

Vorlesungsnotizen zur  
**Analysis**

Wintersemester 2016/17  
und  
Sommersemester 2017

Thomas Schmidt

Version: 14. Juli 2017



# Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	1
<b>Analysis I</b>	
<b>0 Zu Grundlagen aus Logik und Mengenlehre</b>	<b>3</b>
<b>1 Zahlen, Rechnen, elementare Funktionen</b>	<b>5</b>
1.1 Zahlbereiche und Rechengrundgesetze . . . . .	5
1.2 Endliche Summen und Produkte . . . . .	8
1.3 Ungleichungen und Anordnung von $\mathbb{R}$ . . . . .	10
1.4 Die natürlichen Zahlen in $\mathbb{R}$ . . . . .	12
1.5 Die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ ; Wurzeln, $e$ und $\pi$ . . . . .	14
1.6 Allgemeine Potenzen und Logarithmen . . . . .	17
1.7 Kreisfunktionen . . . . .	20
1.8 Komplexe Wurzeln und der Fundamentalsatz der Algebra . . . . .	24
<b>2 Folgen und Reihen</b>	<b>25</b>
2.1 Grenzwerte von Folgen, Grenzwertrechnung . . . . .	25
2.2 Konvergenzkriterien für Folgen, Häufungswerte von Folgen . . . . .	29
2.3 Reihen (und unendliche Produkte) . . . . .	34
2.4 Spezielle Konvergenzkriterien für Reihen, Umordnungen und Produkte von Reihen	38
2.5 Konvergenz von Funktionenfolgen und Funktionenreihen . . . . .	43
2.6 Potenzreihen und komplexe Exponentialfunktion . . . . .	46
<b>3 Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit</b>	<b>55</b>
3.1 Allgemeine Grenzwerte . . . . .	55
3.2 Stetige Funktionen einer Variablen . . . . .	58
3.3 Drei Hauptsätze über stetige Funktionen . . . . .	61
<b>4 Differentialrechnung mit Funktionen einer Variablen</b>	<b>65</b>
4.1 Definition und Berechnung von Ableitungen . . . . .	65
4.2 Ableitungskriterien für Extremstellen, Monotonie und Konvexität . . . . .	70
4.3 Der Schrankensatz und Anwendungen der Differentialrechnung . . . . .	77

# Analysis II

<b>4</b>	<b>Differentialrechnung mit Funktionen einer Variablen (Fortsetzung)</b>	
4.4	Taylor-Entwicklung . . . . .	81
<b>5</b>	<b>Integration von Funktionen einer Variablen</b>	<b>87</b>
5.1	Definition und grundlegende Eigenschaften des Riemann-Integrals . . . . .	87
5.2	Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, Integrationstechniken . . . . .	92
5.3	Uneigentliche Integrale, Parameter-abhängige Integrale . . . . .	98
5.4	Integral-Mittelwerte und -Ungleichungen . . . . .	105
5.5	Integrale und Reihen . . . . .	106
5.6	Ausblick: Allgemeinere Integralbegriffe . . . . .	109
<b>6</b>	<b>Metrische und topologische Konzepte, allgemeine stetige Funktionen</b>	<b>111</b>
6.1	Metrische und normierte Räume . . . . .	111
6.2	Topologische Grundbegriffe . . . . .	119
6.3	Kompaktheit und Gleichmäßigkeit . . . . .	126
<b>7</b>	<b>Nachträge zur Differential- und Integralrechnung einer Variablen</b>	<b>137</b>
7.1	Gewöhnliche Differentialgleichungen (kurze Einführung) . . . . .	137
7.2	Fourier-Reihen (kurze Einführung) . . . . .	142
<b>8</b>	<b>Differentialrechnung mit Funktionen mehrerer Variablen</b>	<b>149</b>
8.1	Partielle Ableitungen, Richtungsableitungen, totale Ableitung, . . . . .	149
8.2	Extremstellenbestimmung bei Funktionen mehrerer Variablen . . . . .	161
8.3	Der Umkehrsatz und der Satz über implizite Funktionen . . . . .	170
8.4	Ableitungen zweiter und höherer Ordnung, Satz von Taylor, konvexe Funktionen . . . . .	177
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>187</b>

<p><b>Warnung: Diese Notizen umfassen nicht den vollständigen Vorlesungsstoff!</b>          Falls Sie Fehler (jeglicher Art) finden oder sonstige Hinweise haben, bitte ich Sie, mir dies entweder persönlich oder unter <a href="mailto:thomas.schmidt@math.uni-hamburg.de">thomas.schmidt@math.uni-hamburg.de</a> mitzuteilen.</p>
--

# Kapitel 0

## Zu Grundlagen aus Logik und Mengenlehre

Die Analysis kann, wie die ganze Mathematik, mittels **logischer Schlüsse** von einem System unbeweisbarer Grundannahmen, sogenannter **Axiome**, aus aufgebaut werden. Allgemein bewährte und akzeptierte Grundlage ist dabei (trotz gewisser Unvollständigkeitsprobleme) das **Zermelo-Fraenkel-Axiomensystem der Mengenlehre** Cantors (für die Analysis immer samt Auswahlaxiom; siehe unten). Hier wird weder auf die Grundlagen der Logik noch auf die der Mengenlehre im Detail eingegangen, sondern es werden im Folgenden nur grundlegende Notationen und Operationen zusammengestellt.

**Bemerkungen (grundlegende logische Operationen).**

(1) Aus Aussagen  $A$  und  $B$  (die entweder wahr oder falsch sein können) lassen sich die folgenden neuen Aussagen gewinnen:

- Nicht  $A$ ;  $\neg A$ ,
- $A$  und  $B$ ;  $A \wedge B$ ,
- $A$  oder  $B$ ;  $A \vee B$ ,
- $A$  impliziert  $B$ ;  $B$  folgt aus  $A$ ; Sei  $A$  (gegeben). Dann (gilt)  $B$ ;  $A \implies B$ ;  $B \longleftarrow A$ ,
- Genau dann  $A$ , wenn  $B$ ;  $A$  äquivalent zu  $B$ ;  $A \iff B$ .

Die Wahrheitswerte der neuen Aussagen werden dabei (in Anbetracht der Formulierungen naheliegende) Wahrheitstabellen definiert. Die vielleicht am schwierigsten nachzuvollziehende Belegung ist die der Implikation  $A \implies B = (\neg A) \vee B$ ; diese Aussage ist nur dann falsch, wenn  $A$  wahr und  $B$  falsch ist, in allen (!) anderen Fällen ist  $A \implies B$  wahr.

(2) Aus einer Menge  $M$  (siehe unten) und einer  $x$ -abhängigen Aussage  $A(x)$  kann man durch Verwendung des All-Quantors und des Existenz-Quantors auch folgende Aussagen gewinnen:

- Für alle  $x \in M$  gilt  $A(x)$ ;  $\forall x \in M: A(x)$ ;  $\bigwedge_{x \in M} A(x)$ ,
- Es gibt ein  $x \in M$  mit  $A(x)$ ;  $\exists x \in M: A(x)$ ;  $\bigvee_{x \in M} A(x)$ .

Dabei bedeutet ‚ein  $x$ ‘ hier (und wann immer nichts anders gesagt) stets ‚mindestens ein  $x$ ‘. Die Definition dieser Bildungen fällt in den Bereich der Prädikatenlogik.

