \subset A$ heißt Ideal von A genau dann, wenn gilt $AI \subset I$ und $IA \subset I$.

Bemerkungen 1.5.2.

- (i) Genauer heißt I ein beidseitiges Ideal. Gilt $AI \subset I$, so heißt I Rechtsideal und gilt $IA \subset I$, so heißt I Linksideal. Für kommutative Algebren und für Lie-Algebren fallen die Begriffe zusammen.
- (ii) Jedes Ideal ist auch eine Unteralgebra, muß aber natürlich nicht unbedingt die Eins von A enthalten, wenn es eine solche gibt.

- (iii) Die Unterräume 0 und A sind immer Ideale von A .
- (iv) Die Summe von Idealen ist wieder ein Ideal.
- (v) Der Schnitt von Idealen ist ein Ideal.
- (vi) Das von einer Teilmenge T erzeugte Ideal ist definiert als das kleinste Ideal, das T enthält. Es ist gleich dem Schnitt aller Ideale, die T enthalten.

Lemma 1.5.3.

- (i) Der Kern eines Algebrenhomomorphismus ist ein Ideal.
- (ii) Ist $I \subset A$ ein Ideal, so gibt es auf dem Quotientenraum A/I genau eine Algebrastruktur derart, dass die kanonische Surjektion

$$\text{can} : A \rightarrow A/I$$

ein Homomorphismus von Algebren wird.

- (iii) Ist $\varphi : A \rightarrow B$ ein Algebrenhomomorphismus und $I \subset A$ ein Ideal mit $\varphi(I) = 0$, so gibt es genau einen Algebrenhomomorphismus

$$\tilde{\varphi} : A/I \rightarrow B$$

mit $\tilde{\varphi} \circ \text{can} = \varphi$

Beweis. Übung

Lemma 1.5.4.

- (i) Urbilder von Idealen sind Ideale.
- (ii) Das Bild eines Ideales unter einem surjektiven Algebrenhomomorphismus ist ein Ideal.
- (iii) Sei \mathfrak{g} eine Lie-Algebra und I, J Ideale. Dann sind

$$I + J := \{x + y \mid x \in I, y \in J\}$$

und $I \cap J$ Ideale.

(iv) Für zwei Unterräume U, V einer Lie-Algebra bezeichne

$$[U, V] \subset \mathfrak{g}$$

den Untervektorraum, der von allen Kommutatoren $[x, y]$ mit $x \in U$ und $y \in V$ aufgespannt wird. Sind I, J Ideale in einer Lie-Algebra \mathfrak{g} , so ist auch $[I, J]$ ein Ideal. Achtung: Nicht alle Elemente von $[U, V]$ lassen sich als Kommutator eines Elementes aus U mit einem Element aus V schreiben.

Offenbar ist $[I, J] \subset I \cap J$. Im allgemeinen gilt aber keine Gleichheit: sei zum Beispiel $I = J = \mathfrak{g} \neq 0$ abelsch, dann ist $I \cap J = \mathfrak{g}$, aber $[I, J] = 0$.

(v) Es gelten die üblichen Isomorphiesätze. Seien I, J Ideale von \mathfrak{g} und $I \subset J$. Dann ist I ein Ideal von J und es gilt

$$\mathfrak{g}/J \cong (\mathfrak{g}/I)/(J/I).$$

Ferner gilt

$$I/(I \cap J) \cong (I + J)/J.$$

(vi) Insbesondere ist $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ ein Ideal von \mathfrak{g} . Die Lie-Algebra $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ heißt die derivierte Lie-Algebra von \mathfrak{g} .

(vii) Dies kann man in zweierlei Weise induktiv fortsetzen und erhält zwei Ketten von Idealen von \mathfrak{g} :
die abgeleitete Reihe

$$\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}, \quad \mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \quad \mathfrak{g}^{(i+1)} = [\mathfrak{g}^{(i)}, \mathfrak{g}^{(i)}]$$

und die absteigende Zentralreihe

$$\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}, \quad \mathfrak{g}^1 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \quad \mathfrak{g}^{i+1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^i]$$

Definition 1.5.5.

Sei \mathfrak{g} eine Lie-Algebra.

- (i) Eine Lie-Algebra \mathfrak{g} heißt auflösbar, , wenn die abgeleitete Reihe für hinreichend große Werte von i Null wird, $\mathfrak{g}^{(i)} = 0$ für $i \gg 0$.
- (ii) Eine Lie-Algebra \mathfrak{g} heißt nilpotent, , wenn die absteigende Zentralreihe für hinreichend große Werte von i Null wird, $\mathfrak{g}^i = 0$ für $i \gg 0$.

Folgerungen 1.5.6.

- (i) Da offenbar $\mathfrak{g}^{(i)} \subseteq \mathfrak{g}^i$ gilt, sind nilpotente Lie-Algebren insbesondere auflösbar. Die Umkehrung gilt nicht.
- (ii) Die oberen Dreiecksmatrizen bilden eine auflösbare Lie-Algebra. Die echten oberen Dreiecksmatrizen bilden eine nilpotente Lie-Algebra.
- (iii) Jeder Quotient und jede Subalgebra einer nilpotenten Lie-Algebra sind nilpotent.
- (iv) Sei $\mathfrak{g}' \hookrightarrow \mathfrak{g} \twoheadrightarrow \mathfrak{g}''$ eine exakte Sequenz von Lie-Algebren. Dann ist \mathfrak{g} genau dann auflösbar, wenn \mathfrak{g}' und \mathfrak{g}'' auflösbar sind. Man beachte, dass diese Aussage über Auflösbarekeit stärker ist als die in (iii) über Nilpotenz. Betrachte zum Beispiel die zwei-dimensionale komplexe Lie-Algebra

$$\mathfrak{g} = \text{span}_{\mathbb{C}}(X, Y)$$

mit einzigem nicht-trivialen Kommutator $[X, Y] = X$. Diese Lie-Algebra ist offensichtlich auflösbar, aber nicht nilpotent. Betrachte die beiden Unteralgebren $\mathfrak{g}_1 = \text{span}_{\mathbb{C}}(X)$ und $\mathfrak{g}_2 = \text{span}_{\mathbb{C}}(Y)$, die als abelsche Lie-Algebren natürlich nilpotent sind. Es existiert dann die kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}_2 \rightarrow 0$$

mit offensichtlichen Abbildungen, aus der man aber nicht schliessen kann, dass \mathfrak{g} nilpotent sei.

- (v) Sei \mathfrak{g} eine Lie-Algebra. Dann ist \mathfrak{g} genau dann auflösbar, wenn es eine Folge von Idealen gibt

$$\mathfrak{g} \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots \supseteq I_m = 0,$$

so dass I_{i+1} Ideal in I_i ist und I_{i-1}/I_i abelsch ist für alle i .

- (vi) Seien I, J auflösbare Ideale einer Lie-Algebra \mathfrak{g} . Dann ist auch $I+J \subseteq \mathfrak{g}$ ein auflösbares Ideal von \mathfrak{g} . Betrachte dazu die kurze exakte Sequenz

$$J \hookrightarrow I+J \twoheadrightarrow (I+J)/J.$$

Denn wegen $(I+J)/J \cong I/I \cap J$ ist $(I+J)/J$ als Quotient von I auflösbar, und somit ist auch $I+J$ auflösbar.

Folgerungen 1.5.7.

- (i) Ist $\dim \mathfrak{g} < \infty$, so gibt es in \mathfrak{g} ein größtes auflösbares Ideal, das Radikal $\text{rad } \mathfrak{g}$ von \mathfrak{g} . Es ist die Summe aller auflösbaren Ideale von \mathfrak{g} , die nach Folgerung 1.5.6 (vi) selbst auflösbar ist.

(ii) Man nennt eine Lie-Algebra \mathfrak{g} halbeinfach, wenn ihr Radikal trivial ist, $\text{rad } \mathfrak{g} = 0$. Wir werden sehen, dass einfache Lie-Algebren insbesondere auch halbeinfach sind. Wir werden ferner sehen, dass halbeinfache Lie-Algebren die direkte Summe ihrer einfachen Ideale sind.

(iii) Offensichtlich gilt für eine auflösbare Lie-Algebra \mathfrak{g} die Gleichung $\mathfrak{g}/\text{rad } \mathfrak{g} = 0$. Ist \mathfrak{g} nicht auflösbar, so ist $\mathfrak{g}/\text{rad } \mathfrak{g} \neq 0$ halbeinfach. Dies sieht man so: sei $I \subset \mathfrak{g}/\text{rad } \mathfrak{g}$ ein auflösbares nicht-triviales Ideal. Betrachte die beiden exakten Sequenzen

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \text{rad } \mathfrak{g} & \rightarrow & \mathfrak{g} & \xrightarrow{\pi} & \mathfrak{g}/\text{rad } \mathfrak{g} \rightarrow 0 \\ & & \parallel & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \rightarrow & \text{rad } \mathfrak{g} & \rightarrow & \pi^{-1}(I) & \xrightarrow{\pi} & I \rightarrow 0. \end{array}$$

Dann ist nach Folgerung 1.5.6 (iv) $\pi^{-1}(I)$ auflösbar, aber gleichzeitig $\pi^{-1}(I) \supset \text{rad } \mathfrak{g}$ echt enthalten, was ein Widerspruch zur Maximalität des Radikals ist.

(iii) Ferner gilt für komplexe Lie-Algebren der Satz von Levi: die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \text{rad } \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\text{rad } \mathfrak{g} \rightarrow 0$$

spaltet, d.h. \mathfrak{g} schreibt sich als semi-direkte Summe der halbeinfachen Lie-Algebra $\mathfrak{s} := \mathfrak{g}/\text{rad } \mathfrak{g}$ und der auflösbaren Lie-Algebra $\text{rad } \mathfrak{g}$. Semi-direkt heißt die Summe, weil $[s, r] \in \text{rad } \mathfrak{g}$ für alle $s \in \mathfrak{s}$ und $r \in \text{rad } \mathfrak{g}$.

(iv) Das Problem der Klassifikation aller Lie-Algebren kann somit in drei Teile zerlegt werden:

a) die Klassifikation der einfachen Lie-Algebren, die ein Hauptziel dieser Vorlesung ist.

b) die Klassifikation aller auflösbaren Lie-Algebren, die in dieser Form unmöglich ist. Wir werden aber in Kapitel 2.1. eine gute Charakterisierung auflösbarer Lie-Algebren herleiten.

c) die Klassifikation von Darstellungen halbeinfacher Lie-Algebren als Derivationen von auflösbaren Lie-Algebren. Dieses Problem scheint aussichtslos zu sein.

1.6 Die Sätze von Engel und von Lie

Satz 1.6.1.

Sei V ein von Null verschiedener Vektorraum über einem Körper k . Sei $\mathfrak{g} \subset \text{gl}(V)$ eine Unter algebra, die aus nilpotenten Endomorphismen von V besteht. Dann gibt es einen von Null verschiedenen Vektor $v \in V$, der von allen Elementen in \mathfrak{g} annihiliert wird, $\mathfrak{g}v = 0$.

Beweis.

- Wir überlegen uns zunächst: Ist $x \in \mathfrak{gl}(V)$ nilpotent, so ist

$$\mathrm{ad}_x \in \mathrm{End}(\mathfrak{gl}(V))$$

nilpotent. Denn es gilt für alle $y \in \mathfrak{gl}(V)$

$$(\mathrm{ad}_x)^n y = \sum_i \binom{n}{i} (-1)^{n-i} x^i y x^{n-i}.$$

Daher folgt aus $x^n = 0$ die Gleichung $(\mathrm{ad}_x)^{2n} = 0$.

- Wir führen den Beweis durch Induktion über $\dim \mathfrak{g}$. Im Falle $\dim \mathfrak{g} = 1$, $\mathfrak{g} = \langle v \rangle$, haben wir nur einen nilpotenten Endomorphismus v von V zu betrachten. Der Satz folgt dann aus dem Satz über die Jordansche Normalform.

Sei also $\dim \mathfrak{g} \geq 2$. Wir wählen eine maximale echte Unteralgebra \mathfrak{h} von \mathfrak{g} . Durch Einschränkung der adjungierten Darstellung von \mathfrak{g} auf \mathfrak{h} erhalten wir mit

$$\mathrm{ad}|_{\mathfrak{h}} : \mathfrak{h} \rightarrow \mathrm{End}(\mathfrak{g})$$

eine Darstellung von \mathfrak{h} auf \mathfrak{g} , die natürlich \mathfrak{h} selbst als Unterdarstellung hat. Wir gehen zur Quotientendarstellung

$$\overline{\mathrm{ad}} : \mathfrak{h} \rightarrow \mathrm{End}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$$

über: auch hier wirkt \mathfrak{h} durch nilpotente Endomorphismen auf $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Daher können wir die Induktionsannahme anwenden und finden einen Vektor $\bar{l} \neq 0$ in $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ mit $\overline{\mathrm{ad}}(\mathfrak{h})\bar{l} = 0$. Anders gesagt, es gibt einen Vektor $l \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{h}$ für den $[\mathfrak{h}, l] \subset \mathfrak{h}$ gilt.

Wir betrachten nun die Subalgebra

$$\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h} + kl \supset \mathfrak{h}.$$

Da \mathfrak{h} eine maximale Unteralgebra sein sollte, muss $\mathfrak{h} + kl = \mathfrak{g}$ gelten. Wir wenden nun ein weiteres Mal die Induktionsannahme an und sehen, dass

$$W = \{v \in V \mid \mathfrak{h}v = 0\}$$

nicht Null sein kann. Darüber hinaus impliziert die Inklusion $[\mathfrak{h}, l] \subseteq \mathfrak{h}$, dass $lW \subseteq W$ gilt.

Da $l \in \mathfrak{g}$ ein nilpotenter Endomorphismus sein soll, gibt es wenigstens ein nicht-verschwindendes $v \in W$, das von l annihiliert wird, $lv = 0$. Aus $\mathfrak{h} + kl = \mathfrak{g}$ folgt somit $\mathfrak{g}v = 0$. \square

Korollar 1.6.2.

Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $\mathfrak{g} \subset \text{gl}(V)$ eine Unteralgebra aus nilpotenten Endomorphismen. So gilt:

(i) Es gibt eine Kette von Unterräumen

$$0 = V_0 \subseteq V_1 \subseteq V_2 \subseteq \cdots \subseteq V_n = V$$

mit $\dim V_i = i$ und $\mathfrak{g}V_i \subseteq V_{i-1}$ für $i = 1 \dots n$.

(ii) \mathfrak{g} ist nilpotent.

Beweis.

(i) Wir führen den Beweis gleich allgemeiner für jede Darstellung

$$\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \text{gl}(V)$$

einer Lie-Algebra \mathfrak{g} durch nilpotente Endomorphismen eines Vektorraums V .

Mit Hilfe von 1.6.1 finden wir einen Vektor $v \in V$, der von allen Elementen in $\rho(\mathfrak{g})$ annihiliert wird, $\rho(\mathfrak{g})v = 0$. Wir setzen $V_1 = kv$ und betrachten den Quotienten

$$V' = V/V_1.$$

Per Induktion finden wir dort eine Kette

$$0 = V'_0 \subset V'_1 \subset \cdots \subset V'$$

von Unterräumen mit der gewünschten Eigenschaft. Dann leisten die Räume $V_i = \text{can}^{-1}(V'_{i-1})$ das Gewünschte.

(ii) Aus (i) folgt, dass V eine Basis hat, in der \mathfrak{g} durch echte obere Dreiecksmatrizen dargestellt ist. Daraus folgt aber sofort, dass \mathfrak{g} nilpotent ist. \square

Definition 1.6.3.

Ein Element x einer Lie-Algebra \mathfrak{g} heißt ad-nilpotent, wenn ad_x nilpotent ist als Endomorphismus von \mathfrak{g} .

Korollar 1.6.4 (Satz von Engel).

Für eine endlich-dimensionale Lie-Algebra sind äquivalent:

(i) \mathfrak{g} ist nilpotent

(ii) Jedes Element $x \in \mathfrak{g}$ ist ad-nilpotent.

Beweis.

(i) \Rightarrow (ii) folgt aus der Tatsache, dass $\text{ad}_x : \mathfrak{g}^i \rightarrow \mathfrak{g}^{i+1}$ für die Ideale der Zentralreihe gilt, woraus folgt, dass ad_x nilpotent ist, da die Zentralreihe Null erreicht.

(ii) \Rightarrow (i) Aus Korollar 1.6.2 folgt sofort, dass die Lie-Algebra $\text{ad}(\mathfrak{g}) \subseteq \text{End}(\mathfrak{g})$ eine nilpotente Lie-Algebra ist. Wegen der exakten Sequenz

$$Z(\mathfrak{g}) \hookrightarrow \mathfrak{g} \twoheadrightarrow \text{ad}(\mathfrak{g})$$

folgt aus $(\text{ad } \mathfrak{g})^i = 0$ die Inklusion $\mathfrak{g}^i \subseteq Z(\mathfrak{g})$. Dann ist aber $\mathfrak{g}^{i+1} = 0$. \square

Bemerkung 1.6.5.

Aus dem Satz von Engel folgt nicht, dass eine Lie-Algebra $\mathfrak{g} \subseteq \text{gl}(V)$ genau dann nilpotent ist, wenn jedes $x \in \mathfrak{g}$ nilpotent als Endomorphismus von V ist. Sei nämlich x ein halbeinfacher Endomorphismus von V und \mathfrak{g} die x erzeugte ein-dimensionale Lie-Algebra. Diese ist als abelsche Lie-Algebra nilpotent, aber x ist halbeinfacher Endomorphismus. Es gilt dann immer noch $\text{ad}_x = 0$, da \mathfrak{g} abelsch ist, also sind alle Elemente von \mathfrak{g} zwar ad-nilpotent, aber nicht alle nilpotent.

Satz 1.6.6 (Satz von Lie).

Sei V ein von Null verschiedener endlich-dimensionaler komplexer Vektorraum und $\mathfrak{g} \subseteq \text{gl}(V)$ eine auflösbare Unteralgebra. So gibt es einen simultanen Eigenvektor v für alle Endomorphismen aus \mathfrak{g} .

Beweis: übergangen.

Korollar 1.6.7.

Jede einfache endlich-dimensionale Darstellung einer komplexen auflösbaren Lie-Algebra ist ein-dimensional.

Korollar 1.6.8.

Sei V eine endlich-dimensionale Darstellung einer komplexen auflösbaren Lie-Algebra \mathfrak{g} . So gibt es eine Folge von Unterdarstellungen

$$V_0 \subseteq V_1 \subseteq V_2 \subseteq \cdots \subseteq V_n = V$$

mit $\dim V_i = i$.

Der Beweis hierfür läuft analog wie in 1.6.2. Man kann das Resultat auch so ausdrücken: es gibt eine Basis von V , in der \mathfrak{g} durch obere Dreiecksmatrizen operiert.

Korollar 1.6.9.

Ist \mathfrak{g} endlich-dimensionale, auflösbare, komplexe Lie-Algebra, so ist $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ nilpotent. Umgekehrt sind Lie-Algebren, deren derivierte Unter algebra $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ nilpotent ist, auflösbar.

Beweis.

$\text{ad } \mathfrak{g}$ besteht nach Satz 1.6.8 aus oberen Dreiecksmatrizen auf \mathfrak{g} , $[\text{ad } \mathfrak{g}, \text{ad } \mathfrak{g}] = \text{ad } ([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}])$ daher aus echten oberen Dreiecksmatrizen und ist daher nilpotent. Daraus folgt

$$(\text{ad } \mathfrak{g})^i = 0 \quad \text{für } i \text{ groß genug .}$$

Daher liegt $\mathfrak{g}^i \subset Z(\mathfrak{g})$ und somit ist

$$\mathfrak{g}^{i+1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^i] = 0 .$$

Sei umgekehrt die derivierte Lie-Algebra $\mathfrak{h} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ nilpotent. Es gilt stets $\mathfrak{g}^{(i+1)} \subseteq \mathfrak{h}^i$; deswegen folgt aus der Nilpotenz von \mathfrak{h} die Auflösbarkeit von \mathfrak{g} .

2 Komplexe halbeinfache Lie-Algebren

2.1 Das Auflösbarkeitskriterium von Cartan

Wir erinnern zunächst an ein Resultat aus der linearen Algebra:

Lemma 2.1.1 (Jordan-Zerlegung).