### Bemerkungen (Grundzüge der Mengenlehre).

- (1) Eine Menge  $M$  ist eine Ansammlung (endlich oder unendlich vieler) mathematischer Objekte mit gewissen axiomatischen Eigenschaften. Die Charakterisierung von Mengen erfolgt über die Element-Beziehung  $x \in M$ , gesprochen  $x$  Element (von)  $M$ , und ihre Negation  $x \notin M$ .
- (2) **Grundnotationen** der Mengenlehre beschreiben ...
  - die **leere Menge**  $\emptyset$ ,
  - die **Teil-/Obermengenbeziehung**  $M \subset N$  beziehungsweise  $N \supset M$ ,
  - die **Mengen-Gleichheit**  $M = N$  und ihre Negation  $M \neq N$ ,
  - die **echte oder strikte Teilmengenbeziehung**  $M \subsetneq N$ ,
  - Mengen mit gegebenen Elemente wie **ungeordnete Paare**  $\{x, y\}$ , endliche Mengen  $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$  und unendliche Mengen  $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ .
- (3) **Grundoperationen** mit Mengen  $M, N, M_1, M_2, \dots, M_k$  und einer Menge  $\mathcal{S}$  von Mengen sind ...
  - **Vereinigungen**  $M \cup N, M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_k, \bigcup_{M \in \mathcal{S}} M$ ,
  - **Aussonderungen**  $\{x \in M : A(x)\}$  (anhand einer  $x$ -abhängigen Aussage  $A(x)$ ), darunter als Spezialfälle **Durchschnitte**  $M \cap N := \{x \in M : x \in N\}, M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_k, \bigcap_{M \in \mathcal{S}} M$  und **Mengen-Differenzen**  $M \setminus N := \{x \in M : x \notin N\}$ ,
  - die Bildung von **Potenzmengen**  $\mathcal{P}(M)$ , die genau die Teilmengen von  $M$  (inklusive  $\emptyset$  und  $M$  selbst) als Elemente enthalten,
  - **Kartesische Produkte**  $M \times N, M_1 \times M_2 \times \dots \times M_k, M^k := M \times M \times \dots \times M$ , die **geordnete Paare**  $(x, y)$  mit  $x \in M, y \in N$  beziehungsweise  **$k$ -Tupel**  $(x_1, x_2, \dots, x_k)$  enthalten.
  - die Anwendung des **Auswahlaxioms**: Ist  $\mathcal{S}$  eine Menge paarweise disjunkter Mengen (das heißt  $\forall M \in \mathcal{S} : \forall N \in \mathcal{S} \setminus \{M\} : M \cap N = \emptyset$ ), so gibt es eine Menge, die mit jedem  $M \in \mathcal{S}$  genau ein Element gemeinsam hat.
- (4) Etliche der obigen Bildungen weisen tatsächlich schon starke Ähnlichkeiten mit Zermelo-Fraenkel-Axiomen auf, dennoch werden die tatsächlichen Axiome hier nicht diskutiert oder aufgelistet. Als **abschließende Warnung** sei nur noch festgehalten, dass es **keine Menge  $\mathcal{S}$  aller Mengen** gibt. Andernfalls könnte man nämlich durch Aussonderung auch die Menge  $\mathcal{R} := \{M \in \mathcal{S} : M \notin M\}$  bilden, und die Frage, ob  $\mathcal{R}$  sich selbst enthält, ergäbe den Widerspruch  $\mathcal{R} \in \mathcal{R} \iff \mathcal{R} \notin \mathcal{R}$ . Dieses als **Russellsches Paradoxon** bekannte Widerspruchsargument hat maßgeblich zur Entwicklung des modernen Mengenbegriffs beigetragen und das Verständnis dafür geprägt, dass man nur aus einer gegebenen Menge sinnvoll Aussonderungen vornehmen kann, im Allgemeinen aber nicht aus einer Art Allmenge.

Für alles Weitere zu diesen Grundlagen wird auf die lineare Algebra verwiesen.

# Kapitel 1

## Zahlen, Rechnen, elementare Funktionen

### 1.1 Zahlbereiche und Rechengrundgesetze

Die für die Analysis **wichtigsten Zahlbereiche** (das heißt, Mengen von Zahlen samt Rechenoperationen) sind

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{N}_0 \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}.$$

Als (mehr oder weniger) bekannt werden hier vorausgesetzt:

- **Natürliche Zahlen**  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ ,  $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,
- **ganze Zahlen**  $\mathbb{Z} = \mathbb{N}_0 \cup \{-1, -2, -3, \dots\}$ ,
- **rationale Zahlen**  $\mathbb{Q}$  (das sind alle Bruchzahlen mit Zähler aus  $\mathbb{Z}$ , Nenner aus  $\mathbb{N}$ ),
- **reelle Zahlen**  $\mathbb{R}$  (das sind alle Dezimalzahlen mit endlich oder unendlich vielen Ziffern nach dem Komma; diese entsprechen den Punkten der Zahlengeraden).

Für die Konstruktion von  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$  und  $\mathbb{Q}$  ausgehend von der Mengenlehre wird auf die lineare Algebra verwiesen. Die präzise Einführung der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  dagegen ist nicht ganz einfach und wird zentrales Thema dieses Vorlesungskapitels sein. Dazu werden bis hin zu Abschnitt [1.5](#) **zunächst verschiedene Axiome für  $\mathbb{R}$  gesammelt** (die teils auch die kleineren Zahlbereiche betreffen). Der größte obige Zahlbereich sind schließlich die **komplexen Zahlen**  $\mathbb{C}$ ; die Konstruktion von  $\mathbb{C}$  aus  $\mathbb{R}$  ist vergleichsweise einfach und wird noch in diesem Unterkapitel behandelt. Bevor dies angegangen wird, sei aber festgehalten:

**Axiom (Rechengrundgesetze, Körperaxiome).** *Sei  $\mathbb{B}$  einer der Zahlbereiche  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$ . Für  $a, b \in \mathbb{B}$  sind die Summe  $a+b \in \mathbb{B}$  und das Produkt  $a \cdot b = ab \in \mathbb{B}$  eindeutig erklärt. Je für **Addition** und **Multiplikation** gelten (mit  $a, b, c \in \mathbb{B}$ ) ...*

- die **Kommutativgesetze**  $a + b = b + a$  und  $ab = ba$ ,
- die **Assoziativgesetze**  $(a + b) + c = a + (b + c)$  und  $(ab)c = a(bc)$ ,
- die **Eigenschaften**  $a + 0 = a$  und  $a \cdot 1 = a$  der **neutralen Elemente Null und Eins**.

- die **Existenz eines Inversen**, wobei ...
  - im Fall  $\mathbb{B} \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$  zu jedem  $a \in \mathbb{B}$  genau ein  $x \in \mathbb{B}$  mit  $a + x = 0$  existiert,
  - im Fall  $\mathbb{B} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$  zu jedem  $a \in \mathbb{B} \setminus \{0\}$  genau ein  $y \in \mathbb{B}$  mit  $ay = 1$  existiert.

Für die **Verbindung von Addition und Multiplikation** gilt (mit  $a, b, c \in \mathbb{B}$ ) ...

- das **Distributivgesetz**  $(a + b)c = (ac) + (bc)$ .

Die durch  $a$  eindeutig bestimmte Zahl  $x$  in diesen Axiomen heißt **additiv Inverses** oder **Negatives** zu  $a$  und wird mit  $-a$  bezeichnet. Analog heißt  $y$  **multiplikativ Inverses** oder **Reziprokes** zu  $a$  und wird in der Form  $a^{-1}$ ,  $\frac{1}{a}$  oder  $1/a$  notiert. **Subtraktion** und **Division** können nun durch  $b - a := b + (-a)$  und  $\frac{b}{a} := b/a := a^{-1}b$  eingeführt werden. Wie aus der Schulmathematik bekannt, trifft man dann Konventionen zur Notationsvereinfachung und Klammereinsparung, führt **Potenzen** durch  $a^k := aa \dots a$  ein (wobei  $a$  auf der rechten Seite  $k \in \mathbb{N}$  mal auftritt) und erhält alle üblichen Rechenregeln. Unter anderem folgt<sup>1</sup> aus den Körperaxiomen die Gültigkeit der Äquivalenz  $ab = 0 \iff a = 0 \vee b = 0$  (mit anderen Worten also, dass ein Produkt genau dann Null ist, wenn mindestens einer seiner Faktoren Null ist).