Sei V ein endlich-dimensionaler komplexer Vektorraum, $x \in \text{End}(V)$. Dann gibt es genau eine Zerlegung

$$x = x_s + x_n ,$$

wobei x_s ein diagonalisierbarer und x_n ein nilpotenter Endomorphismus ist und beide vertauschen, $x_s x_n = x_n x_s$.

Bemerkung 2.1.2.

(i) x_s steht für halbeinfach. Ein Endomorphismus φ eines k -Vektorraumes V heißt allgemeiner halbeinfach genau dann, wenn er über einem algebraischen Abschluss \bar{k} von k diagonalisierbar ist, d.h. wenn

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} : \bar{k} \otimes_k V &\rightarrow \bar{k} \otimes_k V \\ \bar{\lambda} \otimes v &\mapsto \bar{\lambda} \otimes \varphi(v) \end{aligned}$$

diagonalisierbar ist.

(ii) Man definiert x_s dadurch, dass der Hauptraum von x zum Eigenwert λ

$$\text{Hau}(x, \lambda) = \bigcup_{n \geq 0} \ker(x - \lambda)^n$$

der Eigenraum von x_s zum Eigenwert λ ist.

(iii) In einer Basis von V hat f die Form

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \lambda & 1 & & & & \\ & \lambda & 1 & & & \\ & & \lambda & & & \\ \dots & \dots & \dots & & & \\ & & & \mu & 1 & \\ & & & & \mu & 1 \\ & & & \dots & \dots & \\ & & & & & \ddots \end{array} \right)$$

(iv) Gegeben ein kommutierendes Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \downarrow x & & \downarrow y \\ V & \xrightarrow{f} & W, \end{array}$$

so kommutieren auch die beiden Diagramme, in denen die Endomorphismen x und y durch ihren halbeinfachen bzw. nilpotenten Teil ersetzt werden:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \downarrow x_{s,n} & & \downarrow y_{s,n} \\ V & \xrightarrow{f} & W, \end{array}$$

Denn f erhält die Haupträume:

$$f(\text{Hau}(x, \lambda)) \subset \text{Hau}(y, \lambda).$$

(v) Es wird später sehr wichtig sein, dass der halbeinfache und der nilpotente Teil eines Endomorphismus sich sehr einfach durch den Endomorphismus ausdrücken lassen: Es gibt Polynome $P, Q \in k[X]$ mit

$$P(0) = Q(0) = 0$$

und

$$x_s = P(x) \quad x_n = Q(x).$$

Betrachte hierzu das charakteristische Polynom

$$\chi_x(t) = \det(\text{id} - x) = \prod_i (t - a_i)^{m_i}$$

des Endomorphismus x und wende den chinesischen Restsatz im Polynomring $k[t]$ an, um eine Lösung von der Gleichungen

$$\begin{aligned} P(t) &= a_i \pmod{(t - a_i)^{m_i}} \\ P(t) &= 0 \pmod{t} \end{aligned}$$

zu finden. Setze dann

$$Q(t) = t - P(t).$$

Dann gilt

$$P(x)|_{\text{Hau}(x,\lambda)} = \lambda \text{id}|_{\text{Hau}(x,\lambda)},$$

woraus sofort folgt, dass $x_s = P(x)$ halbeinfach ist. Außerdem folgt

$$Q(x) \text{ (Hau}(x, \lambda)) \subset \text{Hau}(x, \lambda)$$

Ferner gilt auf jedem Hauptraum

$$x - P(x) = x - a_i \pmod{(x - a_i)^m}$$

mit m dem Maximum der m_i , also

$$(x - P(x))^m = (x - a_i)^m = 0 \pmod{(x - a_i)^m},$$

also ist $x_n = x - P(x)$ nilpotent.

- (vi) Eine weitere wichtige Relation betrifft die Zentralisatoren der Endomorphismen in $\text{End}(V)$:

$$Z_{\text{End}(V)}(x) = Z_{\text{End}(V)}(x_s) \cap Z_{\text{End}(V)}(x_n).$$

Aus $x = x_s + x_n$ folgt natürlich sofort die Inklusion $Z(x_s) \cap Z(x_n) \subseteq Z(x)$. Umgekehrt folgt, da $x_s = P(x)$ mit einem Polynom P ohne konstantes Glied, $Z(x_s) \supseteq Z(x)$ und gleichermaßen $Z(x_n) \supseteq Z(x)$, woraus die behauptete Gleichheit folgt.

- (vii) Schließlich werden wir noch die folgende Betrachtung brauchen: seien $A \subset B \subset V$ Unterräume mit $x(B) \subset A$, so gilt auch $x_s(B) \subset A$ und $x_n(B) \subset A$.

Denn offenbar gilt $(x)^i(B) \subset A$ für alle $i \geq 1$. Da P und Q keinen konstanten Term haben, folgt die Behauptung. \square

Lemma 2.1.3.

Ist $x = x_s + x_n$ die Jordan-Zerlegung eines Endomorphismus $x \in \text{End}V$, so ist

$$\text{ad}_x = \text{ad}_{x_s} + \text{ad}_{x_n}$$

die Jordan-Zerlegung von $\text{ad}_x \in \text{End}(\text{gl}(V))$:

$$(\text{ad}_x)_s = \text{ad}_{x_s} \quad \text{und} \quad (\text{ad}_x)_n = \text{ad}_{x_n}.$$

Beweis.

Aus der Jacobi-Identität folgt

$$[\text{ad}_{x_s}, \text{ad}_{x_n}] = \text{ad}_{[x_s, x_n]} = 0$$

so dass die beiden Endomorphismen vertauschen. Im Beweis von Satz 1.6.1 sahen wir, dass ad_{x_n} nilpotent ist. Zu zeigen ist also nur noch, dass ad_{x_s} diagonalisierbar ist. Dazu sei v_i eine Eigenbasis von x_s :

$$x_s v_i = \lambda_i v_i$$

mit $\lambda_i \in k$. Die Basis

$$v_j \otimes v_i^* : v \mapsto v_i^*(v)v_j$$

von $\text{End}(\text{gl}(V))$ ist dann Eigenbasis von ad_{x_s} , denn für alle v_k gilt

$$\begin{aligned} & \text{ad}_{x_s}(v_j \otimes v_i^*)v_k \\ &= x_s \circ (v_j \otimes v_i^*)v_k - (v_j \otimes v_i^*) \circ x_s v_k \\ &= \delta_{ik} x_s(v_j) - \lambda_k (v_j \otimes v_i^*)v_k \\ &= \delta_{ik} (\lambda_j - \lambda_k) v_j \\ &= (\lambda_j - \lambda_i) (v_j \otimes v_i^*)v_k \end{aligned}$$

Also ist

$$\text{ad}_{x_s}(v_j \otimes v_i^*) = (\lambda_j - \lambda_i)(v_j \otimes v_i^*).$$

□

Wir beweisen noch ein etwas technisches Lemma, das uns erlaubt, nilpotente Endomorphismen zu identifizieren:

Lemma 2.1.4.

Sei V ein endlich-dimensionaler komplexer Vektorraum. Seien $A \subset B \subset \text{End}(V)$ Teilräume und sei $x \in \text{End}(V)$ gegeben mit

$$[x, B] \subset A$$

Gilt $\text{tr}(xz) = 0$ für alle $z \in \text{End}(V)$ mit $[z, B] \subset A$, so ist x nilpotent.

Beweis.

Sei $x = x_s + x_n$ die Jordan-Zerlegung von x . Dann ist nach Lemma 2.1.3

$$\operatorname{ad}_x = \operatorname{ad}_{x_s} + \operatorname{ad}_{x_n}$$

die Jordan-Zerlegung von ad_x . Nach Bemerkung 2.1.2 (vii) folgt aus $\operatorname{ad}_x(B) \subset A$ auch

$$\operatorname{ad}_{x_s}(B) \subset A \quad \operatorname{ad}_{x_n}(B) \subset A.$$

Daher liegen alle Eigenräume von ad_{x_s} zu Eigenwerten ungleich Null in A .

Wähle nun in V eine Basis aus Eigenvektoren von x_s . Definiere einen halbeinfachen Endomorphismus $z \in \operatorname{End}(V)$ durch die Bedingung, dass seine Matrix in *dieser* Basis komplex konjugiert zur Matrix von x_s ist. Dann gilt auch

$$[z, B] \subset A,$$

denn in der Eigenbasis $\{v_j \otimes v_i^*\}$ mit Eigenwerten $\lambda_j - \lambda_i$ gilt

$$\operatorname{ad}_z(v_j \otimes v_i^*) = (\bar{\lambda}_j - \bar{\lambda}_i)v_j \otimes v_i^*,$$

also für die Eigenräume:

$$\operatorname{Eig}(\operatorname{ad}_z, \lambda) = \operatorname{Eig}(\operatorname{ad}_{x_s}, \bar{\lambda}).$$

Aus $\operatorname{tr} x_s z = 0$ folgt aber sofort $x_s = 0$. □

Wir können jetzt das Auflösbarkeitskriterium von Cartan beweisen:

Satz 2.1.5 (Cartansches Auflösbarkeitskriterium).

Sei V ein endlich-dimensionaler komplexer Vektorraum und $\mathfrak{g} \subset \operatorname{gl}(V)$ eine Unteralgebra. Dann sind äquivalent

$$(i) \operatorname{tr} xy = 0 \quad \forall x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], y \in \mathfrak{g}$$

(ii) \mathfrak{g} ist auflösbar.

Beweis.

(ii) \Rightarrow (i) folgt aus Korollar 1.6.9, wonach die derivierte Subalgebra $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ einer auflösbaren Lie-Algebra nilpotent ist und somit aus echten oberen Dreiecksmatrizen besteht.

(i)⇒(ii) Da \mathfrak{g} genau dann auflösbar ist, wenn die derivierte Algebra nilpotent ist, reicht es zu zeigen, dass $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ nilpotent ist. Nach Korollar 1.6.2 sollen wir also zeigen, dass alle Elemente $x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ nilpotente Endomorphismen von V sind. Dies folgt aus Lemma 2.1.6, wenn wir zeigen:

$$\operatorname{tr}(xz) = 0 \quad \forall z \in \operatorname{End}(V) \quad \text{mit} \quad [z, \mathfrak{g}] \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}].$$

Dafür schreiben wir $x = \sum_i [c_i, d_i]$ und rechnen

$$\operatorname{tr}(xz) = \sum_i \operatorname{tr}([c_i, d_i]z) = \sum_i \operatorname{tr}(c_i[d_i, z]) = 0,$$

wobei wir im letzten Schritt (i) benutzt haben. \square

Definition 2.1.6.

(i) Sei \mathfrak{g} eine endlich-dimensionale Lie-Algebra über einem Körper k . Die Bilinearform

$$\begin{aligned} \kappa = \kappa_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} &\rightarrow k \\ (x, y) &\mapsto \operatorname{tr}(ad_x \circ ad_y) \end{aligned}$$

heißt die Killingform von \mathfrak{g} .

(ii) Eine Bilinearform

$$b : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow k$$

auf einer Lie-Algebra heißt invariant genau dann, wenn gilt

$$b([x, y], z) = b(x, [y, z])$$

Die Killingform ist offenbar symmetrisch und invariant.

Satz 2.1.7. Sei \mathfrak{g} eine endlich-dimensionale komplexe Lie-Algebra. Verschwindet die Killingform, so ist \mathfrak{g} auflösbar.

Beweis. Nach dem Cartanschen Auflösbarkriterium 2.1.5 ist $\operatorname{ad}(\mathfrak{g})$ auflösbar. Aus der kurzen exakten Sequenz

$$0 \rightarrow Z(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathfrak{g} \rightarrow \operatorname{ad}(\mathfrak{g}) \rightarrow 0$$

folgt, dass auch \mathfrak{g} als Erweiterung zweier auflösbarer Lie-Algebren auflösbar ist. \square

Zur Umkehrung dieses Satzes werden wir später kommen.

2.2 Halbeinfache Lie-Algebren

Lemma 2.2.1.

Eine Lie-Algebra \mathfrak{g} ist genau dann halbeinfach, wenn sie kein von Null verschiedenes abelsches Ideal besitzt.

Beweis.

Nach Definition war \mathfrak{g} halbeinfach, wenn $\text{rad } \mathfrak{g} = 0$, also \mathfrak{g} kein auflösbares Ideal besitzt. Hat \mathfrak{g} ein abelsches Ideal, so ist dieses auflösbar. Also kann \mathfrak{g} nicht halbeinfach sein.

Habe umgekehrt \mathfrak{g} kein abelsches Ideal. Wäre $\text{rad } \mathfrak{g} \neq (0)$, so sähe seine abgeleitete Reihe so aus

$$\text{rad } \mathfrak{g} = \mathfrak{h} \supseteq \mathfrak{h}^{(1)} \supseteq \dots \supseteq \mathfrak{h}^{(k)} \supseteq 0$$

und $\mathfrak{h}^{(k)}$ wäre ein abelsches Ideal in \mathfrak{g} . \square

Dies motiviert die folgende Begriffsbildung:

Definition 2.2.2. Eine Lie-Algebra \mathfrak{g} heißt reduktiv, wenn sie endliche Dimension hat und jedes auflösbare Ideal zentral ist:

$$I \subset \mathfrak{g} \text{ auflösbares Ideal} \Rightarrow [\mathfrak{g}, I] = 0.$$

- Halbeinfache Lie-Algebren sind insbesondere reduktiv.
- Eine von Null verschiedene abelsche Lie-Algebra ist reduktiv, aber nicht halbeinfach.

Beispiele für reduktive und halbeinfache Lie-Algebren wird uns der folgende Satz liefern:

Satz 2.2.3.

- Besitzt die komplexe Lie-Algebra \mathfrak{g} eine treue einfache endlich-dimensionale Darstellung V , so ist \mathfrak{g} reduktiv und das Zentrum von \mathfrak{g} ist höchstens ein-dimensional.
- Operiert außerdem \mathfrak{g} auf V durch Endomorphismen der Spur Null, so ist \mathfrak{g} halbeinfach.

Beweis.

- Sei I auflösbares Ideal von \mathfrak{g} . Nach dem Satz von Lie 1.6.6 gibt es einen nicht-verschwindenden Vektor $v \in V$, der gemeinsamer Eigenvektor für die Elemente von I ist:

$$Xv = \lambda(X)v$$

für alle $X \in I$ mit einer Linearform $\lambda \in I^*$.

- Wir definieren nun eine aufsteigende Folge

$$V_i = \text{span}_{\mathbb{C}}(Y_1 \dots Y_i v \quad \text{mit } Y_i \in \mathfrak{g})$$

von Teilräumen von V .

Da V endlich-dimensional ist, muss diese Folge irgendwann einmal stationär werden. Die entsprechenden Folgenglieder wären dann eine Unterdarstellung von V , aber V soll auch einfach sein. Also gilt $V_i = V$ für i groß genug.

Durch Induktion nach i zeigen wir nun: für $w \in V_i$ und $X \in I$ gilt

$$Xw \in \lambda(X)w + V_{i-1}$$

Denn es gilt:

$$XYw = [X, Y]w + YXw \in \lambda([X, Y])w + \lambda(X)Yw + YV_{i-1} \subseteq \lambda(X)Yw + V_i$$

für alle $w \in V_i$, wobei wir bei der Inklusion die Induktionsvoraussetzung angewandt haben. Wir schliessen daraus, dass es im Darstellungsraum eine Basis gibt, in der alle $X \in I$ durch obere Dreiecksmatrizen operieren, deren Diagonalelemente alle gleich $\lambda(X)$ sind.

- Für $x \in [\mathfrak{g}, I]$ ist $\text{tr } \rho(x) = 0$, da die Spur eines Kommutators verschwindet. Daher ist

$$\lambda|_{[\mathfrak{g}, I]} = 0.$$

Wir können jetzt unseren Induktionsbeweis im vorigen Schritt verschärfen und behaupten

$$Xw = \lambda(X)w.$$

Denn die Behauptung gilt für $I = V_0$, dann rechnen wir mit $Y \in \mathfrak{g}$ und $w \in V_i$

$$XYw = [X, Y]w + YXw = (\lambda[X, Y] + \lambda(X)Y)w = \lambda(X)Yw.$$

- Bei einer einfachen Darstellung

$$\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}} V$$

auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum V liegt also $\rho(I)$ in den Diagonalmatrizen für jedes auflösbare Ideal I . Da die Darstellung ρ treu sein soll, folgt $\dim I \leq 1$, und ausserdem $[I, \mathfrak{g}] = 0$, so dass \mathfrak{g} reduktiv ist. Gilt überdies $\text{tr}_V \rho(I) = 0$, so ist sogar $I = 0$ und \mathfrak{g} halbeinfach. \square

Korollar 2.2.4.

- $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ ist reduktiv. Die skalaren Vielfachen der Identität bilden das (ein-dimensionale) Zentrum.
- $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ ist halbeinfach. Später werden wir sehen, dass diese Lie-Algebra sogar einfach ist.

Lemma 2.2.5.

Ist \mathfrak{g} eine endlich-dimensionale Lie-Algebra und $I \subset \mathfrak{g}$ ein Ideal, so ist die Killingform der Lie-Algebra I genau die Einschränkung auf I der Killingform von \mathfrak{g} :

$$\kappa_I = \kappa_{\mathfrak{g}}|_I.$$

Beweis.

Sind $I \subset \mathfrak{g}$ irgendein Vektorraum mit Untervektorraum und ist $a : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ eine lineare Abbildung mit $a(\mathfrak{g}) \subset I$, so gilt

$$\text{tr } a = \text{tr } a|_I.$$

Setze nun $a = \text{ad}_x \circ \text{ad}_y$ für $x, y \in I$. \square

Satz 2.2.6.

Für eine endlich-dimensionale Lie-Algebra sind äquivalent

- (i) \mathfrak{g} ist halbeinfach
- (ii) \mathfrak{g} ist isomorph zu einem Produkt von einfachen Lie-Algebren
- (iii) \mathfrak{g} ist die direkte Summe seiner einfachen Ideale.
- (iv) Die Killingform von \mathfrak{g} ist nicht entartet.

Beweis.

(i) \Rightarrow (iv) Für eine komplexe, endlich-dimensionale Lie-Algebra \mathfrak{g} definieren wir das Radikal der Killingform als

$$\text{rad}_\kappa = \{x \in \mathfrak{g} \mid \kappa(x, y) = 0 \quad \forall y \in \mathfrak{g}\}$$

Da κ invariant ist, ist rad_κ ein Ideal: ist $x \in \text{rad}_\kappa$ und $y, z \in \mathfrak{g}$, so ist

$$\kappa([x, y], z) = \kappa(x, [y, z]) = 0.$$

Wegen Lemma 2.2.5 ist die Killingform von rad_κ Null, nach dem Cartanschen Auflösbarkeitskriterium 2.1.5 ist daher rad_κ auflösbar. Ist die Lie-Algebra \mathfrak{g} halbeinfach, so hat sie keine auflösbaren Ideale, also folgt $\text{rad}_\kappa = 0$ und κ ist nicht entartet.

(iv) \Rightarrow (i) Ist \mathfrak{g} nicht halbeinfach, so gibt es ein abelsches Ideal $I \neq 0$. Dann gilt für $x \in \mathfrak{g}, y \in I$

$$(\text{ad}_x \circ \text{ad}_y)^2 = 0,$$

d.h. $\text{ad}_x \circ \text{ad}_y$ ist nilpotent. Es folgt

$$\kappa(x, y) = \text{tr}(\text{ad}_x \circ \text{ad}_y) = 0$$

und somit

$$I \subset \text{rad}_\kappa,$$

d.h. κ ist entartet.

(i) \Rightarrow (iii) Sei $I \subset \mathfrak{g}$ ein Ideal. Da die Killingform invariant ist, ist auch

$$I^\perp = \{y \in \mathfrak{g} \mid \kappa(y, I) = 0\}$$

ein Ideal. Wegen

$$\kappa_{I \cap I^\perp} = 0$$

ist das Ideal $I \cap I^\perp$ auflösbar. Da \mathfrak{g} halbeinfach ist, folgt $I \cap I^\perp = 0$ und nach Lemma 1.5.4 (iv) erst recht

$$[I, I^\perp] = 0.$$

Eine Dimensionsbetrachtung mit der nach (iv) nicht-entarteten Killingform zeigt, dass

$$\mathfrak{g} = I \oplus I^\perp.$$

Jedes Ideal von I oder I^\perp ist daher Ideal von \mathfrak{g} , also sind auch I und I^\perp halbeinfach. Wir können daher das Argument iterieren und finden eine Zerlegung

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_i I_i$$

von \mathfrak{g} als Summe über einfache Ideale. (Dies ist eine direkte Summe von Lie-Algebren, nicht nur von Vektorräumen!)

Bemerkung: Ist I ein weiteres einfaches Ideal von \mathfrak{g} , so ist

$$I = [I, \mathfrak{g}] = \bigoplus_i [I, I_i]$$

und $[I, I_\nu]$ entweder gleich I_ν oder Null. Also tritt jedes einfache Ideal von \mathfrak{g} in der Zerlegung auf, $I = I_i$ für ein i .

(iii) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (i) als Übung. □

Bemerkungen 2.2.7.

(i) Eine Lie-Algebra \mathfrak{g} ist reduktiv genau dann, wenn sie direkte Summe einer abelschen und einer halbeinfachen Lie-Algebra ist.

(ii) Diese Zerlegung ist eindeutig.

$$\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \oplus Z(\mathfrak{g})$$

mit $Z(\mathfrak{g})$ dem Zentrum von \mathfrak{g} .

(iii) Insbesondere gilt für jede halbeinfache Lie-Algebra $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Lie-Algebren mit dieser Eigenschaft werden auch perfekt genannt. Ein Beispiel für eine perfekte Lie-Algebra, die nicht halbeinfach ist, und auch nicht reduktiv, ist die Poincaré-Algebra der Translationen und Rotationen eines (pseudo-)euklidischen Vektorraums.

(iv) Das Radikal der Killingform $\mathfrak{r} := \text{rad } \kappa_{\mathfrak{g}}$ ist nach Satz 2.2.6 ein auflösbares Ideal. Man kann zeigen, dass für jede Lie-Algebra die Killingform des Quotienten $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ nicht-ausgeartet ist, der Quotient also eine halbeinfache Lie-Algebra ist. Sei can die kanonische Surjektion von \mathfrak{g} auf $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$; wegen $\mathfrak{r} \subseteq \text{rad } \mathfrak{g}$ ist das Bild $\text{can}(\text{rad } \mathfrak{g})$ ein auflösbares Ideal der halbeinfachen Lie-Algebra $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$, also Null. Es folgt $\mathfrak{r} = \text{rad } \mathfrak{g}$. Insbesondere ist \mathfrak{g} genau dann auflösbar, wenn $\mathfrak{g} = \text{rad } \mathfrak{g} = \mathfrak{r}$, also wenn $\kappa_{\mathfrak{g}} = 0$ gilt.

Beweis. als Übung.

2.3 Der Satz von Weyl

Für Darstellungen V, W einer Lie-Algebra \mathfrak{g} bezeichne $\text{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, W)$ den Raum aller Homomorphismen von Darstellungen. Wir setzen $\text{End}_{\mathfrak{g}}(V) = \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, V)$.

Lemma 2.3.1 (Schursches Lemma).

Ist V eine einfache Darstellung endlicher Dimension einer komplexen Lie-Algebra \mathfrak{g} , so gilt

$$\text{End}_{\mathfrak{g}}V = \mathbb{C} \text{id}_V$$

(Diese Aussage gilt sogar dann noch, wenn V oder \mathfrak{g} abzählbare Dimension haben.)

Beweis.

Sei $\varphi \in \text{End } V$. Da V nicht der Nullraum ist, hat φ mindestens einen Eigenwert λ . Aus $\varphi \in \text{End}_{\mathfrak{g}}V$ folgt, dass der Eigenraum V_{λ} eine Unterdarstellung ist:

$$\varphi v = \lambda v \Rightarrow \varphi xv = xv\varphi = \lambda xv$$

für alle $x \in \mathfrak{g}$. Da V einfach ist, gibt es keine echten Unterdarstellungen, also gilt $V = V_{\lambda}$, also $\varphi = \lambda \text{id}_V$. \square

Bemerkung 2.3.2.

Das Schursche Lemma kann allgemeiner formuliert werden: seien V, W Darstellungen einer Lie-Algebra über einem Körper k , der nicht notwendigerweise algebraisch abgeschlossen ist. Sei $\varphi \in \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, W)$ ein Morphismus von Darstellungen.

- (i) Ist V einfach, so ist φ injektiv oder null. Denn $\ker \varphi$ ist Unterdarstellung von V .*
- (ii) Ist W einfach, so ist φ surjektiv oder null. Denn $\text{im} \varphi$ ist Unterdarstellung von W .*
- (iii) $\text{End}_{\mathfrak{g}}(V)$ ist Divisionsalgebra über k . Denn $\varphi \in \text{End}_{\mathfrak{g}}(V)$ ist entweder Null oder Isomorphismus, also hat jedes von Null verschiedene Element ein Inverses.*

Definition 2.3.3.

Eine Darstellung V heißt halbeinfach genau dann, wenn V direkte Summe einfacher Unterdarstellungen ist

$$V = \bigoplus_{i \in I} V_i \quad \text{mit } V_i \text{ einfach .}$$

Bemerkung: Die null-dimensionale Darstellung $V = 0$ ist halbeinfach als die "leere Summe".

Satz 2.3.4.

(i) Ist V halbeinfach, so besitzt jede Unterdarstellung U ein Komplement W , d.h. es gibt eine Unterdarstellung $W \subset V$ mit

$$U \oplus W = V$$

(ii) Quotienten und Unterdarstellungen einfacher Darstellungen sind halbeinfach.

Beweis.

(i) Sei V direkte Summe von einfachen Unterdarstellungen, also $V = \bigoplus_{i \in I} V_i$ mit V_i einfach. Für jede Untermenge $J \subset I$ setze $V_J = \bigoplus_{i \in J} V_i$. Die Menge

$$\mathcal{M} = \{J \subseteq I \mid V_J \cap U = 0\}$$

ist dann durch Inklusion induktiv geordnet. Nach dem Zornschen Lemma besitzt \mathcal{M} ein maximales Element J . Wir behaupten, dass dann $V = U \oplus V_J$.

Denn wäre $U + V_J \subsetneq V$, so gäbe es einen Index i mit der Eigenschaft, dass $V_i \subsetneq U + V_J$. Da V_i einfache Darstellung ist, gilt $V_i \cap (U + V_J) = 0$. Dann ist aber auch

$$(V_i + V_J) \cap U = 0,$$

im Widerspruch zur Maximalität von J .

(ii) Aus (i) folgt, dass der Quotient $V/U \cong V_J$ nach einer Unterdarstellung halbeinfach ist, und damit ist wegen $U \cong V/W$ auch die Unterdarstellung U halbeinfach.

Beispiel 2.3.5.

(i) Die zwei-dimensionale Darstellung

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\rightarrow \mathfrak{gl}(\mathbb{C}^2) \\ 1 &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

der abelschen Lie-Algebra \mathbb{C} ist nicht halbeinfach.

(ii) Allgemeiner sei $\mathfrak{g} = k$ die ein-dimensionale abelsche Lie-Algebra über den Körper k und V ein k -Vektorraum. Die Darstellung

$$\begin{aligned} k &\rightarrow \mathfrak{gl}(V) \\ 1 &\mapsto a \end{aligned}$$

ist halbeinfach genau dann, wenn der Endomorphismus a halbeinfach ist im Sinne von Bemerkung 2.1.2(i).

Wir wollen nun den folgenden Satz zeigen:

Satz 2.3.6 (Satz von Weyl).

Jede endlich-dimensionale Darstellung einer komplexen, halbeinfachen Lie-Algebra ist halbeinfach.

Dieser Satz reduziert das Studium der endlich-dimensionalen Darstellungen komplexer halbeinfacher Lie-Algebren auf das Studium der *einfachen* Darstellungen. Deren Klassifikation wird in Kapitel 4 skizziert werden.

Unser Beweis braucht einige Hilfsmittel. Wir werden nicht den ursprünglichen Beweis von Weyl vorstellen, der die zugehörigen kompakten Lie-Gruppen benutzt. Die Beweistechnik von Weyl, der sogenannte Unitaritätstrick hat aber den Vorteil, folgendes für Physiker interessante Resultat zu zeigen:

Satz 2.3.7.

Sei V eine Darstellung einer komplexen, halbeinfachen Lie-Algebra auf einem Hilbert Raum V durch unitäre Operatoren. Dann ist V halbeinfach und die Zerlegung

$$V = \bigoplus_i V_i$$

orthogonal.

Definition 2.3.8.

(i) Für eine Darstellung V einer Lie-Algebra \mathfrak{g} setzen wir

$$V^{\mathfrak{g}} = \{v \in V \mid xv = 0 \quad \forall x \in \mathfrak{g}\}$$

Die Elemente von $V^{\mathfrak{g}}$ heißen invariante Vektoren von V . Invariante Vektoren werden in der physikalischen Literatur auch Singletts genannt.

(ii) Die Elemente des Quotientenraums

$$V_{\mathfrak{g}} := V/\text{im}(\mathfrak{g})V$$

heißten Koinvarianten von V bezüglich \mathfrak{g} . Der Quotientenraum der Koinvarianten ist natürlich eine \mathfrak{g} -Darstellung mit trivialer Wirkung.

Lemma 2.3.9.

Seien V, W Darstellungen einer Lie-Algebra \mathfrak{g} .

(i) Der Raum aller linearen Abbildungen $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$ wird eine Darstellung durch die Vorschrift

$$xf(v) = xf(v) - f(xv) \quad \forall x \in \mathfrak{g}, v \in V \quad f \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$$

(ii) Mit dieser Operation von \mathfrak{g} auf dem Homomorphismenraum gilt

$$\text{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, W) = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)^{\mathfrak{g}}$$

Beweis.

- (i) folgt durch Nachrechnen.
- (ii) Beide Räume sind gleich dem Vektorraum

$$\{f \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W) \mid xf(v) = f(xv) \quad \forall x \in \mathfrak{g}, v \in V\}.$$

□

Bemerkung 2.3.10.

(i) Wählt man speziell für W die triviale Darstellung, $W = \mathbb{C}$, so erhält man eine \mathfrak{g} -Darstellung auf dem Dualraum

$$V^* = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C}),$$

die kontragrediente Darstellung.

(ii) Wählt man speziell für V die triviale Darstellung, $V = \mathbb{C}$, so liefert die offensichtliche Abbildung

$$\begin{aligned} W &\rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}, W) \\ w &\mapsto (\lambda \mapsto \lambda w) \end{aligned}$$

einen Isomorphismus von Darstellungen.

(iii) Sei $\lambda : \mathfrak{g} \rightarrow k$ eine ein-dimensionale Darstellung. So ist die kontragrediente Darstellung gegeben durch $-\lambda$.

(iv) Alle endlich-dimensionalen Darstellungen von $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ sind selbstdual, d.h. isomorph zu ihrer kontragredienten Darstellung.

Sei nun \mathfrak{g} eine endlich-dimensionale Lie-Algebra und

$$b : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow k$$

eine nicht-ausgeartete invariante Bilinearform. Für jede Darstellung V von \mathfrak{g} definieren wir eine lineare Selbstabbildung

$$C_b = C_b^V : V \rightarrow V$$

wie folgt: wähle eine Basis $\{x_1, \dots, x_n\}$ von \mathfrak{g} , sei $\{x^1, \dots, x^n\}$ die bezüglich der Bilinearform b duale Basis,

$$b(x_i, x^j) = \delta_i^j,$$

und setze

$$C_b(v) = \sum_{i=1}^n x_i x^i v$$

Lemma 2.3.11.

- (i) Die Abbildung C_b hängt nicht von der Wahl der Basis von \mathfrak{g} ab. Wenn die Lie-Algebra \mathfrak{g} halbeinfach ist und $b = \kappa_{\mathfrak{g}}$ die Killingform ist, so heißt C_{κ} auch der (quadratische) Casimir-Operator.
- (ii) Der Vektorraum-Endomorphismus C_b vertauscht mit der Wirkung von \mathfrak{g} , in Formeln $C_b \in \text{End}_{\mathfrak{g}}(V)$.

Beweis.

- (i) durch Nachrechnen.
- (ii) Rechnen wir in Koordinaten nach: für $y \in \mathfrak{g}$ entwickeln wir die folgenden Lie-Klammern in den entsprechenden Basen:

$$[x_i, y] = \sum_j a_{ij} x_j \quad [y, x^j] = \sum_i b_{ji} x^i.$$

Aus der Invarianz der Bilinearform b folgt

$$a_{ij} = b([x_i, y], x^j) = b(x_i, [y, x^j]) = b_{ji}.$$

Diese Identität benutzen wir im letzten Schritt der folgenden Rechnung:

$$\begin{aligned} yC_b v - C_b y v &= \sum_i [y, x_i] x^i v + \sum_i x_i [y, x^i] v \\ &= \sum_i -a_{ij} x_j x^i v + \sum_i b_{ij} x_i x^j v \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

Problem 2.3.12.

Seien V und W zwei Darstellungen einer Lie-Algebra \mathfrak{g} . Durch die Vorschrift

$$x(v \otimes w) = (xv) \otimes w + v \otimes (xw)$$

für $x \in \mathfrak{g}$ wird, wie man leicht nachrechnet, das Tensorprodukt $V \otimes W$ zu einer \mathfrak{g} -Darstellung, der Tensorproduktdarstellung. Sei nun V ein endlich-dimensionaler Vektorraum. Auf der Lie-Algebra $\text{End}(V)$ ist

$$(x, y, \mapsto \text{tr}(xy))$$

eine invariante nicht-entartete Bilinearform. Sei

$$\Omega \in \text{End}(V) \otimes \text{End}(V) \cong \text{End}(V \otimes V)$$

der zugehörige Casimir-Operator. Man zeige, dass er als Endomorphismus von $V \otimes V$ durch Vertauschung der Faktoren wirkt.

Lemma 2.3.13.

- (i) Ist V ein endlich-dimensionaler k -Vektorraum und $\mathfrak{g} \subset \text{gl}(V)$ eine halbeinfache Unter algebra, so ist

$$(x, y) \mapsto \text{tr}_V xy$$

eine nicht ausgeartete invariante symmetrische Bilinearform $b = b_V$ auf \mathfrak{g} .

- (ii) Für den zugehörigen Endomorphismus gilt

$$\text{tr } C_b = \dim \mathfrak{g}.$$

Beweis.

- (i) Die zyklische Invarianz der Spur impliziert, dass die Bilinearform b symmetrisch und invariant ist. Daraus folgt, dass das Radikal $\text{rad}(b_V)$ ein Ideal ist. Nach dem Auflösbarkeitskriterium von Cartan 2.1.5 ist dieses Ideal sogar auflösbar, also Null, da \mathfrak{g} halbeinfach sein soll. Also ist die Bilinearform auch nicht ausgeartet.
- (ii) Die Spur von C_b berechnen wir mit Hilfe einer Basis $\{x^i\}$ von \mathfrak{g} :

$$\text{tr } C_b = \sum_{i=1}^{\dim \mathfrak{g}} \text{tr}(x_i x^i) = \dim \mathfrak{g}.$$

Lemma 2.3.14.

Sei (V, ρ) eine endlich-dimensionale Darstellung einer komplexen halbeinfachen Lie-Algebra \mathfrak{g} . Dann gilt

$$V = V^{\mathfrak{g}} \oplus \mathfrak{g}V.$$

Das heißt, dass in diesem Fall wegen $V/\mathfrak{g}V \cong V^{\mathfrak{g}}$ Invarianten und Koinvarianten identifiziert werden können.

Beweis.

durch Induktion nach $\dim V$. Der Induktionsanfang $\dim V = 1$ wird durch die Aussage geliefert, dass eine halbeinfache Lie-Algebra nur eine ein-dimensionale Darstellung besitzt, nämlich die triviale Darstellung: nach Beispiel 1.3.4 sind die ein-dimensionalen Darstellungen in Bijektion zu $(\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}])^*$, wegen Bemerkung 2.2.7 ist aber dieser Raum null-dimensional.

Zum Induktionsschritt: da im Falle $V = V^{\mathfrak{g}}$ nichts mehr zu beweisen ist, nehmen wir $V \neq V^{\mathfrak{g}}$ an. Das Bild $\rho(\mathfrak{g})$ von \mathfrak{g} unter der Darstellungsabbildung

$$\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$$

ist also eine nicht-triviale halbeinfache Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(V)$. Wir betrachten daher die Bilinearform und die lineare Selbstabbildung C_b von V wie in Lemma 2.3.13:

$$C_b : V \rightarrow V.$$

Der Vektorraum V zerfällt dann in die direkte Summe der Haupträume von C_b , die wegen $[\mathfrak{g}, C_b] = 0$ Unterdarstellungen von V sind. Wir stehen nun vor der folgenden Alternative:

- C_b hat mehr als einen Eigenwert. Dann aber lässt sich V als direkte Summe von Unterdarstellungen schreiben, auf die wir die Induktionsannahme anwenden können.
- C_b hat einen einzigen Eigenwert. Wegen 2.3.13 (ii) gilt

$$\mathrm{tr}_V C_b = \dim \rho(\mathfrak{g}) \neq 0.$$

Also ist dieser Eigenwert ungleich Null, es gilt $V = C_b V$, und damit gilt erst recht $V = \mathfrak{g}V$. \square

Wir können jetzt den Satz 2.3.6 von Weyl zeigen, nämlich dass jede endlich-dimensionale Darstellung V einer komplexen halbeinfachen Lie-Algebra halbeinfach ist.

Beweis. Sei $U \in V$ Unterdarstellung. Die Restriktion liefert eine Surjektion von Darstellungen

$$\mathrm{Hom}(V, U) \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}(U, U)$$

Wegen Lemma 2.3.14 gibt dies durch Einschränkung eine Surjektion auf den invarianten Vektoren der beiden Darstellungen

$$\mathrm{Hom}(V, U)^{\mathfrak{g}} \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}(U, U)^{\mathfrak{g}}.$$

Die Tatsache, dass dies eine Surjektion ist, erlaubt es, ein Urbild $f \in \mathrm{Hom}(V, U)^{\mathfrak{g}}$ der Identität $\mathrm{id}_U \in \mathrm{Hom}(U, U)^{\mathfrak{g}}$ zu finden.

Damit gilt dann aber die folgende Zerlegung als direkte Summe von Darstellungen: $V = U \oplus \ker f$.

- Offenbar ist $\ker f$ eine Unterdarstellung von V .
- $U \cap \ker f = 0$, denn $v \in U \cap \ker f$ impliziert $0 = fv = v$.
- Die Summe von U und $\ker f$ ist V : Schreibe $v \in V$ als Summe $v = (v - fv) + fv$. Dann ist $fv \in U$ und

$$f(v - fv) = fv - fv = 0.$$

Nun zerlegt man induktiv die Darstellung V weiter, bis man irreduzible Darstellungen erreicht. \square

2.4 Die Jordan-Zerlegung einer halbeinfachen Lie-Algebra

Ziel dieses Abschnitts ist der Beweis der folgenden Aussage über halbeinfache Lie-Algebren, die zentral für das Verständnis ihrer Struktur sein wird.

Satz 2.4.1.

Sei \mathfrak{g} eine halbeinfache Lie-Algebra über \mathbb{C} .

- (i) Jedes Element $x \in \mathfrak{g}$ besitzt genau eine Zerlegung als Summe

$$x = s + n,$$

so dass ad_s ein diagonalisierbarer Endomorphismus von \mathfrak{g} ist, ad_n ein nilpotenter Endomorphismus von \mathfrak{g} ist und $[s, n] = 0$ gilt.

Diese Zerlegung heißt die absolute Jordan-Zerlegung eines Elements einer halbeinfachen Lie-Algebra, im Gegensatz zur konkreten Jordan-Zerlegung eines Endomorphismus eines Vektorraums aus Lemma 2.1.1.

- (ii) Sei $\rho = \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ eine endlich-dimensionale Darstellung der halbeinfachen Lie-Algebra \mathfrak{g} und sei $x = s + n$ die absolute Jordan-Zerlegung eines Elements x von \mathfrak{g} . Dann ist

$$\rho(x) = \rho(s) + \rho(n)$$

die konkrete Jordan-Zerlegung des Endomorphismus $\rho(x)$ in $\text{End}(V)$.