Die **Einführung der komplexen Zahlen** wird motiviert durch die Unlösbarkeit gewisser sehr einfacher Gleichungen in  $\mathbb{R}$ . Beispielsweise besitzt die Gleichung  $x^2 = -1$  keine Lösung  $x \in \mathbb{R}$  (was hier als bekannt vorausgesetzt wird, aber mit den Körperaxiomen allein nicht bewiesen werden kann). Um dies zu beheben, postuliert man einfach die Existenz einer in  $\mathbb{R}$  nicht vorhandenen Zahl **i** mit

$$\mathbf{i}^2 = -1.$$

Um damit rechnen zu können, muss man auch Zahlen der Form  $x + \mathbf{i}y$  mit  $x, y \in \mathbb{R}$  zulassen und kommt auf folgendes Konzept:

**Definition (komplexe Zahlen).** Eine komplexe Zahl  $z$  ist ein geordnetes Paar  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  reeller Zahlen, das in der **Normalform**

$$z = x + \mathbf{i}y$$

notiert wird. Man bezeichnet  $x$  als **Realteil**  $\Re(z)$  und  $y$  als **Imaginärteil**  $\Im(z)$  von  $z$ . Komplexe Zahlen  $x + \mathbf{i}0$  mit Imaginärteil 0 werden mit den entsprechenden reellen Zahlen  $x \in \mathbb{R}$  identifiziert. Zahlen der Form  $\mathbf{i}y := 0 + \mathbf{i}y$  mit Realteil 0 heißen **rein imaginär**,  $\mathbf{i} := 0 + \mathbf{i}1$  heißt **imaginäre Einheit**. Die **Addition und Multiplikation** von komplexen Zahlen  $z = x + \mathbf{i}y$  und  $w = u + \mathbf{i}v$  (mit  $x, y, u, v \in \mathbb{R}$ ) werden definiert durch

$$z + w := (x + u) + \mathbf{i}(y + v), \quad zw := (xu - yv) + \mathbf{i}(xv + yu).$$

Die Menge  $\mathbb{R}^2$  mit diesen Konventionen und Operationen heißt der **Zahlbereich  $\mathbb{C}$  der komplexen Zahlen**.

<sup>1</sup>Beweis der behaupteten Äquivalenz. Es gilt  $a \cdot 0 + a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 = 0$ , und durch Subtraktion von  $a \cdot 0$  auf beiden Seiten ergibt sich  $a \cdot 0 = 0$ . Dies liefert im Fall  $b = 0$  die Behauptung  $ab = 0$ , und wegen Kommutativität folgt diese auch im Fall  $a = 0$ . Damit ist  $ab = 0 \iff a = 0 \vee b = 0$  gezeigt. Gilt  $ab = 0$ , so unterscheidet man die Fälle  $a = 0$  und  $a \neq 0$ . In letzterem ergibt sich unter Verwendung der gerade gezeigten Implikation  $0 = a^{-1}ab = b$ , und insgesamt gilt daher  $ab = 0 \implies a = 0 \vee b = 0$ . Dies vervollständigt den Beweis.  $\square$



**Satz.** Auch  $\mathbb{C}$  erfüllt alle oben angegebenen Körperaxiome (mit der gleichen Null und Eins wie  $\mathbb{R}$  und den von  $\mathbb{R}$  bekannten Rechenoperationen auf der Teilmenge  $\mathbb{R}$  von  $\mathbb{C}$ ). Die Gleichung  $z^2 = -1$  hat in  $\mathbb{C}$  genau die Lösungen  $z = \mathbf{i}$  und  $z = -\mathbf{i}$ .

*Beweis.* Unter Verwendung der Axiome für reelle Zahlen lassen sich fast alle benötigten Eigenschaften auch für komplexe Zahlen problemlos verifizieren. Beispielsweise weist man die Kommutativität der Addition durch die einfache Rechnung

$$z + w = (x+u) + \mathbf{i}(y+v) = (u+x) + \mathbf{i}(v+y) = w + z$$

nach (wobei wie in der Definition natürlich  $z = x + \mathbf{i}y$ ,  $w = u + \mathbf{i}v$  sein soll). Alle ähnlich einfach Rechnungen werden nun ausgelassen. Schwieriger gestaltet sich einzig der Existenznachweis für das multiplikativ Inverse zu  $z = x + \mathbf{i}y \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Hierzu benutzt man einerseits, dass für die reellen Zahlen  $x$  und  $y$ , die nicht beide gleich Null sind,  $x^2 + y^2 \neq 0$  gilt. Allein mit den Körperaxiomen kann dies aber noch nicht bewiesen werden; es wird daher erst in Abschnitt 1.3 nachgetragen. Andererseits muss man sich den Ansatz  $\frac{x}{x^2+y^2} + \mathbf{i}\frac{-y}{x^2+y^2}$  (der nur wegen  $x^2 + y^2 \neq 0$  hingeschrieben werden darf) für das Inverse herleiten. Hier im Beweis muss eine solche Herleitung aber nicht ausgeführt werden. Es reicht vielmehr, durch die Rechnung

$$(x+\mathbf{i}y)\left(\frac{x}{x^2+y^2} + \mathbf{i}\frac{-y}{x^2+y^2}\right) = \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2} + \mathbf{i}\left(\frac{-xy}{x^2+y^2} + \frac{yx}{x^2+y^2}\right) = 1$$

zu verifizieren, dass es sich tatsächlich um das gesuchte Inverse handelt.  $\square$

Im Gegensatz zu den anderen Zahlbereichen lassen sich die komplexen Zahlen nicht mehr auf der Zahlengeraden veranschaulichen, sondern sie füllen eine ganze Ebene. Man spricht von der **Gaußschen Zahlenebene** und trägt normalerweise die reellen Zahlen aus  $\mathbb{R}$  auf der horizontalen Achse, die rein imaginären Zahlen aus  $\mathbf{i}\mathbb{R}$  auf der vertikalen Achse auf.

**Definition (komplexe Konjugation).** Sei  $z = \Re(z) + \mathbf{i} \Im(z) \in \mathbb{C}$ . Die zu  $z$  (**komplex**) **konjugierte Zahl** ist

$$\bar{z} := \Re(z) - \mathbf{i} \Im(z) \in \mathbb{C}.$$

Mit der komplexen Konjugation ergibt sich die Identität  $z\bar{z} = \Re(z)^2 + \Im(z)^2 =: |z|^2 \in \mathbb{R}$  für  $z \in \mathbb{C}$ . Hieraus folgt wiederum die für Berechnungen sehr nützliche **Reziprokenformel** (für  $z = x + \mathbf{i}y \in \mathbb{C}$  mit  $x, y \in \mathbb{R}$ )

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - \mathbf{i}\frac{y}{x^2+y^2},$$

die den Ansatz im vorigen Beweis erklärt.

Zum Abschluss dieses Abschnitts sei hervorgehoben, dass der **wichtigste Gewinn beim Übergang von  $\mathbb{C}$  zu  $\mathbb{R}$  in allgemeiner Lösbarkeit polynomialer Gleichungen über  $\mathbb{C}$  besteht**. Genauer besagt der sogenannte **Fundamentalsatz der Algebra**, dass jede Gleichung

$$c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \dots + c_2 z^2 + c_1 z + c_0 = 0$$

mit  $n \in \mathbb{N}$ , Koeffizienten  $c_0, c_1, c_2, \dots, c_{n-1} \in \mathbb{C}$  und Leitkoeffizient  $c_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  mindestens eine Lösung  $z \in \mathbb{C}$  besitzt. Eng damit verbunden ist auch die Tatsache, dass jedes  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  in  $\mathbb{C}$  genau  $n$  verschiedene  $n$ -te Wurzeln (das heißt, Zahlen  $w \in \mathbb{C}$  mit  $w^n = z$ ) besitzt. Bewiesen werden diese Aussagen allerdings erst im späteren Abschnitt 1.8.

## 1.2 Endliche Summen und Produkte

**Definition (Summenzeichen, Produktzeichen).** Sei  $\mathbb{B}$  einer der Zahlbereiche  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ . Für ganze Zahlen  $m, n \in \mathbb{Z}$  mit  $m \leq n$  und  $a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_n \in \mathbb{B}$  sind dann die Ausdrücke

$$\sum_{i=m}^n a_i := a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n \in \mathbb{B}, \quad \prod_{i=m}^n a_i := a_m a_{m+1} a_{m+2} \dots a_n \in \mathbb{B}$$

mit dem Summenzeichen  $\sum$  und dem Produktzeichen  $\prod$  unabhängig von Reihenfolge und Klammerung der Summanden/Faktoren. Analog verwendet man bei beliebiger endlicher Indermenge  $I = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  mit den paarweise verschiedenen Elementen  $i_1, i_2, \dots, i_k$  die Notationen

$$\sum_{i \in I} a_i := a_{i_1} + a_{i_2} \dots + a_{i_k} \in \mathbb{B}, \quad \prod_{i \in I} a_i := a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k} \in \mathbb{B}.$$

Für  $n < m$  beziehungsweise  $I = \emptyset$  schließlich trifft man die naheliegende Konvention, dass die Summe den Wert Null und das Produkt den Wert Eins hat.

Es werden auch verschiedenste Varianten dieser Basis-Notationen verwendet, und aus den Körperaxiomen erhält man zahlreiche Rechenregeln für Summen- und Produktzeichen.

Spezielle endliche Summen, die sich leicht berechnen lassen, sind ...

- **Teleskopsummen** des Typs

$$\sum_{i=0}^{n-1} (a_i - a_{i+1}) = a_0 - a_n,$$

- arithmetische und geometrische Summen, für die in den Übungen die **arithmetische** und die **geometrische Summenformel** hergeleitet werden. Als wichtigste Fälle beinhalten diese Formeln die Summationen (mit Konvention  $q^0 := 1$ )

$$\sum_{i=1}^n i = n \frac{n+1}{2} \quad \text{und} \quad \sum_{i=0}^n q^i = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \quad \text{für } q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}.$$

Spezielle endliche Produkte sind **Teleskopprodukte** des Typs

$$\prod_{i=0}^{n-1} \frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{a_n}{a_0}.$$

Weitere Standard-Bildungen mit endlichen Produkten folgen als Definition:

**Definition (Fakultäten, Binomialkoeffizienten).** Die Fakultäten  $n!$  natürlicher Zahlen  $n \in \mathbb{N}_0$  werden definiert durch

$$n! := \prod_{i=1}^n i.$$

Für  $z \in \mathbb{C}$  und  $k \in \mathbb{N}_0$  wird der Binomialkoeffizient  $\binom{z}{k}$  (gesprochen „ $z$  über  $k$ “) definiert durch

$$\binom{z}{k} := \prod_{i=0}^{k-1} \frac{z-i}{k-i} \in \mathbb{C}.$$

Für  $k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0$  vereinbart man  $\binom{z}{k} := 0$ .

Die ersten Fakultäten sind  $0! = 1$ ,  $1! = 1$ ,  $2! = 2$ ,  $3! = 6$ ,  $4! = 24$ ,  $5! = 120$ ,  $6! = 720$ .

Im Fall  $z = n \in \mathbb{N}_0$  können Binomialkoeffizienten durch die Formel

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{für } k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1, n\} \\ 0 & \text{für } k \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1, 2, \dots, n-1, n\} \end{cases}$$

auf Fakultäten zurückgeführt werden, und es gilt stets  $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}_0$ . Außerdem lassen sich diese natürlichen Binomialkoeffizienten im sogenannten **Pascalschen Dreieck** anordnen (wobei die Koeffizienten zu gleichem  $n$  sich in der gleichen Zeile und die zu gleichem  $k$  sich auf der gleichen von rechts oben nach links unten verlaufenden Diagonale befinden, und wobei alle freien Plätze links und rechts jeweils Nullen entsprechen):

$$\begin{array}{cccccc} n = 0: & & & & & 1 \\ n = 1: & & & & 1 & 1 \\ n = 2: & & & 1 & 2 & 1 \\ n = 3: & & 1 & 3 & 3 & 1 \\ n = 4: & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ n = 5: & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \end{array}$$

Jeder Koeffizient ergibt sich dabei als Summe der beiden schräg über ihm stehenden; dies ist Ausdruck der leicht nachzurechnenden Summationsregel

$$\binom{z}{k} + \binom{z}{k+1} = \binom{z+1}{k+1},$$

die sogar für beliebige  $z \in \mathbb{C}$  und  $k \in \mathbb{Z}$  gilt.

Eine sehr **allgemeine Version des Distributivgesetzes** für Produkte von  $n$  Summen lautet

$$\prod_{k=1}^n \left( \sum_{i \in I_k} a_{k,i} \right) = \sum_{i_1 \in I_1, i_2 \in I_2, \dots, i_n \in I_n} a_{1,i_1} a_{2,i_2} \dots a_{n,i_n}.$$

Letztlich besagt diese Regel aber nur, dass man die  $n$  Klammern auf der linken Seite in der gewohnten Weise ausmultiplizieren darf. Für Potenzen einer festen Summe folgt mit rein kombinatorischen Überlegungen (nämlich dem Zählen, wie oft beim Ausmultiplizieren derselbe Term produziert wird):

**Satz (Allgemeine binomische Formel, Binomialsatz).** Für  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $a, b \in \mathbb{C}$  gilt

$$(a+b)^n = \sum_{\substack{k, \ell \in \mathbb{N}_0 \\ k+\ell=n}} \frac{n!}{k!\ell!} a^k b^\ell = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Konkret kann man die in der binomischen Formel für festes  $n$  auftretenden Binomialkoeffizienten dabei in der entsprechenden Zeile des Pascalschen Dreiecks ablesen, es gilt also beispielsweise

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

**Satz (Multinomialformel).** Für  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{C}$  gilt

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_m)^n = \sum_{\substack{k_1, k_2, \dots, k_m \in \mathbb{N}_0 \\ k_1 + k_2 + \dots + k_m = n}} \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_m^{k_m}.$$

Die Beweise der beiden letzten Sätze werden in der Vorlesung ansatzweise erläutert, an dieser Stelle aber nicht ausgeführt.

### 1.3 Ungleichungen und Anordnung von $\mathbb{R}$

**Axiom (Anordnung von  $\mathbb{R}$ ).** Für  $a, b \in \mathbb{R}$  ist  $a < b$  stets wahr oder falsch, und für  $a, b, c \in \mathbb{R}$  gelten ...

- die **Gesetze der totalen Ordnung**

$$a < b \text{ und } b < c \implies a < c,$$

es gilt stets genau eine der drei Aussagen  $a < b$ ,  $a = b$ ,  $b < a$ ,

- die **Verträglichkeit der Ordnung mit Addition/Multiplikation**

$$a < b \implies a + c < b + c,$$

$$a < b \text{ und } 0 < c \implies ac < bc,$$

$$0 < 1.$$

Als **positive Zahlen** bezeichnet man die Zahlen  $a \in \mathbb{R}$  mit  $0 < a$  und als **negative Zahlen** die  $a \in \mathbb{R}$  mit  $a < 0$ . Durch Zurückführung auf das axiomatische eingeführte Symbol  $<$  werden außerdem die anderen Ungleichungs-Symbole  $>$ ,  $\leq$  und  $\geq$  erklärt (letzteres beispielsweise durch  $a \geq b := b < a \vee a = b$ ). Man erhält dann naheliegende **Regeln für das Rechnen mit Ungleichungen**. Unter anderem bleiben neben den Ungleichungen mit  $<$  auch alle anderen Ungleichungen erhalten, wenn man auf beiden Seiten dieselbe Zahl addiert oder mit derselben positiven (!) Zahl multipliziert. Beim Übergang zum Negativen oder zum Reziproken positiver (!) Zahlen dagegen kehren sich Ungleichungen um. Für Quadrate und Quadratsummen von  $a, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  folgen die in Abschnitt 1.1 schon benutzten Ungleichungen  $a^2 \geq 0$  und  $\sum_{i=1}^n a_i^2 \geq 0$  — mit Gleichheit dann und nur dann, wenn  $a = 0$  beziehungsweise  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$  gilt.

**Auf  $\mathbb{C}$  gibt es übrigens keine ähnlich gute Ordnung.** Dies manifestiert sich unter anderem darin, dass eine Summe nicht-verschwindender Quadrate in  $\mathbb{C}$  durchaus Null ergeben kann (Beispiel:  $1^2 + i^2 = 0$ ).