- (iii) Sei $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$ ein Homomorphismus von der halbeinfachen Lie-Algebra \mathfrak{g} in eine andere halbeinfache Lie-Algebra \mathfrak{g}' . Ist $x = s + n$ die absolute Jordan-Zerlegung von x in \mathfrak{g} , so ist

$$\phi(x) = \phi(s) + \phi(n)$$

die absolute Jordan-Zerlegung von $\phi(x)$ in \mathfrak{g}' .

Zum Beweis dieses Satzes brauchen wir zwei Lemmata:

Lemma 2.4.2.

Sei D eine endlich-dimensionale komplexe Lie-Algebra und $\mathfrak{g} \subset D$ ein halbeinfaches Ideal von D . Dann gibt es ein Ideal $I \subset D$, so dass sich D als direkte Summe schreiben lässt, $D = \mathfrak{g} \oplus I$.

Beweis.

Sei I das orthogonale Komplement von \mathfrak{g} bezüglich der Killingform. I ist ein Ideal von D . Die Killingform verschwindet identisch auf dem Ideal $\mathfrak{g} \cap I$ von \mathfrak{g} ; aus der Halbeinfachheit von \mathfrak{g} folgt daher, dass $\mathfrak{g} \cap I = 0$.

Aus der allgemeinen Dimensionsformel für orthogonale Komplemente (vgl. etwa Lorenz, Lineare Algebra II, p.26) folgt

$$\dim \mathfrak{g} + \dim I \geq \dim D,$$

so dass $D = \mathfrak{g} \oplus I$. □

Lemma 2.4.3.

Sei V ein endlich-dimensionaler komplexer Vektorraum und $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ eine halbeinfache Unteralgebra. Sei

$$x = x_s + x_n$$

die konkrete Jordan-Zerlegung von $x \in \text{End}(V)$. Dann folgt aus $x \in \mathfrak{g}$ auch $x_s, x_n \in \mathfrak{g}$.

Bemerkung: die Aussage ist im allgemeinen falsch, wenn \mathfrak{g} nicht halbeinfach ist: betrachte die folgende ein-dimensionale Lie-Algebra

$$\mathfrak{g} = \left\{ x = \left(\begin{array}{c|cc} z & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \in \mathfrak{gl}(3, \mathbb{C}), z \in \mathbb{C} \right\}.$$

Dann ist die (konkrete) Jordan-Zerlegung

$$x_s = \begin{pmatrix} z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad x_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

weder x_s noch x_n sind in \mathfrak{g} .

Beweis.

- Ein wichtiger Schritt ist es, eine gute Charakterisierung von \mathfrak{g} in $\mathfrak{gl}(V)$ zu finden. Wir zeigen daher zunächst, dass \mathfrak{g} gleich der Lie-Algebra

$$N := N_{\mathfrak{gl}(V)}(\mathfrak{g}) \cap \bigcap_{\substack{W \subseteq V \\ \mathfrak{g}\text{-Submodul}}} SN_{\mathfrak{gl}(V)}(W)$$

ist, wobei wir definieren

$$\begin{aligned} N_{\mathfrak{gl}(V)}(\mathfrak{g}) &= \{y \in \mathfrak{gl}(V) \mid [y, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{g}\} \\ SN_{\mathfrak{gl}(V)}(W) &= \{y \in \mathfrak{gl}(V) \mid y(W) \subseteq W \text{ und } \text{tr}_{|W} y = 0\} \end{aligned}$$

Dazu zeigen wir zwei Inklusionen:

“ \subseteq ” $\mathfrak{g} \subset N_{\mathfrak{gl}(V)}(\mathfrak{g})$ ist eine offensichtliche Folge der Tatsache, dass \mathfrak{g} eine Lie-Algebra ist. Ebenso folgt für $y \in \mathfrak{g}$ die Inklusion $yW \subseteq W$ aus der Tatsache, dass W eine \mathfrak{g} -Unterdarstellung ist. Wegen 2.2.7 (ii) gilt $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, also kann $y \in \mathfrak{g}$ man schreiben als Summe von Lie-Klammern:

$$y = \sum_i [x'_i, x''_i] \quad \text{mit } x'_i, x''_i \in \mathfrak{g}.$$

Daher gilt auch $\text{tr}_{|W} y = 0$.

“ \supseteq ” Finde mit Lemma 2.4.2 ein Ideal I , so dass

$$N = I \oplus \mathfrak{g}$$

gilt. Insbesondere gilt

$$[\mathfrak{g}, I] = 0,$$

also operiert jedes $y \in I$ auf jedem \mathfrak{g} -Untermodule W durch einen \mathfrak{g} -Endomorphismus $y|_W$. Für einen einfachen Untermodule W operiert y also als Skalar und wegen $\text{tr } y|_W = 0$ folgt $y|_W = 0$. Da V wegen des Satzes 2.3.6 von Weyl direkte Summe einfacher \mathfrak{g} -Darstellungen ist, folgt $y = 0$, also $I = 0$.

- Wir zeigen als nächstes, dass mit $x \in N_{\text{gl}(V)}(\mathfrak{g})$ auch der halbeinfache und der nilpotente Anteil von x in $N_{\text{gl}(V)}(\mathfrak{g})$ liegen, $x_s, x_n \in N_{\text{gl}(V)}(\mathfrak{g})$. In der Tat ist $x \in N_{\text{gl}(V)}(\mathfrak{g})$ äquivalent zu $\text{ad}_x(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{g}$. Bemerkung 2.1.2 (vii) impliziert, dass dann auch gilt

$$(\text{ad}_x)_{s,n}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{g}$$

Nach Lemma 2.1.3 gilt aber

$$(\text{ad}_x)_s = \text{ad}_{x_s},$$

also gilt $(\text{ad}_x)_s(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{g}$, und daher $x_s \in N_{\text{gl}(V)}(\mathfrak{g})$. Der Beweis für den nilpotenten Anteil x_n ist parallel.

- Schließlich zeigen wir noch, dass aus $x \in SN_{\text{gl}(V)}(W)$ folgt, dass $x_s, x_n \in SN_{\text{gl}(V)}(\mathfrak{g})$. Denn x_s und x_n lassen sich als Polynom ohne konstantes Glied in x schreiben, also gilt $x_{s,n}(W) \subset W$. Ferner ist $\text{tr } x_n = 0$, und somit folgt auch $\text{tr } x_s = \text{tr } (x - x_n) = 0$. Also gilt $x_s, x_n \in \mathfrak{g}$ □.

Beweis. von Satz 2.4.1

- (i) Wir betrachten zunächst die konkrete Jordan-Zerlegung des Endomorphismus ad_x auf dem Vektorraum \mathfrak{g} :

$$\text{ad}_x = (\text{ad}_x)_s + (\text{ad}_x)_n \quad \text{in } \text{End } \mathfrak{g}.$$

Wir können jetzt Lemma 2.4.2 auf die Unter algebra $\text{ad } \mathfrak{g}$ von $\text{gl}(\mathfrak{g})$ anwenden: demnach gibt es Elemente $s, n \in \mathfrak{g}$ mit

$$\text{ad}_s = (\text{ad}_x)_s \quad \text{ad}_n = (\text{ad}_x)_n.$$

Nun ist aber $x = n + s$, denn $x - n - s$ hätte triviale adjungierte Wirkung, wäre also im Zentrum von \mathfrak{g} , was aber trivial ist, da

\mathfrak{g} halbeinfach ist. Damit ist die Existenz einer absoluten Jordan-Zerlegung gezeigt.

Die Eindeutigkeit einer solchen Zerlegung ist auch klar, da für jede absolute Jordan-Zerlegung $x = s + n$, die Zerlegung

$$\text{ad}_x = \text{ad}_s + \text{ad}_n$$

eine konkrete Jordan-Zerlegung von ad_x in $\text{End}(\mathfrak{g})$ ist, und diese eindeutig ist.

- (ii) Sei nun $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \text{gl}(V)$ eine endlich-dimensionale \mathfrak{g} -Darstellung. Betrachte das kommutierende Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{g} & \twoheadrightarrow & \rho(\mathfrak{g}) & \hookrightarrow & \text{gl}(V) \\ \downarrow \text{ad}_x & & \downarrow \text{ad}_{\rho(x)} & & \downarrow \text{ad}_{\rho(x)} \\ \mathfrak{g} & \twoheadrightarrow & \rho(\mathfrak{g}) & \hookrightarrow & \text{gl}(V) \end{array}$$

wobei am linken senkrechten Pfeil die adjungierte Wirkung in der Lie-Algebra \mathfrak{g} gemeint ist, am mittleren die in der Lie-Algebra $\rho(\mathfrak{g})$ und rechts die in $\text{gl}(V)$.

Nach 2.1.2 (iv) kommutiert dann auch das Diagramm mit den halbeinfachen Anteilen. Nach Definition von s ist $(\text{ad}_x^{\mathfrak{g}})_s = \text{ad}_s^{\mathfrak{g}}$ und nach Lemma 2.1.3 gilt

$$\text{ad}_{\rho(x)}^{\text{gl}} = \text{ad}_{\rho(x)_s}^{\text{gl}}.$$

Also erhalten wir ein kommutierendes Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{g} & \twoheadrightarrow & \rho(\mathfrak{g}) & \hookrightarrow & \text{gl}(V) \\ \text{ad}_s^{\mathfrak{g}} \downarrow & & \downarrow & & \downarrow (\text{ad}_{\rho(x)_s}^{\text{gl}}) \\ \mathfrak{g} & \twoheadrightarrow & \rho(\mathfrak{g}) & \hookrightarrow & \text{gl}(V) \end{array}$$

Da die beiden Quadrate kommutieren, steht am mittleren Pfeil

$$\text{ad}_{\rho(s)}^{\rho(\mathfrak{g})} = \text{ad}_{\rho(x)_s}^{\rho(\mathfrak{g})}.$$

Nun ist aber

$$\text{ad}^{\rho(\mathfrak{g})} : \rho(\mathfrak{g}) \rightarrow \text{gl}(\rho(\mathfrak{g}))$$

injektiv, also gilt

$$\rho(s) = \rho(x)_s.$$

Ähnlich folgt $\rho(n) = \rho(x)_n$.

- (iii) Sei nun $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$ ein Homomorphismus von halbeinfachen Lie-Algebren und $x \in \mathfrak{g}$ ein Element mit absoluter Jordan-Zerlegung

$$x = s + n.$$

Betrachte die adjungierte Darstellung

$$\text{ad}' : \mathfrak{g}' \rightarrow \text{gl}(\mathfrak{g}')$$

und wende (ii) auf die Darstellung

$$\rho = \text{ad}' \circ \phi$$

von \mathfrak{g} an: es folgt, dass $\text{ad}_{\phi(s)}$ halbeinfach ist und $\text{ad}_{\phi(n)}$ nilpotent ist. Die beiden anderen Bedingungen für eine Jordan-Zerlegung

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \phi(s) + \phi(n) \\ [\phi(s), \phi(n)] &= 0 \end{aligned}$$

folgen unmittelbar aus der Tatsache, dass ϕ ein Homomorphismus von Lie-Algebren ist.

Definition 2.4.4.

- (i) Ein Element x einer Lie-Algebra \mathfrak{g} heißt ad-halbeinfach bzw. ad-nilpotent, wenn der Endomorphismus $\text{ad}_x \in \text{End}(\mathfrak{g})$ halbeinfach bzw. nilpotent ist.
- (ii) Bei halbeinfachen Lie-Algebren nennen wir diese Elemente auch kürzer halbeinfach oder nilpotent.

Bei der absoluten Jordan-Zerlegung einer halbeinfachen Lie-Algebra nennt man s bzw. n den halbeinfachen bzw. den nilpotenten Anteil von x .

Bemerkung 2.4.5.

Die nilpotenten Elemente einer halbeinfachen Lie-Algebra bilden eine abgeschlossene Teilmenge hoher Kodimension, den nilpotenten Kegel.

2.5 Wurzelraumzerlegung

Wir erinnern an den folgenden Sachverhalt aus der linearen Algebra:

Lemma 2.5.1.

Sei V ein Vektorraum und $T \subset \text{End}(V)$ ein endlich-dimensionaler Unterraum, der aus diagonalisierbaren und paarweise kommutierenden Abbildungen besteht. So besitzt V eine simultane Eigenraumzerlegung

$$V = \bigoplus_{\lambda \in T^*} V_\lambda$$

mit $V_\lambda = \{xv \in V \mid xv = \lambda(x)v, \quad \forall x \in T\}$.

Beweis.

Sei $\{x_i\}_{i=1,\dots,n}$ eine Basis von T . Da x_1 diagonalisierbar ist, zerfällt V in Eigenräume von x_1 . Die Endomorphismen x_i für $i \geq 2$ stabilisieren dann diese Eigenräume. Wende dann Induktion nach der Dimension von T an. \square

Die Menge $P(V) = \{\lambda \in T^* \mid V_\lambda \neq 0\} \subset T^*$ heißt die Menge der Gewichte von V . (Die Abkürzung P ist üblich und kommt vom französischen Wort *poids* für Gewichte.)

Definition 2.5.2.

Eine Unteralgebra $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ einer komplexen halbeinfachen Lie-Algebra \mathfrak{g} heißt Cartan-Unteralgebra, wenn gilt:

- (i) \mathfrak{h} ist abelsch und alle Elemente von \mathfrak{h} sind halbeinfach.
- (ii) \mathfrak{h} ist maximal bezüglich Inklusion unter allen Unteralgebren, von \mathfrak{g} , die (i) erfüllen.

Bemerkungen 2.5.3.

- (i) Die Elemente einer Cartan-Subalgebra sind nach Lemma 2.4.1 in jeder Darstellung diagonalisierbar. Stellt man sich die Elemente der Lie-Algebra als Observablen einer Quantentheorie vor, so hat man eine maximale Zahl kommutierender Observablen gewählt, für die man in jeder Darstellung eine Eigenbasis finden kann.
- (ii) Manchmal will man den Begriff der Cartan-Subalgebra nicht nur für halbeinfache Lie-Algebren einführen. Dann sollte man die Cartan-Subalgebra definieren als eine nilpotente Subalgebra, die ihr eigener Normalisator ist. Für \mathfrak{g} halbeinfach kann man zeigen, dass dies äquivalent zu unserer Definition ist.

(iii) Die ad-nilpotenten Elemente sind für die Struktur halbeinfacher Lie-Algebren wesentlich, wie das folgende Argument zeigt: eine Lie-Algebra, die nur aus ad-halbeinfachen Elementen besteht, ist abelsch. Nehmen wir an, die Lie-Algebra wäre nicht abelsch. Dann gäbe es x mit $ad_x \neq 0$, also gäbe es $y \neq 0$ und $\lambda \neq 0$ mit

$$ad_x(y) = \lambda y.$$

Daraus folgt aber für ad_y

$$ad_y(x) \neq 0, \quad (ad_y)^2(x) = 0,$$

also ist das Element y nicht halbeinfach.

Sei \mathfrak{g} eine komplexe, halbeinfache Lie-Algebra und $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine Cartan-Subalgebra von \mathfrak{g} . Wir führen als Notation für die Evaluation eines Elementes $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ aus dem Dualraum auf $h \in \mathfrak{h}$ ein:

$$\lambda(h) = \langle \lambda, h \rangle.$$

Lemma 2.5.1 impliziert nun eine Zerlegung der halbeinfachen Lie-Algebra:

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} \mathfrak{g}_\lambda$$

mit

$$\mathfrak{g}_\lambda = \{x \in \mathfrak{g} \mid [h, x] = \langle \lambda, h \rangle x \quad \forall h \in \mathfrak{h}\}$$

Insbesondere ist

$$\mathfrak{g}_0 = \{x \in \mathfrak{g} \mid [h, x] = 0 \quad \forall h \in \mathfrak{h}\} =: Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$$

der Zentralisator von \mathfrak{h} in \mathfrak{g} . Wir setzen

$$R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \{\alpha \in \mathfrak{h}^* \mid \alpha \neq 0 \text{ und } \mathfrak{g}_\alpha \neq 0\}$$

und finden somit die sogenannte Cartan-Zerlegung oder Wurzelraumzerlegung einer halbeinfachen Lie-Algebra

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}_\alpha$$

Definition 2.5.4.

Die endliche Teilmenge $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}^*$ heißt das Wurzelsystem von \mathfrak{g} bezüglich \mathfrak{h} . Die Elemente von R heißen Wurzeln, die Unterräume \mathfrak{g}_α heißen Wurzelräume.

Wir werden jetzt die Wurzelraumzerlegung näher untersuchen.

Lemma 2.5.5.

(i) Es gilt $[\mathfrak{g}_\lambda, \mathfrak{g}_\mu] \subset \mathfrak{g}_{\lambda+\mu}$ für alle $\lambda, \mu \in \mathfrak{g}^*$.

(ii) Es gilt $\kappa(\mathfrak{g}_\lambda, \mathfrak{g}_\mu) = 0$ für $\lambda \neq -\mu$

(iii) Die Einschränkung von κ auf \mathfrak{g}_0 ist nicht entartet.

Beweis.

(i) Aus $[h, x] = \lambda(h)x$ und $[h, y] = \mu(h)y$ folgt mit der Jacobi-Identität

$$[h, [x, y]] = \lambda(h)[x, y] + \mu(h)[x, y].$$

(ii) Mit Hilfe der Invarianz der Killingform folgt

$$-\lambda(h)\kappa(x, y) = \kappa([x, h], y) = \kappa(x, [h, y]) = \mu(h)\kappa(x, y)$$

für alle $h \in \mathfrak{h}$.

(iii) Für jedes Element $z \in \mathfrak{g}_0$ gilt $\kappa(z, \mathfrak{g}_\alpha) = 0$ für alle Wurzeln $\alpha \in R$. Gälte auch noch $\kappa(z, \mathfrak{g}_0) = 0$, so wäre die Killingform ausgeartet, im Widerspruch zu Satz 2.2.6.

Satz 2.5.6.

Eine Cartansche Untereralgebra einer halbeinfachen Lie-Algebra ist ihr eigener Zentralisator:

$$\mathfrak{h} = Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{g}_0.$$

Beweis.

- Da \mathfrak{h} kommutativ ist, gilt $\mathfrak{h} \subseteq Z := Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$
- Sei $x \in Z$ und $x = s + n$ seine absolute Jordan-Zerlegung. Wir behaupten nun, dass auch s und n in Z liegen. Da \mathfrak{h} eine maximale kommutierende Subalgebra aus halbeinfachen Elementen ist, muss dann s sogar in \mathfrak{h} liegen.

In der Tat liegt x genau dann in Z , wenn \mathfrak{h} im Kern von ad_x liegt. Aus $\mathfrak{h} \subseteq \ker \text{ad}_x$ folgt aber wegen

$$\ker \text{ad}_x \subseteq \ker \text{ad}_{s,n} = \ker(\text{ad}_x)_{s,n}$$

auch $\mathfrak{h} \subseteq \ker \text{ad}_{s,n}$, also $s, n \in Z$.

- Als nächstes überlegen wir uns, dass Z nilpotent ist: Für $x = s + n \in Z$ ist die adjungierte Wirkung auf Z

$$\operatorname{ad}_x^Z = \operatorname{ad}_s^Z + \operatorname{ad}_n^Z = \operatorname{ad}_n^Z$$

da $s \in \mathfrak{h}$, also $\operatorname{ad}_s^Z = 0$. Damit ist aber ad_x^Z für alle $x \in Z$ nilpotent, und nach dem Satz von Engel 1.6.4 ist somit Z nilpotent.

- Nach dem Korollar 1.6.8 aus dem Satz von Lie gibt es eine Basis von \mathfrak{g} , so dass alle $\operatorname{ad}_x^{\mathfrak{g}}$ für $x \in Z$ obere Dreiecksmatrizen sind. Ist also ein $z \in Z$ mit nilpotenter adjungierter Wirkung $\operatorname{ad}_z^{\mathfrak{g}}$ gegeben, so muss ad_z sogar echte obere Dreiecksmatrix sein. Also

$$\kappa(z, Z) = 0;$$

wegen Lemma 2.5.5 (iii) folgt $z = 0$.