**Definition (Dazwischen-Liegen, Intervalle).** Seien  $a, b, x \in \mathbb{R}$ . Man spricht davon, dass  $x$  zwischen  $a$  und  $b$  liegt, wenn  $a \leq x \leq b$  oder  $b \leq x \leq a$  gilt. Gilt sogar  $a < x < b$  oder  $b < x < a$ , so sagt man, dass  $x$  echt oder strikt zwischen  $a$  und  $b$  liegt. Ein Intervall in  $\mathbb{R}$  wird als eine Teilmenge von  $\mathbb{R}$  definiert, die mit je zwei Zahlen auch alle zwischen diesen Liegenden enthält.

Standard-Klassen von Intervallen sind (jeweils mit  $a, b \in \mathbb{R}$ ):

- **Offene Intervalle:**

$$\begin{aligned} ]a, b[ &:= (a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \quad (\text{ist} = \emptyset, \text{ wenn } b \leq a), \\ ]a, \infty[ &:= (a, \infty) := \mathbb{R}_{>a} := \{x \in \mathbb{R} : x > a\}, \\ ]-\infty, b[ &:= (-\infty, b) := \mathbb{R}_{<b} := \{x \in \mathbb{R} : x < b\}. \end{aligned}$$

- **Abgeschlossene Intervalle:**

$$\begin{aligned} [a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \quad (\text{ist} = \emptyset, \text{ wenn } b < a), \\ [a, \infty[ &:= [1, \infty) := \mathbb{R}_{\geq a} := \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}, \\ ]-\infty, b] &:= (-\infty, b] := \mathbb{R}_{\leq b} := \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}. \end{aligned}$$

- **Halboffene Intervalle:**

$$\begin{aligned} ]a, b] &:= (a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} \quad (\text{ist} = \emptyset, \text{ wenn } b \leq a), \\ [a, b[ &:= [a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} \quad (\text{ist} = \emptyset, \text{ wenn } b \leq a). \end{aligned}$$

Das Intervall  $] -\infty, \infty[ := (-\infty, \infty) := \mathbb{R}$  schließlich zählt sowohl als offen als auch als abgeschlossen, und Intervalle des Typs  $[a, b]$  heißen auch **kompakt**.

Die obigen Intervalltypen, bei denen  $a$  und  $b$  vorkommen, heißen **beschränkte Intervalle**. Sind sie  $\neq \emptyset$ , so nennt man  $a, b$  ihre **Randpunkte** und  $(b-a)$  ihre **Länge**. Die anderen Typen mit mindestens einem symbolischen Randpunkt  $\infty$  oder  $-\infty$  heißen **unbeschränkte Intervalle** mit Länge  $\infty$ .

In Abschnitt 1.5 wird klar: **Alle Intervalle in  $\mathbb{R}$  gehören zu einem der im Vorigen aufgelisteten Typen.**

**Einschub (zum Funktionsbegriff).** Seien  $D$  und  $M$  zwei Mengen. Eine **Funktion** oder **Abbildung**  $f: D \rightarrow M$  vom **Definitionsbereich**  $D$  in den **Zielbereich** oder **Wertebereich**  $M$  ist eine Zuordnungsvorschrift, die jedem  $x \in D$  einen eindeutigen Funktionswert  $f(x) \in M$  zuordnet. Mit einer Konstruktion der Mengenlehre (vergleiche mit der linearen Algebra) kann bei festem  $D$  und  $M$  die **Menge aller Funktionen von  $D$  nach  $M$**  stets gebildet werden; diese Menge wird mit  $\text{Abb}(D, M)$  oder  $M^D$  bezeichnet und im Zusammenhang mit der zweiten Notation auch als kartesisches Produkt (mit eventuell unendlich vielen Faktoren) betrachtet.

Die konkrete Angabe einer Funktion  $f: D \rightarrow M, x \mapsto f(x)$  erfolgt normalerweise, indem man die Zuordnungsvorschrift in der Form  $x \mapsto \dots$  oder  $f(x) = \dots$  mit Hilfe eines  $x$ -abhängigen Ausdrucks angibt (wofür im Laufe der Vorlesung noch sehr viele Beispiele auftreten werden).

**Definition (Signum, Betrag).** Das Vorzeichen oder Signum von  $a \in \mathbb{R}$  ist definiert als

$$\text{sgn}(a) := \begin{cases} 1 & \text{falls } a > 0 \\ 0 & \text{falls } a = 0, \\ -1 & \text{falls } a < 0 \end{cases},$$

und durch diese Vorschrift erhält man auch die Signumsfunktion  $\text{sgn}: \mathbb{R} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ . Der **(Absolut)-Betrag** von  $a \in \mathbb{R}$  und der **Betrag** von  $z \in \mathbb{C}$  werden erklärt als

$$|a| := \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{falls } a < 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad |z| := \sqrt{\Re(z)^2 + \Im(z)^2}.$$

Hiermit sind auch die **reelle Betragsfunktion**  $|\cdot|: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  und die **komplexe Betragsfunktion**  $|\cdot|: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  definiert.

### Bemerkungen.

- (1) Da  $\Re(z)^2 + \Im(z)^2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  gilt, kann die Quadratwurzel in der Definition des Betrags komplexer Zahlen stets in  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  gezogen werden. Eine formale Einführung von Wurzeln wird aber erst in Abschnitt 1.5 erfolgen.
- (2) Für  $a \in \mathbb{R}$  ergibt  $\sqrt{\Re(a)^2 + \Im(a)^2} = \sqrt{a^2} = \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{falls } a < 0 \end{cases}$  den reellen Betrag; daher sind die Definitionen des Betrags im reellen und komplexen Kontext konsistent.
- (3) Der Betrag misst den Abstand einer Zahl von Null.
- (4) Für beliebige komplexe Zahlen  $z, w, \zeta, z_j \in \mathbb{C}$  gelten die Positivität des Betrages

$$|z| \geq 0, \quad \text{mit Gleichheit nur für } z = 0,$$

die **Multiplikativität des Betrags** (Folgerung aus  $|z|^2 = z\bar{z}$ )

$$|zw| = |z||w|,$$

die **Dreiecksungleichungen** (mit einer endlichen Indexmenge  $J$ )

$$|z \pm w| \leq |z| + |w|, \quad |z - w| \leq |z - \zeta| + |\zeta - w|, \quad \left| \sum_{j \in J} z_j \right| \leq \sum_{j \in J} |z_j|$$

und die **umgekehrte Dreiecksungleichung**

$$||z| - |w|| \leq |z \pm w|.$$

Beweise der hier aufgelisteten Dreiecksungleichungen werden in den Übungen behandelt.

- (5) Für reelle Zahlen  $a \in \mathbb{R}$  gelten weitere Rechenregeln wie  $a = \operatorname{sgn}(a)|a|$  oder  $a^2 = |a|^2$ .

## 1.4 Die natürlichen Zahlen in $\mathbb{R}$

**Axiom (Eigenschaften von  $\mathbb{N}$  in  $\mathbb{R}$ ).** Für die Teilmenge  $\mathbb{N}$  von  $\mathbb{R}$  gelten:

- (I) Es ist  $1 \in \mathbb{N}$ .
- (II) Für  $n \in \mathbb{N}$  ist stets  $n+1 \in \mathbb{N}$ .
- (III) Ist  $A \subset \mathbb{N}$  mit  $1 \in A$  und  $\forall n \in \mathbb{N}: (n \in A \implies n+1 \in A)$ , so folgt  $A = \mathbb{N}$ .
- (IV) Zu jedem  $x \in \mathbb{R}$  gibt es ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n > x$ .

**Bemerkungen.**

- (1) Bei den Axiomen (I), (II), (III) handelt es sich im Wesentlichen um die sogenannten Peano-Axiome, mit denen man die Menge  $\mathbb{N}$  der natürlichen Zahlen auch ganz unabhängig vom umgebenden Zahlbereich  $\mathbb{R}$  einführen kann. Im vorliegenden Kontext sind das **Anfangsaxiom (I)** und das **Nachfolgeaxiom (II)** aber tatsächlich redundant, denn sie sind in den Axiomen des Abschnitts 1.1 bereits enthalten. Das Induktionsaxiom (III) dagegen ist von entscheidender Bedeutung, denn auf dem darin formalisierten **Induktionsprinzip** fusst die wichtige **Beweismethode der vollständigen Induktion**, die in der linearen Algebra ausführlicher thematisiert wird.
- (2) Aus dem Induktionsaxiom (III) und den Axiomen der früheren Abschnitte 1.1 und 1.3 ergeben sich die folgenden **Wohlordnungseigenschaften** von  $\mathbb{N}$ :
- (a) 1 ist die kleinste Zahl in  $\mathbb{N}$ .
  - (b) Für  $n \in \mathbb{N}_0$  ist  $n+1$  stets die kleinste Zahl in  $\{m \in \mathbb{N} : m > n\}$ .
  - (c) Für  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$  ist  $n-1$  stets die größte Zahl in  $\{m \in \mathbb{N} : m < n\}$ .
  - (d) Jede nicht-leere Teilmenge von  $\mathbb{N}$  enthält eine kleinste Zahl.

Hierbei bezeichnet man  $x$  als die kleinste Zahl in  $A$ , wenn  $x \in A$  ist und  $x \leq a$  für alle  $a \in A$  gilt. Analog ist die Bezeichnung als größte Zahl zu verstehen.

Obwohl die Aussagen (2a)–(2d) hochgradig plausibel erscheinen, erfordert ihre formale Herleitung aus den Axiomen eine Reihe von etwas kniffligen Induktionsargumenten. Die Schwierigkeit besteht dabei eben darin, dass man völlig einleuchtende Tatsachen wie die obigen noch nicht benutzen darf. Der Vollständigkeit halber werden diese Argumente hier kurz ausgeführt, für den weiteren Aufbau der Vorlesung und der Analysis insgesamt sind diese Details aber nicht von Bedeutung.

*Beweis.* Um (2a) einzusehen, zeigt man  $n \geq 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  durch vollständige Induktion. Der Induktionsanfang wird dabei durch das Axiom (I) erledigt, für den Induktionsschluss schließt man aus  $n \geq 1$  mit den Ordnungs- und Körperaxiomen auf  $n+1 > n+0 = n \geq 1$ .

Eine im Folgenden nützliche Hilfsaussage ist, dass für  $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$  stets  $m-1 \in \mathbb{N}$  gilt; dies verifiziert man formal, indem man die Menge  $\{1\} \cup \{m \in \mathbb{N} : m-1 \in \mathbb{N}\}$  durch eine erneute Anwendung des Induktionsprinzips als ganz  $\mathbb{N}$  identifiziert.

Auch der Beweis von (2b) erfolgt mit Induktion, wobei der Induktionsanfang für  $n = 0$  durch (2a) erledigt ist. Für den Induktionsschluss betrachtet man  $n \in \mathbb{N}_0$  und nimmt die Aussage in (2b) als Induktionsannahme an. Wie zuvor gilt  $n+1+1 > n+1$ . Für  $m \in \mathbb{N}$  mit  $m > n+1 \geq 1$  liefert die Hilfsaussage außerdem  $m-1 \in \mathbb{N}$ , und aus  $m-1 > n$  folgt per Induktionsannahme  $m-1 \geq n+1$ , also  $m \geq n+1+1$ . Damit ist gezeigt, dass  $n+1+1$  die kleinste Zahl in  $\{m \in \mathbb{N} : m > n+1\}$  ist, und die Induktion ist abgeschlossen.

Der Beweis von (2c) gelingt mit einem ähnlichen Induktionsargument, das erneut auf derselben Hilfsaussage basiert.

Zum Beweis von (2d) betrachtet man eine Teilmenge  $A$  von  $\mathbb{N}$ , die keine kleinste Zahl enthält. Man bildet dann  $B := \{n \in \mathbb{N} : n \leq m \text{ für alle } m \in A\}$  und erhält  $1 \in B$  nach (2a). Ist  $n \in B$ , so muss  $n \notin A$  gelten (sonst wäre  $n$  kleinste Zahl in  $A$ ), deshalb gilt  $m > n$  für alle  $m \in A$  und gemäß (2b) folgt  $m \geq n+1$  für alle  $m \in A$ , also  $n+1 \in B$ . Dies reicht, um mit dem Induktionsaxiom auf  $B = \mathbb{N}$  zu schließen. Da für  $n \in B$  schon  $n \notin A$  begründet wurde, lässt dies nur die Möglichkeit  $A = \emptyset$ .  $\square$

Die Aussagen (2b)–(2d) gelten entsprechend mit  $\mathbb{Z}$  anstelle von  $\mathbb{N}$  (wobei die kleinste Zahl dann in nicht-leeren und *von unten beschränkten* Teilmengen existiert). In  $\mathbb{Q}$  oder  $\mathbb{R}$  dagegen besitzen diese Aussagen keine Analoga.

- (3) Das letztgenannte Axiom (IV) schließlich ist als **Archmedisches Axiom** bekannt. Es impliziert, dass zu jedem  $x \in \mathbb{R}$  ein eindeutiges  $z \in \mathbb{Z}$  mit  $z \leq x < z+1$  existiert; dieses  $z$  bezeichnet man als **ganzzahligen Anteil** von  $x$  und verwendet für es die Notation  $\lfloor x \rfloor$  mit der sogenannten **Gauß-Klammer**  $\lfloor \cdot \rfloor$

Eine Konsequenz des Induktionsprinzips ist auch die Möglichkeit, Zahlenfolgen rekursiv zu definieren. Zwei bemerkenswerte Folgen sind dabei ...

- die **Fibonacci-Zahlen**, definiert durch  $F_0 := 0$ ,  $F_1 := 1$  und  $F_{n+1} := F_{n-1} + F_n$  für  $n \in \mathbb{N}$ ,
- die **Bernoulli-Zahlen**, definiert durch  $b_0 := 1$  und  $\sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} b_j = 0$  für  $2 \leq k \in \mathbb{N}$ . Diese Zahlen sind so gewählt, dass die durch  $B_k(x) := (b_\bullet + x)^k := \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} b_j x^{k-j}$  definierten Bernoulli-Polynome  $B_k$  gerade  $B_k(x+1) - B_k(x) = kx^{k-1}$  erfüllen und man durch Teleskop-Summation die folgende **allgemeine Potenzsummen-Formel** erhält:

$$\sum_{i=1}^{n-1} i^{k-1} = \frac{1}{k} [B_k(n) - b_k] = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} b_j n^{k-j} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_{\geq 2}, n \in \mathbb{N}.$$

In den Übungen werden diese speziellen Zahlenfolgen etwas genauer besprochen.

## 1.5 Die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ ; Wurzeln, $e$ und $\pi$

**Definition (Intervallschachtelungen).** Eine Intervallschachtelung in  $\mathbb{R}$  ist eine Folge nicht-leerer, kompakter Intervalle  $[a_n, b_n]$  mit  $n \in \mathbb{N}$ , so dass  $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq b_3 \leq b_2 \leq b_1$  gilt und die Intervalllängen  $b_n - a_n$  mit wachsendem  $n \in \mathbb{N}$  beliebig klein werden. Beliebig klein zu werden bedeutet dabei, dass es zu jeder reellen Zahl  $\varepsilon > 0$  ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $b_n - a_n < \varepsilon$  gibt.

**Axiom (metrische Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$ ).** Zu jeder Intervallschachtelung  $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$  gibt es eine Zahl  $c \in \mathbb{R}$ , genannt der Kern der Intervallschachtelung, so dass  $c \in [a_n, b_n]$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt.

### Bemerkungen.

- (1) Der Kern einer Intervallschachtelung ist eindeutig bestimmt.
- (2) **Der Zahlbereich  $\mathbb{Q}$  der rationalen Zahlen ist nicht vollständig;** dies sieht man beispielsweise daran, dass es (viele) Intervallschachtelungen mit Kern  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$  gibt — auch solche, bei denen die Randpunkte aller Intervalle durchaus rational sind.
- (3) **Der Zahlbereich  $\mathbb{C}$  der komplexen Zahlen ist vollständig** in dem Sinne, dass Rechteckschachtelungen  $([a_n, b_n] + i[c_n, d_n])_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{C}$  stets einen Kern besitzen.
- (4) Mit einem erst später eingeführten Konzept kann metrische Vollständigkeit von  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$  äquivalent so formuliert werden: Jede Cauchy-Folge in  $\mathbb{K}$  konvergiert in  $\mathbb{K}$ .