Also besteht Z nur aus halbeinfachen Elementen von \mathfrak{g} . Die aber liegen, wie im zweiten Punkt gesehen, schon in \mathfrak{h} , also haben wir auch die umgekehrte Inklusion $Z \subseteq \mathfrak{h}$ bewiesen. \square

Lemma 2.5.7.

Für jede Wurzel $\alpha \in R$ ist $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$ ein ein-dimensionaler Unterraum von \mathfrak{g}_0 , auf dem α nicht verschwindet.

Beweis.

- Seien $E^\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ und $E^{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ und $h \in \mathfrak{h}$. So gilt

$$\kappa(h, [E^\alpha, E^{-\alpha}]) = \kappa([h, E^\alpha], E^{-\alpha}) = \alpha(h)\kappa(E^\alpha, E^{-\alpha}) \quad (4)$$

hieraus folgt sofort, dass $\ker \alpha \subseteq [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]^\perp$.

Der Kern einer nicht-verschwindenden Linearform hat Kodimension eins, also gilt $\dim \ker \alpha = \dim \mathfrak{g}_0 - 1$. Daraus folgt

$$\dim_k [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \leq 1.$$

Da die bilineare Paarung

$$\kappa_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_{-\alpha} \rightarrow k$$

nicht ausgeartet ist, gibt es $E^\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ und $E^{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ so dass $\kappa(E^\alpha, E^{-\alpha}) \neq 0$. Betrachtet man Gleichung (4) für ein $h \in \mathfrak{h}$ mit $\alpha(h) \neq 0$, so folgt

$$[E^\alpha, E^{-\alpha}] \neq 0$$

und somit $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \neq 0$. Damit ist der Vektorraum $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$ ein-dimensional.

- Es bleibt zu zeigen, dass die Wurzel α auf dem ein-dimensionalen Unterraum $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$ nicht verschwindet. Seien nun $E^\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, $E^{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ gegeben mit

$$h := [E^\alpha, E^{-\alpha}] \neq 0, \quad \text{aber} \quad \alpha(h) = 0.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} [h, E^\alpha] &= \alpha(h)E^\alpha = 0 \\ [h, E^{-\alpha}] &= -\alpha(h)E^{-\alpha} = 0 \end{aligned}$$

Wir betrachten die absteigende Zentralreihe der dreidimensionalen Lie-Algebra $\tilde{\mathfrak{g}} = \text{span}_{\mathbb{C}}(E^\alpha, E^{-\alpha}, h)$ und finden $\tilde{\mathfrak{g}}^1 = \text{span}_{\mathbb{C}}h$, $\tilde{\mathfrak{g}}^2 = 0$. Also ist $\tilde{\mathfrak{g}}$ eine nilpotente Subalgebra.

Insbesondere wäre $\tilde{\mathfrak{g}}$ auflösbar, also würden ad_{E^α} , $\text{ad}_{E^{-\alpha}}$ und ad_h in einer geeigneten Basis durch obere Dreiecksmatrizen dargestellt werden. Es müsste dann $\text{ad}_h = \text{ad}_{[E^\alpha, E^{-\alpha}]}$ nilpotent sein, im Widerspruch zu den definierenden Eigenschaften der Cartan-Unteralgebra \mathfrak{h} . \square

Definition 2.5.8.

Wir definieren für jede Wurzel $\alpha \in R$ die Kowurzel $\alpha^\vee \in \mathfrak{h}$ durch die Bedingungen

$$\alpha^\vee \in [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \quad \text{und} \quad \langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2.$$

Es folgt sofort $(-\alpha)^\vee = -\alpha^\vee$.

Satz 2.5.9.

Für jede Wurzel $\alpha \in R$ gibt es eine Einbettung von Lie-Algebren

$$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \hookrightarrow \mathfrak{g}$$

die die Unterräume von $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ folgendermaßen abbildet:

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &\longrightarrow \mathfrak{g}_\alpha \\ \mathbb{C} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &\longrightarrow \mathfrak{g}_{-\alpha} \\ \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} &\longrightarrow [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \end{aligned}$$

Beweis.

Wir finden stets $E^\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, $E^{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ mit

$$[E^\alpha, E^{-\alpha}] = \alpha^\vee$$

Also finden wir die gleichen Kommutationsregeln wie in $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, cf. Gleichung (2):

$$\begin{aligned} [\alpha^\vee, E^\alpha] &= \langle \alpha, \alpha^\vee \rangle E^\alpha = 2E^\alpha \\ [\alpha^\vee, E^{-\alpha}] &= -2E^{-\alpha} \quad \square \end{aligned}$$

Dieses Resultat erlaubt es uns, die in Kapitel 1.4 entwickelte Darstellungstheorie von $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ zum Studium von Wurzelsystemen heranzuziehen.

Satz 2.5.10.

(i) *Außer dem Negativen ist kein Vielfaches einer Wurzel wieder eine Wurzel,*

$$\mathbb{C}\alpha \cap R = \{\alpha, -\alpha\} \quad \forall \alpha \in R.$$

(ii) *Alle Wurzelräume sind ein-dimensional,*

$$\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1 \quad \text{für alle } \alpha \in R.$$

Die Abbildungen aus Satz 2.5.9 sind also Isomorphismen.

Beweis.

Sei $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_\alpha = \text{span}_{\mathbb{C}}(E^\alpha, E^{-\alpha}, \alpha^\vee) \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ wie oben. Da es nur endlich viele Wurzeln gibt, dürfen wir annehmen, dass α so gewählt wurde, dass $\frac{1}{2}\alpha$ keine Wurzel ist. Nun definiert die Restriktion der adjungierten Darstellung auf die Unteralgebra $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_\alpha$ eine endlich-dimensionale Darstellung von $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_\alpha$ auf \mathfrak{g} . Diese besitzt

$$U := \mathbb{C}\alpha^\vee \oplus \bigoplus_{t \neq 0} \mathfrak{g}_{t\alpha}$$

als eine Unterdarstellung, die wiederum $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_\alpha$ als Unterdarstellung enthält.

Nach dem Satz von Weyl 2.3.6 ist die Unterdarstellung U halbeinfach. Sei daher K ein Komplement von $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_\alpha$ in U . Wäre $K \neq 0$, so gäbe es sicher eine endlich-dimensionale irreduzible Unterdarstellung $R \subseteq K$. Nach Kapitel 1.4 tritt dann aber in dieser Unterdarstellung entweder das Gewicht $\frac{\alpha}{2}$ oder das Gewicht α auf. In unserer Situation müsste es das Gewicht $\frac{\alpha}{2}$ sein, da R nicht \mathfrak{g}_0 schneidet. Also ist auch $\frac{\alpha}{2}$ eine Wurzel, im Widerspruch zu unserer Annahme. Es folgt $K = 0$, woraus die Behauptungen (i) und (ii) folgen. \square

Satz 2.5.11.

Sei \mathfrak{g} eine halbeinfache Lie-Algebra, $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine Cartan-Subalgebra von \mathfrak{g} . Sei $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}^*$ das zugehörige Wurzelsystem und $\alpha^\vee \in \mathfrak{h}$ die Kowurzel zur Wurzel $\alpha \in R$. Dann gilt:

- (i) Für alle $\alpha, \beta \in R$ gilt $\langle \beta, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{Z}$ und $\beta - \langle \beta, \alpha^\vee \rangle \alpha \in R$.
- (ii) Die Menge aller Wurzeln spannt \mathfrak{h}^* auf.

Beweis.

- Wegen Satz 2.5.10 müssen wir nur noch den Fall $\beta \neq \pm\alpha$ betrachten. Der Unterraum

$$T = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{\beta+i\alpha}$$

von \mathfrak{g} ist eine $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_\alpha$ -Unterdarstellung. Alle Gewichtsräume $\mathfrak{g}_{\beta+i\alpha}$ sind nach Satz 2.5.10 höchstens ein-dimensional und $\alpha^\vee \in \mathfrak{h}$ operiert auf $\mathfrak{g}_{\beta+i\alpha}$ mit Eigenwert

$$\langle \beta, \alpha^\vee \rangle + 2i$$

- Aus Kapitel 1.4 wissen wir, dass die Eigenwerte von α^\vee ganz sein müssen und mit n auch $-n$ ein Eigenwert ist. Also ist $\langle \beta, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{Z}$. Da $\mathfrak{g}_{\beta - \langle \beta, \alpha^\vee \rangle \alpha}$ der Eigenraum von α^\vee zum Eigenwert

$$\langle \beta - \langle \beta, \alpha^\vee \rangle \alpha, \alpha^\vee \rangle = \langle \beta, \alpha^\vee \rangle - \langle \beta, \alpha^\vee \rangle \cdot 2 = -\langle \beta, \alpha^\vee \rangle$$

ist, ist auch $\beta - \langle \beta, \alpha^\vee \rangle \alpha \in R$. Dies zeigt (i).

- Alle Eigenräume von T sind ein-dimensional und die Eigenwerte haben gleichen Werte modulo 2. Also ist T sogar eine einfache $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_\alpha$ Darstellung, wie wir sie in 1.4 explizit beschrieben haben. Aus dieser Beschreibung folgt sofort die Gleichung

$$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta},$$

falls α, β und $\alpha + \beta$ alle Wurzeln sind.

- Wir zeigen nun, dass

$$\bigcap_{\alpha \in R} \ker \alpha = 0$$

gilt. Hieraus folgt natürlich, dass $\text{span}_{\mathbb{C}}\{\alpha\} = \mathfrak{h}^*$, denn wäre $\text{span}_{\mathbb{C}}\{\alpha\}_{\alpha \in R} \subsetneq \mathfrak{h}^*$, so fänden wir ein $\mathfrak{h} \ni x \neq 0$ mit $\alpha(x) = 0$ für alle $\alpha \in R$.

Sei also $h \in \mathfrak{h}$ mit $\alpha(h) = 0$ für alle $\alpha \in R$. Dann gilt $[h, \mathfrak{g}_\alpha] = 0$ für alle Wurzeln $\alpha \in R$, und sowieso gilt $[h, \mathfrak{g}_0] = 0$. Also muss h im Zentrum $Z(\mathfrak{g})$ von \mathfrak{g} liegen; da aber \mathfrak{g} halbeinfach ist, ist das Zentrum trivial, und es folgt $h = 0$. \square

Bemerkungen 2.5.12.

(i) Die Kowurzeln α^\vee für $\alpha \in R$ spannen die Cartan-Unteralgebra \mathfrak{h} auf.

(ii) Betrachte den Vektorraum

$$\mathfrak{h}_\mathbb{Q} = \text{span}_\mathbb{Q}(\alpha^\vee)_{\alpha \in R}$$

über den rationalen Zahlen. Dann ist für $t_1, t_2 \in \mathfrak{h}_\mathbb{Q}$ der Wert der Killingform $\kappa_\mathfrak{g}(t_1, t_2)$ rational. Ferner ist die Bilinearform $\kappa|_{\mathfrak{h}_\mathbb{Q}}$ positiv definit. Analoge Aussagen gelten, wenn man den Körper \mathbb{Q} durch die reellen Zahlen \mathbb{R} ersetzt.

Beweis.

(i) Sei h im orthogonalen Komplement von $\text{span}_\mathbb{C}\{\alpha^\vee\}_{\alpha \in R}$ in \mathfrak{h} .

Dann ist für alle Wurzeln $\alpha \in R$ und $E^{\pm\alpha} \in \mathfrak{g}_{\pm\alpha}$.

$$\begin{aligned} 0 &= \kappa(h, \alpha^\vee) = \kappa(h, [E^\alpha, E^{-\alpha}]) \\ &= \kappa([h, E^\alpha], E^{-\alpha}) = \alpha(h)\kappa(E^\alpha, E^{-\alpha}) \end{aligned}$$

Da κ nicht entartet ist, gilt für $E^{\pm\alpha} \neq 0$ sicher $\kappa(E^\alpha, E^{-\alpha}) \neq 0$. Es folgt also $\alpha(h) = 0$ für alle Wurzeln $\alpha \in R$. Damit muss h im Zentrum der halbeinfachen Lie-Algebra \mathfrak{g} liegen, also ist $h = 0$.

(ii) Man rechnet für $h, h' \in \mathfrak{h}$:

$$\kappa_\mathfrak{g}(h, h') = \text{tr}_\mathfrak{g} \text{ad}_h \circ \text{ad}_{h'} = \sum_{\alpha \in R} \alpha(h)\alpha(h'),$$

woraus die Behauptungen in (ii) folgen.

Die Struktur, die wir gerade untersucht haben, führt uns auf die folgende

Definition 2.5.13.

Sei $(E, (\cdot, \cdot))$ endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum. (Das heißt insbesondere, dass E ein reeller Vektorraum sein soll.) Ein Wurzelsystem in E ist eine Teilmenge $\Phi \subset E$ mit den folgenden Eigenschaften

(i) Φ ist endlich, $0 \in \Phi$ und $\text{span}_\mathbb{R}\Phi = E$.

(ii) $\alpha \in \Phi \Rightarrow \mathbb{R}\alpha \cap \Phi = \{\pm\alpha\}$

(iii) Seien $\alpha, \beta \in \Phi$, dann gilt

$$\frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \in \mathbb{Z}$$

und

$$\beta - \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \alpha \in \Phi.$$

Manchmal fordert man auch nur (i) und (iii) für ein Wurzelsystem und nennt dann das Wurzelsystem reduziert, wenn auch noch (ii) erfüllt ist.

Wir haben also jedem Paar $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ bestehend aus einer einfachen Lie-Algebra und einer Cartan-Subalgebra \mathfrak{h} von \mathfrak{g} ein Wurzelsystem zugeordnet: die Wurzeln $\alpha \in R$ in \mathfrak{h}^* . Dieses Wurzelsystem hängt nicht von der Wahl der Cartan-Subalgebra ab, denn es gilt:

Satz 2.5.14.

(i) Seien \mathfrak{h} und \mathfrak{h}' Cartan-Unteralgebren einer halbeinfachen Lie-Algebra \mathfrak{g} . Dann gibt es einen Automorphismus

$$\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

so dass

$$\varphi(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}'.$$

(ii) Der Automorphismus kann sogar als innerer Automorphismus gewählt werden.

(iii) Für die Wurzelsysteme gilt $\Phi = \varphi^*(\Phi')$.

Beweis: übergangen.

Außerdem kann man zeigen, dass man die halbeinfache Lie-Algebra \mathfrak{g} aus dem Wurzelsystem (\mathfrak{h}, Φ) eindeutig bis auf Isomorphie rekonstruieren kann und dass jedem Wurzelsystem eine halbeinfache Lie-Algebra entspricht. Dies wird durch die Konstruktion von Chevalley-Serre gezeigt, auf die wir im Rahmen dieser Vorlesung nicht eingehen.

Wir haben jetzt genügend Motivation zum Studium von Spiegelungsgruppen und Wurzelsystemen.

3 Spiegelungsgruppen und Wurzelsysteme

3.1 Endliche Spiegelungsgruppen

Definition 3.1.1.

- (i) Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem Körper k der Charakteristik 0. Eine Spiegelung ist eine lineare Abbildung

$$s : V \rightarrow V$$

deren Fixpunktmenge V^s eine Hyperebene ist, $\dim_k V^s = \dim_k V - 1$, und für die $s^2 = id_V$ gilt.

- (ii) Eine endliche Spiegelungsgruppe ist eine endliche Untergruppe $W \subseteq GL(V)$, die von Spiegelungen erzeugt wird.

Die Theorie wird nur für angeordnete Körper k , etwa $k = \mathbb{Q}$ oder $k = \mathbb{R}$, entwickelt. Skalarprodukte sollen immer positiv definit sein. (In der Theorie unendlich-dimensionaler Lie-Algebren muss man sich von dieser Voraussetzung freimachen.)

Bemerkung 3.1.2.

- (i) V^s heißt Spiegelebene der Spiegelung s . Spiegelungen mit gleicher Spiegelebene stimmen überein.
- (ii) Der Eigenraum von s zum Eigenwert -1 ist ein-dimensional. Sei $\alpha \in V$ ein Eigenvektor zum Eigenwert -1 . Sei $\alpha^\vee \in V^*$ die Gleichung der Spiegelebene, d.h. die Spiegelebene bestehe aus den Punkten $h \in V$ für die $\alpha^\vee(h) = 0$ gilt. Wähle α^\vee so, dass gilt

$$\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2.$$

Dann lässt sich die Spiegelung in der Form

$$s(\lambda) = \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha \tag{5}$$

schreiben. Umgekehrt gibt jedes Paar von Vektoren $\alpha \in V$ und $\alpha^\vee \in V^*$ mit $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$ durch Gleichung (5) eine Spiegelung.

- (iii) Sei W nun eine endliche Spiegelungsgruppe auf V . Dann kann V mit einem W -invarianten Skalarprodukt i versehen werden, d.h. es gilt $i(gv, gw) = i(v, w)$ für alle $v, w \in V$ und für alle $g \in W$. Denn sei $b : V \times V \rightarrow k$ irgend ein Skalarprodukt auf V , so setze

$$i(v, w) = \sum_{g \in G} b(gv, gw).$$

Definition 3.1.3.

Sei V ein Vektorraum und $W \subset GL(V)$ eine endliche Spiegelungsgruppe. Die maximalen konvexen Teilmengen in

$$V \setminus \bigcup_{s \in W} V^s$$

ist Spiegelung

d.h. im Komplement aller Spiegelebenen, heißen Weylkammern oder Alkoven.

Beispiel 3.1.4.

- (i) Ist V eindimensional, so gibt es nur eine einzige nicht-triviale endliche Spiegelungsgruppe, die von der Reflektion am Ursprung erzeugt wird. Sie ist isomorph zu \mathbb{Z}_2 .
- (ii) Ist V zweidimensional, so gibt es vier nicht-triviale endliche Spiegelungsgruppen. Man betrachte dazu ein reguläres n -Eck mit Schwerpunkt im Ursprung. Die Spiegelebenen sind Geraden und gehen durch den Ursprung und zwei gegenüberliegende Punkte des n -Ecks. Für $n = 4$ erhält man als Spiegelungsgruppe die Kleinsche Vierergruppe $W \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, für $n = 6$ die symmetrische Gruppe S_3 , für $n = 8$ eine Erweiterung der Kleinschen Vierergruppe und für $n = 12$ die dihedrale Gruppe mit 12 Elementen, $W = D_6$.

Satz 3.1.5.

Sei V ein euklidischer Raum, $W \subset GL(V)$ eine endliche Spiegelungsgruppe. Wir betrachten die Menge aller Spiegelebenen zu Spiegelungen aus W und die Menge der zugehörigen Alkoven.

- (i) Für jeden einzelnen Alkoven erzeugen die Spiegelungen an seinen Wänden schon die ganze Spiegelungsgruppe.
- (ii) Ist $w = s_1 s_2 \dots s_r$ die kürzest mögliche Darstellung von $w \in W$ als Produkt von Spiegelungen, eine sogenannte reduzierte Darstellung von w , so gibt es genau r Spiegelebenen, die A von wA trennen. $r = l_A(w) = l(w)$ hängt nicht von der Wahl des Alkoven ab und heißt Länge des Elements w .
- (iii) Die Spiegelungsgruppe operiert transitiv und frei auf der Menge der Alkoven.
- (iv) Ist $S \subset W$ eine Menge von Spiegelungen, die W erzeugt, so ist jede Spiegelung $\sigma \in W$ konjugiert zu einem Element von S . Es gibt also $w \in W$ und $s \in S$ so dass

$$\sigma = w s w^{-1}.$$

Der Satz wird in dieser Vorlesung nicht bewiesen. Er gilt aber sogar noch für den Fall, wenn V ein affiner Raum ist und W eine affine Spiegelungsgruppe ist. (Bei affinen Spiegelungen enthält die Spiegelebene nicht unbedingt den Ursprung, in einem affinen Raum gibt es bekanntlich keinen Ursprung.) Affine Spiegelungsgruppen spielen eine grosse Rolle in der Theorie der unendlich-dimensionalen Lie-Algebren und der Quantengruppen, die eine Deformation von (universellen einhüllenden Algebren von) Lie-Algebren sind.

Lemma 3.1.6.