Als Nächstes wird eine verwandte, aber leicht andere Art von Vollständigkeit besprochen.

**Definition (Beschränktheit und Schranken).** Sei  $A$  eine Teilmenge von  $\mathbb{R}$ . Dann heißt  $M \in \mathbb{R}$  eine **obere Schranke** für  $A$ , wenn  $x \leq M$  für alle  $x \in A$  gilt. Analog heißt  $M \in \mathbb{R}$  eine **untere Schranke** für  $A$ , wenn  $x \geq M$  für alle  $x \in A$  gilt. Die Menge  $A$  heißt **von oben beschränkt**, wenn sie eine obere Schranke in  $\mathbb{R}$  besitzt, und sie heißt **von unten beschränkt**, wenn sie eine untere Schranke in  $\mathbb{R}$  besitzt. Ist  $A$  von oben und unten beschränkt, so heißt  $A$  **beschränkt**.



**Axiom (Ordnungs-Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$ ).** Zu jeder nicht-leeren, von oben beschränkten Teilmenge  $A$  von  $\mathbb{R}$  gibt es eine kleinste obere Schranke.

**Definition (Suprema).** Die kleinste obere Schranke für eine Teilmenge  $A$  von  $\mathbb{R}$  bezeichnet man als **Supremum** von  $A$  und notiert hierfür  $\sup A$  oder  $\sup_{x \in A} x$ , wobei man bei von oben unbeschränktem  $A$  symbolisch  $\sup A = \infty$  schreibt. Für die leere Menge trifft man manchmal Konventionen wie  $\sup \emptyset = -\infty$  (im Kontext von Teilmengen von  $\mathbb{R}$ ) oder  $\sup \emptyset = 0$  (im Kontext von Mengen positiver oder nicht-negativer Zahlen).

### Bemerkungen.

- (1) Aus dem Axiom folgt auch, dass jede nicht-leere, von unten beschränkte Teilmenge  $A$  von  $\mathbb{R}$  eine größte untere Schranke besitzt. Diese wird als **Infimum** von  $A$  bezeichnet und  $\inf A$  oder  $\inf_{x \in A} x$  notiert. Bei von unten unbeschränktem  $A$  vereinbart man  $\inf A = -\infty$ .
- (2) Die größte und kleinste Zahl in einer Teilmenge  $A$  von  $\mathbb{R}$ , so diese denn existieren, bezeichnet man als das **Maximum** und das **Minimum** von  $A$  und notiert sie als  $\max A$  und  $\min A$  oder als  $\max_{x \in A} x$  und  $\min_{x \in A} x$ . Falls  $\max A$  existiert, so gilt  $\sup A = \max A \in A$ , andernfalls ist  $\sup A \notin A$ .
- (3) Das Supremum einer nicht-leeren Teilmenge  $A$  von  $\mathbb{R}$  lässt sich auch folgendermaßen charakterisieren: Für  $M \in \mathbb{R}$  ist  $M = \sup A$  genau dann erfüllt, wenn  $x \leq M$  für alle  $x \in A$  gilt und es außerdem zu jedem  $L \in ]-\infty, M[$  ein  $y \in A$  mit  $y > L$  gibt.
- (4) Aus dem Axiom folgt auch die schon früher aufgestellte Behauptung, dass alle Intervalle  $I$  in  $\mathbb{R}$  von einer der in Abschnitt 1.3 angegebenen Formen sind. Im Fall  $I \neq \emptyset$ , setzt man dazu  $a := \inf I \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  und  $b := \sup I \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  und überlegt sich dann problemlos, dass  $I \in \{ ]a, b[, [a, b[, ]a, b], [a, b] \}$  gilt.
- (5) Mit erst später eingeführten Konzepten kann Ordnungs-Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$  äquivalent so formuliert werden: Jede beschränkte, monotone Folge in  $\mathbb{R}$  konvergiert in  $\mathbb{R}$ .
- (6) Schließlich sei erwähnt, dass die beiden genannten Vollständigkeitsaxiome eng verwandt sind. Setzt man die Körper- und Ordnungsaxiome der Abschnitte 1.1 und 1.3 voraus, so ist metrische Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$  zusammen mit dem Archimedischen Axiom äquivalent zu Ordnungs-Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$ .

*Beweis der Äquivalenz.* Seien zunächst metrische Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$  und das Archimedische Axiom vorausgesetzt. Zum Nachweis der Ordnungs-Vollständigkeit sei  $A$  nicht-leere und von oben beschränkte Teilmenge von  $\mathbb{R}$ . Für fixiertes  $n \in \mathbb{N}$  betrachtet man dann obere Schranken für  $A$  der Form  $\frac{z}{2^n}$  mit  $z \in \mathbb{Z}$ . Mit Hilfe des Archimedischen Axioms folgt die Existenz mindestens einer solchen Schranke, und folglich gibt es eine kleinste solche Schranke  $b_n$ . Setzt man  $a_n := b_n - \frac{1}{2^n}$ , so ist durch  $[a_n, b_n]$  mit  $n \in \mathbb{N}$  eine Intervallschachtelung gegeben (wobei das Archimedische Axiom sicherstellt, dass  $b_n - a_n = \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{n}$  beliebig klein wird). Gemäß der metrischen Vollständigkeit besitzt diese Intervallschachtelung einen Kern  $M \in \mathbb{R}$ . Jedes  $a \in A$  erfüllt  $a \leq b_n \leq M + \frac{1}{2^n} \leq M + \frac{1}{n}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , also gilt auch  $a \leq M$ , und  $M$  ist eine obere Schranke für  $A$ . Außerdem gibt es zu jedem  $n \in \mathbb{N}$  ein  $a \in A$  mit  $a > a_n$  und folglich  $a > M - \frac{1}{n}$ , so dass  $M$  die kleinste obere Schranke für  $A$  sein muss. Dies zeigt die Ordnungs-Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$ .

Für den Umkehrschluss sei Ordnungs-Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$  vorausgesetzt. Liegt dann eine Intervallschachtelung  $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$  vor, so existiert  $c := \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$ . Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gelten dann  $a_n \leq c$  und  $c \leq b_n$  (letzteres, da  $b_n$  eine obere Schranke für die gerade betrachtete Menge ist und  $c$  die kleinste obere Schranke für diese). Damit ist  $c$  der Kern der Intervallschachtelung, und metrische Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$  ist nachgewiesen. Das Archimedische Axiome erhält man jetzt durch ein Widerspruchsargument. Wäre das Axiom nicht erfüllt, so gäbe es ein  $x \in \mathbb{R}$  mit  $n \leq x$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Damit wäre  $\mathbb{N}$  von oben beschränkt, und man könnte  $M := \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$  bilden. Nun wäre  $M-1$  keine obere Schranke für  $\mathbb{N}$ , also gäbe es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $n_0 > M-1$ . Aber dann wäre  $\mathbb{N} \ni n_0+1 > M$  im Widerspruch zur Wahl von  $M$  als obere Schranke für  $\mathbb{N}$ . Somit folgt die Gültigkeit des Archimedischen Axioms.  $\square$

Mit den Vollständigkeitsaxiomen ist das in den bisherigen Abschnitten immer wieder erweiterte **Axiomensystem für  $\mathbb{R}$  nun komplett** (wobei ja schon diskutiert wurde, dass man manches noch knapper hätte fassen und ein paar Redundanzen hätte vermeiden können). Um die wesentlichen Axiome kurz und prägnant zusammenzufassen, kann man sagen:

**$\mathbb{R}$  ist vollständiger, Archimedisch angeordneter Körper.**

Bis auf Umbenennung von Zahlen ist  $\mathbb{R}$  damit übrigens eindeutig bestimmt.