Wir bezeichnen die Hyperebene senkrecht zu einem nicht-verschwindenden Vektor γ mit γ^\perp . Liegen Vektoren $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ eines euklidischen Vektorraums auf der gleichen Seite einer Hyperebene γ^\perp , d.h. $(\alpha_i, \gamma) > 0$ für alle i , und schließen sie paarweise stumpfe Winkel ein, also $(\alpha_i, \alpha_j) \leq 0$ für $i \neq j$, so sind sie linear unabhängig.

Beweis.

Sei $\sum_i c_i \alpha_i = 0$. Setze $I_+ = \{i | c_i \geq 0\}$ und $I_- = \{i | c_i < 0\}$, so gilt

$$n = \sum_{i \in I_+} c_i \alpha_i = \sum_{i \in I_-} (-c_i) \alpha_i$$

Offenbar gilt

$$(n, n) = \sum_{\substack{i \in I_+ \\ j \in I_-}} c_i (-c_j) (\alpha_i, \alpha_j) \leq 0,$$

also ist $n = 0$. Damit gilt insbesondere

$$0 = \sum_{i \in I_+} c_i (\alpha_i, n)$$

also verschwinden alle c_i mit $i \in I_+$. Ein analoges Argument zeigt, dass I_- leer ist. □

Satz 3.1.7.

Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem angeordneten Körper. Sei $W \subset GL(V)$ eine endliche Spiegelungsgruppe, $A \subset V$ ein Alkoven, H_1, \dots, H_n die Wände des Alkovens A und

$$s_i : v \mapsto v - \langle v, \alpha_i^\vee \rangle \alpha_i$$

die Spiegelungen an diesen Wänden. So gilt:

- (i) Die Familien α_i und die α_i^\vee sind jeweils linear unabhängig.
- (ii) Liegt α_i auf der gleichen Seite der Hyperebene H_i wie der Alkoven A , so gilt $\langle \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle \leq 0$, falls $i \neq j$.

Beweis.

- Die α_i stehen senkrecht auf den Wänden. Da das Skalarprodukt invariant ist, gilt

$$\begin{aligned} (\alpha_j, \alpha_i) &= (s_i(\alpha_j), s_i(\alpha_i)) = (\alpha_j - \langle \alpha_j, \alpha_i^\vee \rangle \alpha_i, -\alpha_i) \\ &= -(\alpha_j, \alpha_i) + \langle \alpha_j, \alpha_i^\vee \rangle (\alpha_i, \alpha_i) \end{aligned}$$

Also gilt

$$\langle \alpha_j, \alpha_i^\vee \rangle = \frac{2(\alpha_j, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)} \quad (6)$$

- Wir können schon für den Beweis von (i) annehmen, dass alle α_i so gewählt sind, dass sie in den Alkoven A zeigen. Wir behaupten, dass dann gilt

$$(\alpha_i, \alpha_j) \leq 0, \quad (7)$$

womit dann, wegen Lemma 3.1.6 und Gleichung (6) alles gezeigt ist. Denn wegen Gleichung (6) geht unter dem von Skalarprodukt induzierten Isomorphismus

$$\begin{aligned} V^* &\rightarrow V \\ \alpha_i^\vee &\mapsto \frac{2}{(\alpha_j, \alpha_j)} \alpha_j. \end{aligned}$$

Um (7) zu zeigen, wählen wir $v \in H_i$, so dass $(\alpha_j, v) < 0$. Aus der Invarianz des Skalarprodukts folgt dann $(\alpha_j, s_j v) > 0$. Gälte $\langle \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle > 0$, so wäre

$$\begin{aligned} (\alpha_i, s_j v) &= (s_j \alpha_i, v) = (\alpha_i, v) - \langle \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle (\alpha_j, v) \\ &= -\langle \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle (\alpha_j, v) > 0, \end{aligned}$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass wegen $v \in H_i$ das Skalarprodukt (α_i, v) verschwindet. Somit liegt $s_j v$ einerseits auf der Hyperebene $s_j H_i$, andererseits gilt

$$(\alpha_i, s_j v) > 0 \quad \text{und} \quad (\alpha_j, s_j v) > 0.$$

Da man zeigen kann, dass s_i und s_j die Spiegelungsgruppe W erzeugen, liegt $s_j v$ auch im Alkoven A , Widerspruch.

3.2 Wurzelsysteme

Wir können jetzt die Wurzelsysteme knapper beschreiben und untersuchen.

Definition 3.2.1.

Sei V ein Vektorraum über einem Körper k der Charakteristik Null. Eine Teilmenge $R \subset V$ heißt (reduziertes) Wurzelsystem, wenn gilt

- (i) R ist endlich und erzeugt V
- (ii) Für jedes $\alpha \in R$ gilt $k\alpha \cap R = \{\pm\alpha\}$
- (iii) Für jedes $\alpha \in R$ gibt es eine Spiegelung $s_\alpha : V \rightarrow V$, so dass

$$\begin{aligned} s_\alpha(\alpha) &= -\alpha & s_\alpha(R) &= R \\ s_\alpha(\beta) - \beta &\in \mathbb{Z}\alpha & \forall \beta &\in R. \end{aligned}$$

Bemerkung 3.2.2.

Wir erklären die Beziehung zu Definition 2.5.13: gegeben ein Wurzelsystem wie in Definition 3.2.1, ist die von alle Reflektionen s_α erzeugte Spiegelungsgruppe W als Untergruppe der Permutationen von R endlich. Finde deshalb nach Lemma 3.1.2 (iii) ein W -invariantes Skalarprodukt auf V . Jede Reflektion s_α ist von der Form $s_\alpha(\lambda) = \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha$ mit $\alpha^\vee \in V^*$. Damit ist die Forderung

$$s_\alpha(\beta) - \beta = \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha \in \mathbb{Z}\alpha$$

äquivalent zur Forderung in Definition 2.5.13

$$\langle \beta, \alpha^\vee \rangle = \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \in \mathbb{Z}.$$

Satz 3.2.3.

- (i) Sei $R \subset V$ ein Wurzelsystem und $\alpha \in R$ eine Wurzel. So gibt es genau eine Spiegelung $s_\alpha : V \rightarrow V$, so dass

$$s_\alpha(\alpha) = -\alpha \quad s_\alpha(R) = R.$$

Das Element $\alpha^\vee \in V^*$ mit

$$s_\alpha(\lambda) = \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha \quad \forall \lambda \in V$$

heißt dann die Kowurzel oder duale Wurzel zu α .

- (ii) Die Menge $R^\vee = \{\alpha^\vee | \alpha \in R\}$ aller Kowurzeln ist ein Wurzelsystem in V^* . Unter der kanonischen Identifikation $V \rightarrow V^{**}$ geht α in $(\alpha^\vee)^\vee$.

(iii) Ist $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ eine Basis von V aus Wurzeln, so liegt jede Wurzel β bereits im \mathbb{Q} -Spann der α_i .

Beweis.

- Zunächst sei $k = \mathbb{Q}$. Wir wählen wieder ein W -invariantes Skalarprodukt auf V , wobei W die von allen s_α erzeugte Spiegelungsgruppe ist.

Aus $s_\alpha(\lambda) = \lambda$ folgt

$$(\alpha, \lambda) = (\alpha, s_\alpha \lambda) = (s_\alpha \alpha, \lambda) = -(\alpha, \lambda),$$

also $\lambda \in \alpha^\perp$. Damit ist die Spiegelebene V^{s_α} in der Hyperebene α^\perp enthalten. Also ist die Spiegelung s_α eindeutig bestimmt als Reflektion an der Hyperebene α^\perp .

- Es gilt

$$\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle = \frac{2(\lambda, \alpha)}{(\alpha, \alpha)},$$

denn beide Linearformen in λ stimmen auf α und auf α^\perp überein. Unter der Abbildung

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\sim} & V^* \\ v & \mapsto & (\cdot, v) \end{array}$$

geht

$$\frac{2\alpha}{(\alpha, \alpha)} \mapsto \alpha^\vee$$

Also wird der Dualraum V^* von den Kowurzeln α^\vee erzeugt. Die Axiome (i) und (ii) aus der Definition 3.2.1 für Wurzelsysteme sind somit für die Kowurzeln R^\vee erfüllt.

- Wir müssen noch für alle $\alpha, \beta \in R$ nachprüfen, dass

$$s_\alpha(\beta)^\vee = \beta^\vee - \langle \alpha, \beta^\vee \rangle \alpha^\vee \in R^\vee.$$

Nach Anwendung des Isomorphismus $V \xrightarrow{\sim} V^*$ heißt dies, dass

$$\frac{2s_\alpha(\beta)}{(s_\alpha \beta, s_\alpha \beta)} = \frac{2\beta}{(\beta, \beta)} - \frac{2(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} \frac{2\alpha}{(\alpha, \alpha)}$$

gelten muss, was aber offensichtlich gilt. Wir haben nun die Aussagen (i) und (ii) für den Fall eines rationalen Grundkörpers $k = \mathbb{Q}$ gezeigt.

- Sei nun der Grundkörper k beliebig und $V_{\mathbb{Q}}$ der von den Wurzeln aufgespannte \mathbb{Q} -Untervektorraum von V . $R \subset V_{\mathbb{Q}}$ ist ein Wurzelsystem, die duale Wurzel $\alpha_{\mathbb{Q}}^{\vee}$ im rationalen Dualraum $V_{\mathbb{Q}}^*$ ist die Einschränkung auf $V_{\mathbb{Q}}$ von jeder möglichen dualen Wurzel $\alpha^{\vee} \in V^*$. Eine Linearform liegt aber schon durch ihre Werte auf dem Erzeugendensystem R von V fest, erst recht also durch ihre Werte auf $V_{\mathbb{Q}}$. Dies zeigt die Aussage (i) für beliebiges k .
- Offenbar gilt $\dim_{\mathbb{Q}} V_{\mathbb{Q}} \geq \dim_k V$, da jede \mathbb{Q} -Basis von $V_{\mathbb{Q}}$ sicher ein k -Erzeugendensystem von V ist. Sei $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ eine \mathbb{Q} -Basis von $V_{\mathbb{Q}}$ aus Wurzeln, $\beta_1^{\vee}, \dots, \beta_n^{\vee}$ eine \mathbb{Q} -Basis von $V_{\mathbb{Q}}^*$ aus (Restriktionen von) Kowurzeln.

Die Matrix $\langle \alpha_i, \beta_j^{\vee} \rangle$ mit Einträgen in \mathbb{Z} ist über \mathbb{Q} invertierbar, also auch über k invertierbar. Also sind die beiden Familien $\{\alpha_i\}$ und $\{\beta_i\}$ auch k -linear unabhängig. Wir erhalten die Gleichheit

$$\dim_{\mathbb{Q}} V_{\mathbb{Q}} = \dim_k V.$$

Damit gilt aber $\text{span}_k \{\beta_j^{\vee}\} = V^*$, was (ii) für einen beliebigen Grundkörper k zeigt. Ebenso gilt $\text{span}_k \{\alpha_j\} = V$, woraus (iii) folgt, da jede Wurzel β schon in $V_{\mathbb{Q}}$ liegt.

Definition 3.2.4.

Sei $R \subset V$ ein Wurzelsystem. Die von den Spiegelungen

$$s_{\alpha} : \lambda \mapsto \lambda - \langle \lambda, \alpha^{\vee} \rangle \alpha$$

erzeugte Spiegelungsgruppe $W = W(R) \subset GL(V)$ heißt Weylgruppe des Wurzelsystems. Die Alkoven in $V_{\mathbb{Q}}$ heißen Weylkammern.

Lemma 3.2.5.

(i) Die Spiegelung $s_{\alpha^{\vee}} : V^* \rightarrow V^*$ ist die zu s_{α} transponierte Abbildung.

(ii) Sei R ein Wurzelsystem mit Weylgruppe W . Jede Spiegelung in W ist von der Form s_{α} für eine Wurzel $\alpha \in R$.

Beweis.

- (i) folgt aus der Identität $\langle s_{\alpha} v, \lambda \rangle = \langle v, s_{\alpha^{\vee}} \lambda \rangle$, die für alle $v \in V$ und $\lambda \in V^*$ gilt. Wir führen die abkürzende Schreibweise $s_{\alpha} = s_{\alpha^{\vee}}$ ein.
- (ii) Nach Satz 3.1.5 (iv) ist jede Spiegelung in der Weylgruppe W konjugiert zu einem s_{α} , $\alpha \in R$. Mit $w \in W$ gilt aber

$$w s_{\alpha} w^{-1} = s_{w\alpha}$$

wobei $w\alpha \in R$ in R liegt. □

Zur Klassifikation der Wurzelsysteme in zwei-dimensionalen Vektorräumen (cf. Beispiel 3.1.4) braucht man nur das folgende Lemma:

Lemma 3.2.6.

Für zwei nicht-proportionale Wurzeln α, β eines Wurzelsystems ist

$$0 \leq \langle \alpha, \beta^\vee \rangle \langle \beta, \alpha^\vee \rangle < 4 \quad \text{ganzzahlig}$$

und für den Winkel $\varphi_{\alpha, \beta}$ zwischen zwei Wurzeln α und β gilt

$$4 \cos^2(\varphi_{\alpha, \beta}) = \langle \alpha, \beta^\vee \rangle \langle \beta, \alpha^\vee \rangle$$

Für $(\alpha, \beta) \neq 0$ gilt:

$$\frac{\|\alpha\|^2}{\|\beta\|^2} = \frac{\langle \alpha, \beta^\vee \rangle}{\langle \beta, \alpha^\vee \rangle}.$$

Beweis.

Alle Gleichungen folgen sofort aus der Beziehung $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle = \frac{2(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} \in \mathbb{Z}$.

□

Beispiel 3.2.7.

Die Menge $R = \{e_i - e_j \mid i \neq j\}$ ist ein Wurzelsystem im reellen Vektorraum

$$V = \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n a_i = 0\}.$$

Sei die Linearform ϵ_i auf V definiert durch $\epsilon_i(a_1, \dots, a_n) = a_i$. Dann ist für die Wurzel

$$\alpha = e_i - e_j$$

die Kowurzel $\epsilon_i - \epsilon_j$. Die Spiegelung s_α vertauscht die i -te und j -te Koordinate. Also ist die Weylgruppe isomorph zu einer Permutationsgruppe, $W \cong S_n$, nämlich der Permutation von Koordinaten.

3.3 Basen und Systeme positiver Wurzeln

Definition 3.3.1.

(i) Sei $R \subset V$ ein Wurzelsystem. Eine Teilmenge $\Pi \subset R$ heißt Basis von R , wenn gilt

(a) Π ist eine Vektorraumbasis von V

(b) Schreiben wir $\beta \in R$ als Linearkombination, $\beta = \sum_{\alpha \in \Pi} n_\alpha \alpha$, so liegen entweder alle Koeffizienten $n_\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ oder es liegen alle Koeffizienten $n_\alpha \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$.

(ii) Jede Basis eines Wurzelsystems bestimmt so eine Zerlegung von R in positive und negative Wurzeln:

$$R = R^+(\Pi) \sqcup R^-(\Pi),$$

wobei die positiven Wurzeln definiert sind durch

$$R^+(\Pi) = \left\{ \beta \in R \mid \beta = \sum_{\alpha \in \Pi} n_\alpha \alpha \text{ mit } n_\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \right\}.$$

Der folgende Satz beschreibt die Basen eines Wurzelsystems und garantiert nebenbei auch deren Existenz:

Satz 3.3.2.

Es gibt eine Bijektion zwischen den Basen eines Wurzelsystems R und seinen Weylkammern in $V_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}R$:

$$\{ \text{Weylkammer} \} \xleftrightarrow{\sim} \{ \text{Basen von } R \}$$

Die Bijektion wird geliefert durch

$$A \mapsto \Pi(A) := \left\{ \alpha \in R \mid \begin{array}{l} \ker \alpha^\vee \text{ ist Wand von } A \\ \langle A, \alpha^\vee \rangle > 0 \end{array} \right\},$$

das Inverse ist gegeben durch

$$\Pi \mapsto A(\Pi) := \left\{ \lambda \in V_{\mathbb{Q}} \mid \begin{array}{l} \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle > 0 \\ \text{für alle } \alpha \in \Pi \end{array} \right\}$$

Wählt man ein W -invariantes Skalarprodukt auf $V_{\mathbb{Q}}$, so ist $\Pi(A)$ also die Menge aller Wurzeln, die auf einer Wand von A senkrecht stehen und ins Innere des Alkoven A zeigen.

Beweis.

- Für jede Basis Π des Wurzelsystems ist $A(\Pi)$ eine Weylkammer: offenbar ist $\langle A(\Pi), \beta^\vee \rangle > 0$ für alle $\beta \in R^+(\Pi)$, also wird $A(\Pi)$ von keiner Spiegelebene getroffen. Andererseits ist A Schnitt von Halbräumen zu Spiegelebenen, also konvex. Somit ist A Weylkammer.

- Sei umgekehrt A eine Weylkammer, wir wollen zeigen, dass die Menge $\Pi(A)$ eine Basis des Wurzelsystems ist. Wegen Satz 3.1.7 sind die Wurzeln in $\Pi(A)$ schon einmal linear unabhängig. Nach Satz 3.1.5 (i) erzeugen die Spiegelungen s_α mit $\alpha \in \Pi(A)$ die Weylgruppe. Damit gilt für alle $v \in \Pi^\perp$ und alle Wurzeln $\alpha \in R$ die Gleichung

$$s_\alpha v = v - \langle \alpha^\vee, v \rangle \alpha = v$$

woraus $\langle \alpha^\vee, v \rangle = 0$ folgt. Da die Kowurzeln nach Satz 3.2.3 (ii) V^* aufspannen, folgt $v = 0$. Damit ist $\Pi(A)$ ein Erzeugendensystem des Vektorraums V .

- Betrachte die zu $\Pi^\vee = \{\alpha^\vee | \alpha \in \Pi(A)\}$ duale Basis $\{\Lambda_\alpha\}_{\alpha \in \Pi}$ von V . Für die Elemente dieser Basis gilt

$$\langle \Lambda_\alpha, \beta^\vee \rangle = \delta_{\alpha, \beta} \quad \text{für } \alpha, \beta \in \Pi(A).$$

Die Elemente $\Lambda_\alpha \in V$ heißen fundamentale (dominante) Gewichte.

Mit diesen Gewichten können wir den Alkoven schreiben als

$$A = \sum_{\alpha \in \Pi(A)} \mathbb{Q}_{\geq 0} \Lambda_\alpha.$$

Sei $\beta \in R$; da $\Pi(A)$ eine Basis ist, können wir schreiben

$$\beta = \sum_{\alpha \in \Pi} n_\alpha^{(\beta)} \alpha.$$

Wir müssen zeigen, dass alle Koeffizienten $n_\alpha^{(\beta)}$ das gleiche Vorzeichen haben. Dazu setzen wir

$$I = \{\alpha | n_\alpha^{(\beta)} > 0\}$$

und

$$\lambda_+ = \sum_{\alpha \in I} \Lambda_\alpha \quad \lambda_- = \sum_{\alpha \notin I} \Lambda_\alpha$$

Dann liegen λ_\pm im Abschluss des Alkovens A und das Intervall

$$(\lambda_-, \lambda_+) = \{t\lambda_+ + (1-t)\lambda_-, 0 < t < 1\}$$

sogar im Alkoven A . Hätten nicht alle $n_\alpha^{(\beta)}$ das gleiche Vorzeichen, so wäre

$$\langle \lambda_+, \beta^\vee \rangle > 0 \quad \text{und} \quad \langle \lambda_-, \beta^\vee \rangle < 0.$$

Daher nimmt die Funktion $\langle \cdot, \beta^\vee \rangle$ auf dem Intervall (λ_-, λ_+) , also im Innern von A , irgendwo den Wert Null an, was nur auf einer Spiegelebene möglich ist, also im Innern des Alkovens unmöglich ist. Also haben alle Koeffizienten das gleiche Vorzeichen.

- Wir wollen nun zeigen, dass diese Koeffizienten sogar ganzzahlig sind. Nach Satz 3.1.5 (iii) ist jeder Alkoven konjugiert zu A unter einem Element von W . Also ist jede Wurzel in R konjugiert zu einer Wurzel aus Π . Das Gitter $\mathbb{Z}\Pi$ ist stabil unter der Wirkung von W , also $R \subset \mathbb{Z}\Pi$. Die Koeffizienten sind also ganzzahlig.
- Schließlich überlegen wir uns noch, dass die Abbildungen zueinander invers sind.

Da jeder Alkoven A der Schnitt aller A umfassenden Halbräume zu Wänden von A ist, ist

$$A(\Pi(B)) = B.$$

Ist umgekehrt $\Phi \subset R$ eine Basis mit Alkoven $A = A(\Phi)$, so ist

$$R^+(\Phi) = \{\alpha \in R \mid \langle A, \alpha^\vee \rangle > 0\}$$

also

$$\Pi(A(\Phi)) \subset R^+(\Phi).$$

Aber Φ ist die einzige Teilmenge von $R^+(\Phi)$, die auch Basis von R ist. Also

$$\Pi(A(\Phi)) = \Phi.$$

□

Lemma 3.3.3.

Ist R Wurzelsystem, $\Pi \subset R$ eine Basis von R und $R^+ = R^+(\Pi)$ das System positiver Wurzeln, so gilt für jedes Element α in der Basis Π

$$s_\alpha R^+ = (R^+ \setminus \{\alpha\}) \cup \{-\alpha\}$$

Beweis.

Offenbar gilt $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$. Sei $\beta \in R^+$ und $\beta \neq \alpha$. Dann liegt die Wurzel

$$s_\alpha(\beta) = \beta - \langle \beta, \alpha^\vee \rangle \alpha$$

wieder in den positiven Wurzeln R^+ , da alle Koeffizienten der Wurzel $s_\alpha(\beta)$ entweder nicht-positiv oder nicht-negativ sein müssen. β enthält

aber wenigstens eine von α verschiedene Wurzel in Π , damit ist wenigstens ein Koeffizient in der Entwicklung von $s_\alpha(\beta)$ bezüglich der Basis Π positiv und somit die ganze Wurzel positiv. \square

Lemma 3.3.4.

Gegeben ein Wurzelsystem $R \subset V$, betrachte den folgenden Vektor

$$\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R^+} \alpha \in V.$$

Der Vektor $\rho \in V$ heißt Weylvektor. Dann gilt für alle Wurzeln $\alpha \in \Pi$, dass $s_\alpha \rho = \rho - \alpha$. Daraus folgt $\langle \rho, \alpha^\vee \rangle = 1$ für $\alpha \in \Pi$.

Beweis.

Aus Lemma 3.3.3 folgt unmittelbar $s_\alpha \rho = \rho - \alpha$ für $\alpha \in \Pi$. Dies vergleichen wir mit der üblichen Gleichung

$$s_\alpha(\rho) = \rho - \langle \alpha^\vee, \rho \rangle \alpha,$$

woraus auch $\langle \rho, \alpha^\vee \rangle = 1$ für $\alpha \in \Pi$ folgt.

Definition 3.3.5.

Eine Teilmenge R^+ eines Wurzelsystems heißt ein System positiver Wurzeln, wenn sie die folgenden beiden Bedingungen erfüllt:

- (a) Für jede Wurzel $\alpha \in R$ gilt: $\alpha \in R^+ \iff (-\alpha) \notin R^+$.
- (b) Aus $\alpha, \beta \in R^+$ und $\alpha + \beta \in R$ folgt $\alpha + \beta \in R^+$.

Satz 3.3.6.

Sei R ein Wurzelsystem. Die Abbildung

$$\Pi \mapsto R^+(\Pi)$$

definiert eine Bijektion zwischen der Menge aller Basen und der Menge aller Systeme positiver Wurzeln in R .

Beweis.

- Die Abbildung ist injektiv, denn $\Pi \subset R^+(\Pi)$ sind genau die Elemente, nicht Summe von zwei Elementen in $R^+(\Pi)$ sind. Dies sieht man so: sicher kann man kein $\alpha \in \Pi$ als nicht-triviale Summe zweier Elemente in $R^+(\Pi)$ schreiben, denn diese Elemente sind ja nicht-negativ ganzzahlige Linearkombinationen von Elementen

vin Π . Sei umgekehrt $\beta \in R^+(\Pi) \setminus \Pi$. Dann gilt nach Lemma 3.3.3 für alle $\alpha \in \Pi$

$$s_\alpha(\beta) = \beta - \langle \beta, \alpha^\vee \rangle \alpha \in R^+(\Pi).$$

Da $\langle \beta, \alpha^\vee \rangle$ nicht für alle $\alpha \in \Pi$ verschwinden kann und nicht-negativ ist, ist

$$\beta = \langle \beta, \alpha^\vee \rangle \alpha + s_\alpha(\beta)$$

tatsächlich nicht-triviale Summe zweier Elemente in $R^+(\Pi)$.

- Die Abbildung ist surjektiv: sei R^+ ein System positiver Wurzeln und Π eine Basis von R , für die $R^+ \cap R^+(\Pi)$ maximal ist. Wäre $R^+ \neq R^+(\Pi)$, so gäbe es $\alpha \in \Pi$ mit $\alpha \notin R^+$. Dann hätte aber $R^+(s_\alpha \Pi) \cap R^+$ nach Lemma 3.3.3 noch mehr Elemente als $R^+ \cap R^+(\Pi)$, im Widerspruch zur Wahl von Π .

Korollar 3.3.7.

(i) Jede Wurzel eines Wurzelsystems R gehört zu mindestens einer Basis von R , denn jede Spiegelebene ist Wand von wenigstens einer Weylkammer.

(ii) Sind Π, Π' zwei Basen eines Wurzelsystems R , so gilt es genau ein Element der Weylgruppe $w \in W(R)$ mit $w\Pi = \Pi'$. Denn die Weylgruppe operiert nach Satz 3.1.5 (iii) transitiv und frei auf ihren Weylkammern.

Ist eine Basis Π eines Wurzelsystems fest gewählt, so nennt man die Elemente von Π auch einfache Wurzeln, die zugehörigen Kowurzeln einfache Kowurzeln, die zugehörigen Spiegelungen einfache Spiegelungen und die Weylkammer $A(\Pi)$ die dominante Weylkammer.

3.4 Klassifikation von Wurzelsystemen

Definition 3.4.1.

Gegeben ein Wurzelsystem R mit Basis Π , definiert man seine Cartan-Matrix als die $\Pi \times \Pi$ -Matrix

$$C(R) = (\langle \alpha, \beta^\vee \rangle)_{\alpha, \beta \in \Pi}$$

Wegen Korollar 3.3.7 (ii) hängt diese Matrix nicht von der Wahl der Basis ab.

Bemerkung 3.4.2.

(i) Eine Cartan-Matrix hat die folgenden Eigenschaften:

- (a) Alle Diagonalelemente sind gleich zwei, da $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$ gilt.
- (b) Nach Satz 3.1.7 (ii) sind die Einträge außerhalb der Diagonalen nicht-positiv und nach Bemerkung 3.2.2 ganzzahlig.
- (c) Wegen $\langle \alpha_j, \alpha_i^\vee \rangle = \frac{2(\alpha_j, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)}$, gilt

$$\langle \alpha, \beta^\vee \rangle = 0 \iff \langle \beta, \alpha^\vee \rangle = 0.$$

(d) Da V ein Euklidischer Vektorraum ist, ist $\det C(R) > 0$.

(ii) Graphisch stellt man Cartan-Matrizen durch Dynkin-Diagramme dar: Elemente von Π entsprechen Punkten, die durch $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle \langle \beta, \alpha^\vee \rangle$ -viele Striche verbunden werden. Ein Pfeil zeigt auf die kürzere Wurzel (bezüglich eines W -invarianten Skalarprodukts).

Beispiel 3.4.3.

- (i) Für die Cartan-Matrix [2] hat man das Dynkin-Diagramm \circ . Dies gibt das Wurzelsystem für $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ (cf. Beispiel 3.1.4 (i)).
- (ii) Für das Wurzelsystem aus Beispiel 3.2.7 kann man als einfache Wurzeln wählen:

$$\Pi = \{e_i - e_{i+1}, i = 1, \dots, n - 1\}$$

Wir geben auch Cartan-Matrix und Dynkin-Diagramm an:

Cartan-Matrix

Dynkin-Diagramm

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & -1 & 2 & -1 & & \\ & & & -1 & 2 & & \\ 0 & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{c} 0-0-0-\dots-0-0 \\ \\ \\ n-1 \text{ Knoten} \end{array}$$

- (iii) Insbesondere für $n = 2$ die Cartan-Matrix gleich $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, was das zweite Wurzelsystem in Beispiel 3.1.4 (ii) beschreibt. Für das letzte dort gegebene Beispiel haben wir die folgende Cartan-Matrix und das folgende Dynkin-Diagramm:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad 0 \cong 0.$$

Das Wurzelsystem wird auch mit G_2 bezeichnet.

Definition 3.4.4.

(i) Zwei Wurzelsysteme $R \subset V$ und $R' \subset V'$ über einem Körper k heißen isomorph, wenn es einen Isomorphismus

$$\varphi : V \rightarrow V'$$

von Vektorräumen gibt mit $\varphi(R) = R'$.

(ii) Sind $R_1 \subset V_1$ und $R_2 \subset V_2$ Wurzelsysteme über demselben Körper, so definieren wir ihre Summe als

$$R_1 \oplus R_2 = (R_1 \times \{0\}, \{0\} \times R_2) \subset V_1 \oplus V_2.$$

Sie ist wieder ein Wurzelsystem.

(iii) Ein Wurzelsystem heißt unzerlegbar, falls es nicht leer ist und nicht isomorph zu einer Summe nicht-leerer Wurzelsysteme. Andernfalls heißt es zerlegbar.

Satz 3.4.5.

Ist $R \subset V$ ein Wurzelsystem, so gibt es genau eine Zerlegung $R = R_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} R_n$ derart, dass R_i ein unzerlegbares Wurzelsystem in $\text{Span}(R_i)$ ist und dass gilt

$$R \cong R_1 \oplus \dots \oplus R_n.$$

Diese Zerlegung entspricht der Zerlegung des Dynkin-Diagramms in Zusammenhangskomponenten.

Beweis.

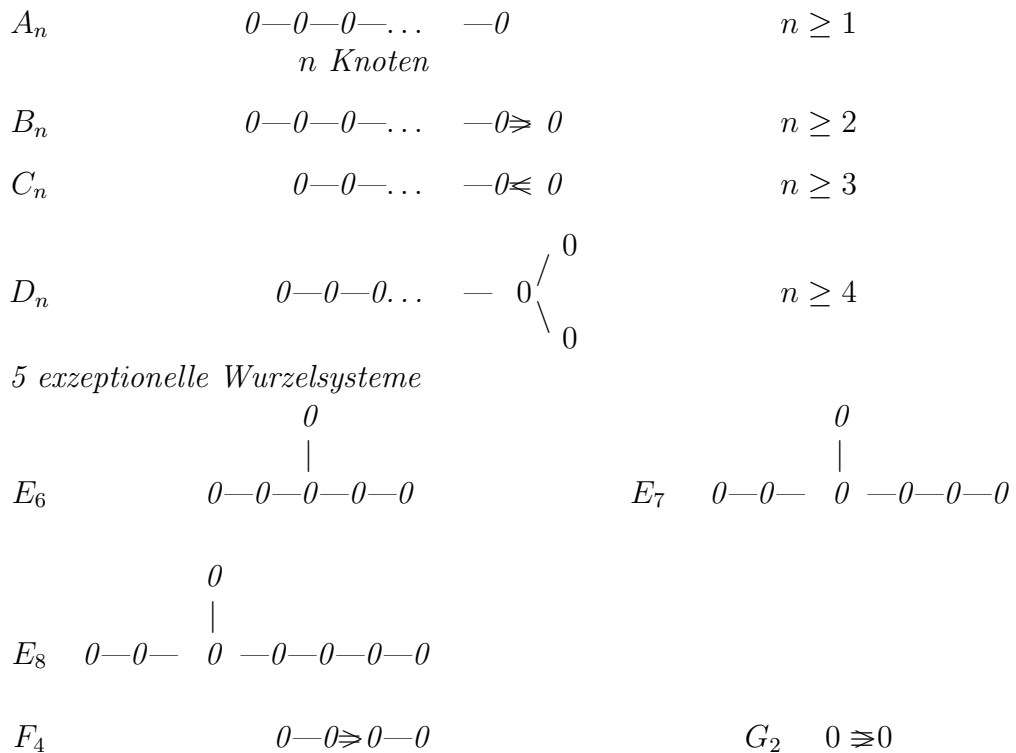
Definiere auf R die kleinste Äquivalenzrelation, für die aus $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle \neq 0$ folgt, dass $\alpha \sim \beta$. Die Äquivalenzklassen leisten das Gewünschte. \square

Man kann nun den folgenden Klassifikationssatz beweisen:

Theorem 3.4.6 (Cartan, Killing).

Sei k ein Körper der Charakteristik Null. Die Dynkin-Diagramme der unzerlegbaren Wurzelsysteme über k (bis auf Isomorphismus) sind die der folgenden Liste:

vier klassische Serien



Bemerkung 3.4.7.

Diese unzerlegbaren Wurzelsysteme treten genau als die Wurzelsysteme von einfachen Lie-Algebren auf, womit Satz 1.1.11 gezeigt ist.

4 Darstellungen halbeinfacher Lie-Algebren

4.1 Gewichte

Definition 4.1.1. Sei \mathfrak{g} eine halbeinfache komplexe Lie-Algebra und \mathfrak{h} eine Cartan-Subalgebra von \mathfrak{g} .

- (i) Die Elemente des Dualraums \mathfrak{h}^* heißen auch Gewichte von \mathfrak{g} (bezüglich der Cartan-Subalgebra \mathfrak{h}).
- (ii) Für jede Darstellung V von \mathfrak{g} definiert man den Gewichtsraum zum Gewicht $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ durch

$$V_\lambda = \{v \in V \mid Hv = \lambda(H)v \quad \forall H \in \mathfrak{h}\}$$

Ist $V_\lambda \neq 0$, so heißt λ ein Gewicht der Darstellung V . Für Menge aller Gewichte der Darstellung V schreiben wir $P(V)$.

Beispiel: Die Gewichte der adjungierten Darstellung sind genau die Wurzeln und der Nullvektor in \mathfrak{h}^* .

(iii) Für jedes System positiver Wurzeln definieren wir eine Halbordnung auf \mathfrak{h}^* durch

$$\lambda \geq \mu \iff \lambda - \mu \in \mathbb{N}R^+.$$

Ein bezüglich dieser Halbordnung größtes Element λ in $P(V)$ – d.h. $\lambda - \mu \in \mathbb{N}R^+$ für alle $\mu \in P(V)$ – heißt auch das höchste Gewicht der Darstellung V bezüglich R^+ . Das höchste Gewicht muss nicht existieren, aber wenn es existiert, so ist es eindeutig. (Man beachte, dass für eine Menge M mit Halbordnung \geq bei einem größten Element λ für alle $\mu \in M$ die Beziehung $\lambda \geq \mu$ gelten muss. Für ein maximales Element λ muss dagegen aus $\mu \geq \lambda$ folgen, dass $\lambda = \mu$, aber nicht jedes Element μ muss in einer Beziehung zu λ stehen. Entsprechend sind größte Elemente eindeutig, maximale Elemente aber nicht unbedingt.)

(iv) Man nennt

$$L^w = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{Z} \quad \forall \alpha \in R\}$$

das Gitter der ganzen Gewichte.

Alle Wurzeln sind ganze Gewichte, $R \subset L^w$. Das Gitter L^w der ganzen Gewichte ist stabil unter der Weylgruppe.

(v) Ist $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ eine Basis des Wurzelsystems, so betrachten wir wie im Beweis von Satz 3.3.2 die fundamentalen dominanten Gewichte

$$\Lambda_i = \Lambda_{\alpha_i},$$

nämlich die zu den einfachen Kowurzeln $\alpha_j^\vee \in \mathfrak{h}$ duale Basis in \mathfrak{h}^* . Es gilt also für die fundamentalen dominanten Gewichte

$$\langle \Lambda_i, \alpha_j^\vee \rangle = \delta_{ij}.$$

Die fundamentalen dominanten Gewichte bilden eine \mathbb{Z} -Basis für das Gitter der ganzen Gewichte.

Wir nennen

$$X^+(R^+) = \mathbb{N}\Lambda_1 + \dots + \mathbb{N}\Lambda_r = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{N} \quad \text{für alle } \alpha \in R^+\}$$

die dominanten ganzen Gewichte. $X^+(R^+)$ ist der Schnitt des Gitters L^w mit der bezüglich R^+ dominanten Weylkammer.

Wir interessieren uns für die Klassifikation endlich-dimensionaler komplexer Darstellungen der halbeinfachen komplexen Lie-Algebra \mathfrak{g} . Wegen des Satzes von Weyl 2.3.6 können wir uns dabei auf einfache Darstellungen beschränken. Wir werden nun sehen, dass deren Isomorphieklassen in Bijektion zu den dominanten einfachen Gewichten stehen.

Lemma 4.1.2.

Sei V eine Darstellung der halbeinfachen Lie-Algebra \mathfrak{g} , dann gilt

$$\mathfrak{g}_\alpha V_\lambda \subset V_{\lambda+\alpha} \quad \forall \alpha \in R, \lambda \in \mathfrak{h}^*.$$

Beweis.

Wir betrachten zunächst die Gleichung

$$HXv = [H, X]v + XHv.$$

für alle $H \in \mathfrak{h}$, $X \in \mathfrak{g}$ und $v \in V$. Für $v \in V_\lambda$ gilt $Hv = \lambda(H)v$; für $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ ist $[H, X] = \alpha(H)X$, also

$$HXv = \alpha(H)Xv + X\lambda(H)v = (\lambda(H) + \alpha(H))Xv.$$

□

Lemma 4.1.3.

Betrachte in \mathfrak{g} die beiden Unteralgebren $\mathfrak{n} = \bigoplus_{\alpha \in R^+} \mathfrak{g}_{-\alpha}$ und $\mathfrak{n}^+ = \bigoplus_{\alpha \in R^+} \mathfrak{g}_\alpha$.

Sei V eine \mathfrak{g} -Darstellung und $v \in V_\lambda$ ein Gewichtsvektor derart, dass $\mathfrak{n}^+v = 0$. Dann ist die von v erzeugte \mathfrak{n} -Unterdarstellung $W \subset V$ schon eine \mathfrak{g} -Unterdarstellung und es gilt $W_\lambda = \mathbb{C}v$ sowie $W = \bigoplus_{\mu \leq \lambda} W_\mu$.

Beweis.

Aus Lemma 4.1.2 folgt sofort, dass $W \cap V_\lambda = \mathbb{C}v$ sowie $W = \bigoplus_{\mu \leq \lambda} W_\mu$. Es kommt also darauf an, zu zeigen, dass

$$XW \subset W \quad \text{für alle } X \in \mathfrak{b} := \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+.$$

Betrachte für $r \in \mathbb{N}$ den Unterraum

$$W(r) := \text{span}_{\mathbb{C}}\{Y_1 \dots Y_i v \mid i \leq r, Y_i \in W\}.$$

Sicher ist $W = \bigcup W(r)$, und wir wollen mit Induktion nach r zeigen, dass $XW(r) \subset W(r)$. Für $r = 0$ folgt aus den Annahmen über die Wirkung von \mathfrak{b} sofort $XW(0) \subset W(0)$.

Für den Induktionsschritt betrachten wir

$$XY_1 \dots Y_r v = Y_1 XY_2 \dots Y_r v + [X, Y_1] Y_2 \dots Y_r v$$

Im ersten Term liegt auf Grund der Induktionsvoraussetzung $XY_2 \dots Y_r v \in W(r-1)$, also der erste Term in $W(r)$. Im zweiten Term zerlegen wir die Lie-Klammer in $[X, Y_1] = \tilde{X} + \tilde{Y}$ mit $\tilde{X} \in \mathfrak{b}$ und $\tilde{Y} \in \mathfrak{n}$ und wenden nochmals die Induktionsvoraussetzung an. □

Satz 4.1.4.

Sei V eine einfache Darstellung von \mathfrak{g} .

- (i) Besitzt die Menge $P(V)$ der Gewichte von V ein maximales Element, so ist dieses auch ein größtes Element, d.h. ein höchstes Gewicht.
- (ii) Besitzt V ein höchstes Gewicht, so ist der zugehörige Gewichtsraum ein-dimensional.
- (iii) Jede endlich-dimensionale einfache Darstellung von \mathfrak{g} hat ein höchstes Gewicht.

Beweis.

- Ist $v \in V_\lambda$ ein nicht-verschwindender Vektor mit maximalem Gewicht λ , so gilt $\mathfrak{g}_\alpha v = 0$ für alle positiven Wurzeln $\alpha \in R^+$, also gilt $\mathfrak{n}^+ v = 0$. Lemma 4.1.3 liefert uns nun eine \mathfrak{g} -Darstellung W mit $W_\lambda = \mathbb{C}v$; da V einfach ist, folgt $W = V$. Dies zeigt (i) und (ii).
- Gilt $\dim V < \infty$, so zerfällt wegen Satz 2.4.1 (ii) die Darstellung V in die direkte Summe ihrer Gewichtsräume:

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} V_\lambda.$$

Das Gewichtssystem ist endlich und nicht-leer, hat daher ein maximales Element, das wegen (i) ein höchstes Gewicht ist. \square

Satz 4.1.5.

Ist V eine endlich-dimensionale Darstellung einer halbeinfachen Lie-Algebra \mathfrak{g} , so sind alle Gewichte von V ganz, $P(V) \subset L^w$ und

$$P(V) = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid V_\lambda \neq 0\}$$

ist stabil unter der Wirkung der Weylgruppe. Insbesondere ist das höchste Gewicht, wenn es existiert, ganz und dominant.

Beweis.

Betrachte für jede Wurzel $\alpha \in R$ die Unteralgebra $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_\alpha = \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathbb{C}\alpha^\vee \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$, die isomorph zu $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ ist. Aus der Darstellungstheorie von $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ folgt sofort $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{Z}$.

Wir wählen nun einen Erzeuger E_α des ein-dimensionalen Vektorraums \mathfrak{g}_α und $E_{-\alpha}$ von $\mathfrak{g}_{-\alpha}$. Für $v \in V_\lambda$ und $v \neq 0$, setzen wir $m = \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle$. Aus der Darstellungstheorie von $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_\alpha$ folgt

$$\begin{aligned} (E_{-\alpha})^m v &\neq 0 \quad \text{falls } m \geq 0 \\ (E_\alpha)^m v &\neq 0 \quad \text{falls } m \leq 0. \end{aligned}$$

In jedem Fall ist $V_{\lambda-m\alpha} \neq 0$, also

$$s_\alpha(\lambda) = \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha = \lambda - m\alpha$$

ein Gewicht der Darstellung V .

Ist nun das Gewicht $\lambda \in P(V)$ nicht dominant, so gibt es $\alpha \in \Pi$ mit $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle < 0$. Es liegt dann auch $s_\alpha(\lambda) = \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha$ in $P(V)$ und $s_\alpha(\lambda) > \lambda$. Also kann λ nicht maximal gewesen sein. Es folgt, dass die maximalen Gewichte endlich-dimensionaler Darstellungen dominant sind. \square

Satz 4.1.6. *Seien V und V' einfache Darstellungen mit demselben höchsten Gewicht λ . So sind V und V' isomorph.*

Beweis.

Seien $v \in V_\lambda$ und $v' \in V'_\lambda$ von Null verschiedene Vektoren und W der in $V \oplus V'$ von (v, v') erzeugte Untermodul. Nach Lemma 4.1.3 ist W direkte Summe seiner Gewichtsräume und $W_\lambda = \mathbb{C}(v, v')$.

Jede echte Unterdarstellung U von W ist direkte Summe ihrer Gewichtsräume und liegt in

$$\bigoplus_{\mu \neq \lambda} W_\mu.$$

Bezeichne mit pr_1 die Projektion von $V \oplus V'$ auf V und mit pr_2 die Projektion von $V \oplus V'$ auf V' , die wir natürlich auch auf Unterräumen von $V \oplus V'$ einschränken können. Es gilt sicher $pr_1(U) \neq V$ und $pr_2(U) \neq V'$. Da die Darstellungen V und V' einfach sind und die Bilder unter den Projektionen Unterdarstellungen, folgt $pr_1(U) = 0$ und $pr_2(U) = 0$, also $U = 0$. Also ist auch W eine einfache Darstellung.

Das Schursche Lemma impliziert jetzt, dass $pr_1 : W \rightarrow V$ und $pr_2 : W \rightarrow V'$ Isomorphismen sind, da beide Abbildungen nicht null sind. Daher gilt auch die Isomorphie $V \cong V'$.

Wir fassen die erzielten Ergebnisse zusammen und fügen eine zusätzliche Aussage zu:

Theorem 4.1.7.

Sei \mathfrak{g} eine halbeinfache Lie-Algebra über \mathbb{C} . Dann sind die einfachen \mathfrak{g} -Darstellungen in Bijektion zu den ganzen dominanten Gewichten.

Wir müssen nur noch zeigen, dass jedes ganze dominante Gewicht als höchstes Gewicht einer irreduziblen Darstellung auftritt. Dazu brauchen wir als Hilfsmittel den Begriff der universellen einhüllenden Algebra.

4.2 Die universelle einhüllende Algebra

Definition 4.2.1.

Sei \mathfrak{g} eine Lie-Algebra über einem Körper k . Eine (universelle) einhüllende Algebra von \mathfrak{g} ist ein Paar (U, can) , wobei U eine assoziative unital k -Algebra ist (die durch den Kommutator auch die Struktur einer Lie-Algebra bekommt) und

$$\text{can} : \mathfrak{g} \rightarrow U$$

ein Homomorphismus von Lie-Algebren, so dass die folgende universelle Eigenschaft erfüllt ist: gegeben eine unital assoziative k -Algebra A und ein Homomorphismus von Lie-Algebren

$$\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow A$$

gibt es genau einen Homomorphismus von unitalen k -Algebren $\tilde{\varphi} : U \rightarrow A$, so dass gilt $\varphi = \tilde{\varphi} \circ \text{can}$. Als Diagramm geschrieben:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\text{can}} & U \\ & \searrow \varphi & \downarrow \exists! \tilde{\varphi} \\ & & A \end{array}$$

Bemerkung 4.2.2.

- (i) Mit den bei universellen Eigenschaften üblichen Argumenten zeigt man, dass eine Lie-Algebra bis auf kanonische Isomorphie höchstens eine einhüllende Algebra besitzt.
- (ii) Wir bringen einige Beispiele. Ist die Lie-Algebra null-dimensional, $\mathfrak{g} = 0$, so ist die einhüllende Algebra gerade der zu Grunde liegende Körper $U = k$. Ist die Lie-Algebra ein-dimensional, $\mathfrak{g} = kX$, so ist der Polynomring $U = k[X]$ mit der Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \text{can} : & \mathfrak{g} & \rightarrow k[X] \\ & aX & \mapsto aX. \end{array}$$

eine einhüllende Algebra. Man darf sich also ruhig einhüllende Algebren als Verallgemeinerungen von Polynomringen auf "nicht-kommutierende Variable" vorstellen.

Lemma 4.2.3.

Sei $\text{can} : \mathfrak{g} \rightarrow U$ eine einhüllende Algebra von \mathfrak{g} . Die Einschränkung mittels can vermittelt eine Äquivalenz von Kategorien.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Moduln über der unitalen} \\ k\text{-Algebra } U \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} \text{Darstellungen der Lie-} \\ \text{Algebra } \mathfrak{g} \end{array} \right\}$$

Beweis.

Eine Darstellung (V, ρ) von \mathfrak{g} ist nach Definition ein k -Vektorraum V und ein Lie-Algebrenhomomorphismus

$$\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}_k(V)$$

Ein U -Modul (V, φ) ist nach Definition ein k -Vektorraum V und ein Homomorphismus assoziativer unitaler k -Algebren

$$\varphi : U \rightarrow \text{End}_k(V)$$

Die Äquivalenz ist daher als Abbildung von \mathfrak{g} -Darstellungen zu U -Moduln

$$(V, \rho) \mapsto (V, \tilde{\rho}),$$

wobei $\tilde{\rho} \circ \text{can} = \rho$ gilt und $\tilde{\rho}$ nach der universellen Eigenschaft existiert. Die Umkehrabbildung von U -Moduln zu \mathfrak{g} -Darstellungen ist

$$(V, \varphi) \mapsto (V, \varphi \circ \text{can}).$$

□

Jede Lie-Algebra hat insbesondere die triviale Darstellung auf dem Grundkörper k . Wir bekommen also einen Algebrenhomomorphismus

$$\epsilon : U(\mathfrak{g}) \rightarrow k$$

mit $\epsilon(X) = 0$ für alle $X \in \mathfrak{g}$, die sogenannte Augmentation. Der Kern der Augmentation ϵ ist ein beidseitiges Ideal von $U(\mathfrak{g})$, das Augmentationsideal:

$$U^+ = \ker \epsilon.$$

Unser nächstes Ziel ist das folgende

Theorem 4.2.4 (Poincaré–Birkhoff–Witt).

(i) Jede Lie-Algebra \mathfrak{g} besitzt eine universelle einhüllende Algebra $U(\mathfrak{g})$.

(ii) Ist $(X_i)_{i \in I}$ eine Basis von \mathfrak{g} und \leq eine totale Ordnung auf der Indexmenge I , so bilden die Monome:

$$\text{can}(X_{i(1)}) \dots \text{can}(X_{i(r)}) \quad \text{mit } i(1) \leq i(2) \leq \dots \leq i(r) \quad \text{und } 0 \leq r$$

eine k -Basis von $U(\mathfrak{g})$. Hierbei ist für $r = 0$ das leere Monom gemeint, das das neutrale Element $1 \in U(\mathfrak{g})$ der Algebra ergibt.

Startpunkt der Konstruktion von $U(\mathfrak{g})$ ist die Tensoralgebra:

Definition 4.2.5.

Sei V ein k -Vektorraum. Die Tensoralgebra über V ist die assoziative unital k -Algebra

$$T(V) = \bigoplus_{r \geq 0} V^{\otimes r} = k \oplus V \oplus V \otimes V \oplus \dots$$

mit dem Tensorprodukt als Multiplikation:

$$(v_1 \otimes v_2 \cdots \otimes v_r)(w_1 \otimes \cdots \otimes w_t) := v_1 \otimes \cdots \otimes v_r \otimes w_1 \cdots \otimes w_t,$$

Auch die Tensoralgebra kann man durch eine universelle Eigenschaft charakterisieren:

Lemma 4.2.6.

Sei c die evidente Einbettung des Vektorraums V in die Tensoralgebra $T(V)$. Ist V eine unital assoziative k -Algebra und $\varphi : V \rightarrow A$ eine k -lineare Abbildung, so gibt es genau einen Homomorphismus von assoziativen Algebren

$$\hat{\varphi} : T(V) \rightarrow A$$

so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{c} & T(V) \\ \varphi \searrow & & \downarrow \hat{\varphi} \\ & & A \end{array}$$

kommutiert.

Beweis.

Da der Vektorraum V die Tensoralgebra $T(V)$ als Algebra erzeugt, gibt es nur maximal einen Algebrenhomomorphismus $\hat{\varphi}$, der durch seine Werte auf V festliegt. Wir definieren ihn auf einem allgemeinen Element von $T(V)$ durch

$$\hat{\varphi}(v_1 \otimes \dots \otimes v_r) := \varphi(v_1) \otimes \varphi(v_2) \otimes \dots \otimes \varphi(v_r)$$

□

Die Tensoralgebra kann man für jeden Vektorraum betrachten, insbesondere für eine Lie-Algebra \mathfrak{g} . Die Lie-Klammer auf \mathfrak{g} ist dann aber nicht in die Struktur der Algebra $T(\mathfrak{g})$ eingebaut. Dies leistet die folgende Konstruktion:

Satz 4.2.7.

Sei $I = I(\mathfrak{g})$ das beidseitige Ideal von $T(\mathfrak{g})$, das von allen Elementen der Form $x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$ mit $x, y \in \mathfrak{g}$ erzeugt wird. Dann ist $U(\mathfrak{g})$ mit der Abbildung

$$\text{can} : \mathfrak{g} \xrightarrow{c} T(\mathfrak{g}) \xrightarrow{p} U(\mathfrak{g})$$

eine einhüllende Algebra der Lie-Algebra \mathfrak{g} .

Beweis.

- $\text{can} = p \circ c$ ist Homomorphismus von Lie-Algebren. In der folgenden Rechnung schreiben wir die Einbettung $c : V \rightarrow T(V)$ nicht explizit:

$$\begin{aligned} \text{can}([x, y]) &= p([x, y]) = p(x \otimes y - y \otimes x) \\ &= \text{can } x \text{ can } y - \text{can } y \text{ can } x = [\text{can } x, \text{can } y], \end{aligned}$$

wobei wir bei der zweiten Gleichheit ausnutzten, dass $x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$ im Kern von p ist.

- $U(\mathfrak{g})$ wird als unitale Algebra von $\text{can}(\mathfrak{g})$ erzeugt, also lassen sich für jede assoziative Algebra Abbildungen $\mathfrak{g} \rightarrow A$ zu Abbildungen $U(\mathfrak{g}) \rightarrow A$ von assoziativen Algebren in höchstens einer Weise fortsetzen.
- Betrachte nun das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{c} & T(\mathfrak{g}) & \xrightarrow{p} & U(\mathfrak{g}) \\ & \searrow \varphi & \downarrow & \swarrow & \\ & & A & & \end{array}$$

wobei φ ein Lie-Algebren Homomorphismus ist. Nach Lemma 4.2.6 lässt sich φ – wie jede lineare Abbildung – eindeutig zu einer linearen Abbildung von Algebren

$$\hat{\varphi} : T(\mathfrak{g}) \rightarrow A$$

fortsetzen. Da φ aber überdies ein Homomorphismus von Lie-Algebren ist, folgt $\hat{\varphi}(I(\mathfrak{g})) = 0$. Also faktorisiert $\hat{\varphi}$ eindeutig zu einem Homomorphismus von Algebren

$$\tilde{\varphi} : U(\mathfrak{g}) \rightarrow A.$$

□

Definition 4.2.8.

Für ein Gewicht $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ betrachte in der universellen einhüllenden Algebra $U(\mathfrak{g})$ das Linksideal I_λ , das erzeugt wird von allen $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ für $\alpha \in R^+$ und von $H - \lambda(H)1$ für $H \in \mathfrak{h}$. Der Quotient $\Delta(\lambda) = U/I_\lambda$ trägt eine natürliche Struktur als Linksmodul über $U(\mathfrak{g})$ und damit nach Lemma 4.2.3 als Darstellung der Lie-Algebra \mathfrak{g} . Diese Darstellung heißt der Vermamodul von \mathfrak{g} zum höchsten Gewicht $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. Offenbar hat der Vermamodul die Gewichtsraumzerlegung

$$\Delta(\lambda) = \bigoplus_{\mu \leq \lambda} \Delta(\lambda)_\mu$$

und λ ist wirklich das höchste Gewicht von $\Delta(\lambda)$.

Man kann nun die folgenden Aussagen zeigen, die wir ohne Beweis bringen:

Satz 4.2.9.

- (i) Der Vermamodul $\Delta(\lambda)$ besitzt einen größten echten Untermodul $\text{rad } \Delta(\lambda)$.
- (ii) Wir bezeichnen mit $L(\lambda) = \Delta(\lambda)/\text{rad } \Delta(\lambda)$ den Quotientenmodul, der einfach ist. Dadurch erhalten wir die folgende Bijektion:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{h}^* & \xrightarrow{\sim} & \left\{ \begin{array}{l} \text{Einfache Höchstgewicht-Darstellungen} \\ \text{bis auf Isomorphie} \end{array} \right\} \\ \lambda & \mapsto & L(\lambda) \end{array}$$

- (iii) Der einfache Quotientenmodul ist endlich-dimensional, $\dim L(\lambda) < \infty$, genau dann, wenn das höchste Gewicht λ dominant und ganz ist, $\lambda \in X^+$.

Damit ist Theorem 4.1.7 vollständig gezeigt. Tatsächlich kann man zeigen, dass das höchste Gewicht sehr viel Information über eine einfache Darstellung enthält: insbesondere kann man aus dem höchsten Gewicht sowohl die Dimension der Darstellung als auch ihren Charakter ausrechnen, der die Darstellung eindeutig charakterisiert. Eine Darstellung dieser Sätze können wir in dieser Vorlesung leider nicht geben.

Index

- abelsche Lie-Algebra, 5
- abgeleitete Reihe, 19
- absolute Jordan-Zerlegung, 44
- absteigende Zentralreihe, 19
- ad-nilpotent, 23
- adjungierte Darstellung, 13
- Algebra, 2
- Algebren-Homomorphismus, 2
- Alkoven, 59
- Atlas, 7
- auf lösbare Lie-Algebra, 19
- Auflösbarkeitskriterium, 29
- Augmentationsideal, 79

- Basis eines Wurzelsystems, 65
- beidseitiges Ideal, 3

- Cartan-Matrix, 70
- Cartan-Unteralgebra, 49
- Cartan-Zerlegung, 50
- Casimir-Operator, 40

- Darstellung, 11
- derivierte Lie-Algebra, 19
- dominante Gewichte, 74
- dominante Weylkammer, 70
- duale Wurzel, 62
- Dynkin-Diagramme, 71

- einfache Darstellung, 12
- einfache Kowurzeln, 70
- einfache Lie-Algebra, 5
- einfache Spiegelungen, 70
- einfache Wurzeln, 70
- endliche Spiegelungsgruppe, 58
- Exponentialabbildung, 10
- exzeptionelle Lie-Algebren, 5, 72

- fundamentale Gewichte, 67

- ganze Gewichte, 74
- Gewichte, 49, 73
- Gewichtsraum, 73

- höchstes Gewicht, 16, 74
- halbeinfache Darstellung, 36
- halbeinfache Lie-Algebra, 21
- halbeinfacher Endomorphismus, 25

- Ideal, 17
- Intertwiner, 12
- invariante Bilinearform, 30
- invariante Vektoren, 38
- irreduzible Darstellung, 12

- Jacobi-Identität, 1
- Jordan-Zerlegung, 25

- Karte, 7
- Killingform, 30
- klassische Lie-Algebren, 5, 72
- Koinvarianten, 38
- kontragrediente Darstellung, 39
- Kowurzel, 53, 62

- Länge, 59
- Lie-Algebra, 1
- Lie-Gruppe, 7
- Lie-Klammer, 1
- Linksideal, 3, 17

- Mannigfaltigkeit, 7
- Morphismus von Darstellungen, 12

- negative Wurzeln, 66
- nilpotente Lie-Algebra, 19
- nilpotenter Kegel, 48

- orthogonale Lie-Algebra, 5

- PBW Theorem, 79

perfekte Lie-Algebra, 35
 positive Wurzeln, 66
 Quaternionen, 8
 Quotientendarstellung, 13
 Radikal, 20
 Rechtsideal, 3, 17
 reduktive Lie-Algebra, 31
 reduzierte Darstellung, 59
 reduziertes Wurzelsystem, 57
 Satz von Engel, 23
 Satz von Levi, 21
 Satz von Lie, 24
 Satz von Weyl, 38
 Schursches Lemma, 36
 selbstduale Darstellung, 39
 Singlett, 38
 spezielle lineare Lie-Algebra, 4
 Spiegelung, 58
 Spin, 15
 Spingruppe, 9
 Strukturkonstanten, 13
 Summe von Wurzelsystemen, 72
 symplektische Lie-Algebra, 4
 System positiver Wurzeln, 69
 Tensoralgebra, 80
 Tensorprodukt Darstellung, 41
 treue Darstellung, 11
 triviale Darstellung, 12
 unitäre Algebra, 2
 unitale Algebra, 2
 Unitaritätstrick, 38
 universelle einhüllende Algebra, 78
 Unteralgebra, 3
 Unterdarstellung, 12
 unzerlegbares Wurzelsystem, 72
 Vermamodul, 82
 Weylgruppe, 64
 Weylkammern, 59, 64
 Weylvektor, 69
 Wurzeln, 50
 Wurzelräume, 50
 Wurzelraumzerlegung, 50
 Wurzelsystem, 50, 56, 62
 Zentrum, 13, 35