Um die Analysis — wie in Kapitel 0 angekündigt — einzig auf das Zermelo-Fraenkel-Axiomensystem der Mengenlehre zu gründen, bleibt aber dennoch eine **mengentheoretische Konstruktion des Zahlbereichs  $\mathbb{R}$**  anzugeben. Tatsächlich gibt es hierzu mehrere Möglichkeiten; eine recht elementare, bei der die rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  samt Rechenoperationen und Ordnung als (aus der linearen Algebra) bekannt vorausgesetzt werden, basiert auf der Verwendung sogenannter **Dedekindscher Schnitte**. Die Grundidee besteht dabei darin, dass man eine Zahl  $x \in \mathbb{R}$  mit der Teilmenge  $\mathbb{Q}_{<x} := \{a \in \mathbb{Q} : a < x\}$  von  $\mathbb{Q}$  identifiziert. Mit der Teilmenge verbindet man gedanklich eine Aufteilung von  $\mathbb{Q}$  in die Menge  $\mathbb{Q}_{<x}$  und ihr Komplement  $\mathbb{Q}_{\geq x}$ , an der man insbesondere die „**Schnittstelle**“  $x$  ablesen kann. Zur formalen Konstruktion verwendet man diese Idee so, dass man  $\mathbb{R}$  als Menge von Teilmengen von  $\mathbb{Q}$  einführt, die die charakteristischen Eigenschaften der gerade besprochenen Mengen  $\mathbb{Q}_{<x}$  aufweisen. Genauer setzt man

$$\mathbb{R} := \left\{ A \in \mathcal{P}(\mathbb{Q}) : \begin{array}{l} \emptyset \neq A \neq \mathbb{Q} \\ \forall a \in A : \forall b \in \mathbb{Q} \setminus A : a \leq b \\ \text{Es gibt keine größte Zahl in } A. \end{array} \right\}$$

und fasst dann  $\mathbb{Q}$  als Teilmenge von  $\mathbb{R}$  auf, indem man  $q \in \mathbb{Q}$  mit  $\mathbb{Q}_{<q} \in \mathbb{R}$  identifiziert. Auf dem so definierten  $\mathbb{R}$  gilt es nun, Addition, Multiplikation und Ordnung einzuführen und dann alle Axiome zu verifizieren. Das genaue Vorgehen wird hier nicht besprochen, es treten aber keine ernsthaften Probleme auf, und man erhält dann insbesondere, dass das für  $\mathbb{R}$  angegebene Axiomensystem widerspruchsfrei ist — jedenfalls, insofern das Zermelo-Fraenkel-System dies ist.

Schließlich werden in diesem Abschnitt noch drei Anwendungen der Vollständigkeit zur Konstruktion reeller, aber nicht (notwendig) rationaler Zahlen vorgestellt:

**Satz & Definition (Wurzeln nicht-negativer reeller Zahlen).** *Zu  $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  und  $k \in \mathbb{N}$  gibt es genau ein  $b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  mit  $b^k = x$ . Diese Zahl  $b$  bezeichnet man als  **$k$ -te Wurzel** aus  $x$  und notiert für sie  $\sqrt[k]{x}$  oder  $x^{1/k}$ .*

Die hier behauptete Eindeutigkeit der Wurzel folgt dabei direkt aus den Ordnungseigenschaften von  $\mathbb{R}$ . Um die Existenz der Wurzel zu beweisen, setzt man unter Verwendung der Ordnungs-Vollständigkeit  $b := \sup\{a \in \mathbb{R}_{\geq 0} : a^k \leq x\} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Es bleibt dann  $b^k = x$  zu zeigen, und hierfür wird in der Vorlesung ein Argument angegeben, das neben elementaren Rechenregeln nur die aus den Übungen bekannte **Bernoulli-Ungleichung**

$$(1+y)^k \geq 1+ky \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{R}_{\geq -1}$$

benutzt.

**Satz & Definition (Exponentialfunktion und Eulersche Zahl  $e$ ).** *Für jedes  $x \in \mathbb{R}$  ist durch die Intervalle*

$$\left[ \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n} \right] \quad \text{mit } n \in \mathbb{N}_{>|x|}$$

eine Intervallschachtelung gegeben. Der Kern dieser Intervallschachtelung ist eine positive Zahl, die mit  $\exp(x)$  bezeichnet wird, und die zugehörige Funktion  $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  heißt (**natürliche**) **Exponentialfunktion**. Die Zahl  $e := \exp(1)$  heißt **Eulersche Zahl** oder **natürliche Basis** der Exponentialfunktion.

Zum Beweis des Satzes ist zu zeigen, dass die angegebene Folge von Intervallen tatsächlich eine Intervallschachtelung im Sinn der zu Beginn des Abschnitts gegebenen Definition bildet. Die hierfür benötigten Ungleichungen für die Intervallrandpunkte werden in der Vorlesung verifiziert — wieder mit Hilfe der obigen Bernoulli-Ungleichung.

Die näherungsweise Berechnung der irrationalen Zahl  $e$  ergibt

$$e = 2,718\dots$$

Mehr zur Bedeutung von  $e$  und  $\exp$  folgt im nächsten Abschnitt.

**Die Kreiszahl  $\pi$  entspricht der halben Länge einer Kreislinie mit Radius 1.** Diese Vorstellung von  $\pi$  ist zwar sehr wichtig und anschaulich. Für eine formale Definition gilt es sie aber zu präzisieren, wozu man wie folgt vorgehen kann:

**Satz & Definition (Kreiszahl  $\pi$ ).** Sei  $\zeta_2 := i \in \mathbb{C}$  und für  $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$  sei  $\zeta_n := \frac{\zeta_{n-1}+1}{|\zeta_{n-1}+1|}$  rekursiv definiert. Dann ist durch die Intervalle

$$\left[ 2^{n-1}|\zeta_n-1|, 2^n \frac{|\zeta_n-1|}{|\zeta_n+1|} \right] \quad \text{mit } n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$$

eine Intervallschachtelung gegeben. Ihr Kern heißt die Kreiszahl  $\pi$ .

Der Beweis, dass in der Situation des Satzes tatsächlich eine Intervallschachtelung vorliegt, kann mit einem iterativen Mittelungsverfahren in Verbindung gebracht werden. Näheres hierzu wird teils in der Vorlesung, teils in den Übungen ausgeführt.

**Geometrisch** hat man bei der Definition von  $\pi$  den Einheitskreis (d.h. den Kreis mit Radius 1 und Mittelpunkt 0 in der Gaußschen Zahlenebene) und diesem Kreis einbeschriebene und umbeschriebene **reguläre  $2^n$ -Ecke** im Hinterkopf. Es sind nämlich

- $\zeta_n$  eine primitive  $2^n$ -te Einheitswurzel,
- $|\zeta_n-1|$  und  $2^{n-1}|\zeta_n-1|$  Seitenlänge und halber Umfang des **einbeschriebenen  $2^n$ -Ecks**,
- $2 \frac{|\zeta_n-1|}{|\zeta_n+1|}$  und  $2^n \frac{|\zeta_n-1|}{|\zeta_n+1|}$  Seitenlänge und halber Umfang des **umbeschriebenen  $2^n$ -Ecks**.

**Insgesamt wird also  $\pi$  in Präzisierung der geometrischen Anschauung zwischen den halben Umfängen der  $2^n$ -Ecke eingeschachtelt.** Die näherungsweise Berechnung der irrationalen Zahl  $\pi$  ergibt

$$\pi = 3,141\dots$$

## 1.6 Allgemeine Potenzen und Logarithmen

Potenzen einer Basis  $a \in \mathbb{R}_{\neq 0}$  mit *ganzzahligen* Exponenten sind erklärt durch die Festlegungen  $a^n := \underbrace{aa \dots a}_n$  (Produkt  $n$  gleicher Faktoren  $a$ ),  $a^0 := 1$  und  $a^{-n} := (a^n)^{-1} = (a^{-1})^n$  für  $n \in \mathbb{N}$ . In Verallgemeinerung dessen definiert man Potenzen positiver Zahlen  $a \in \mathbb{R}_{>0}$  mit beliebigen *rationalen* Exponenten durch

$$a^{z/n} := \sqrt[n]{a^z} = (\sqrt[n]{a})^z,$$

wobei Existenz, Eindeutigkeit und Gleichheit der letzten beiden Terme aus Abschnitt 1.5 folgen.

Im Folgenden sollen nun sogar *reelle* Exponenten zugelassen werden:

**Satz & Definition (Potenzen mit reellen Exponenten).** Für jede positive Zahl  $a \in \mathbb{R}_{>0}$  und jedes  $r \in \mathbb{R}$  gibt es eine eindeutige positive Zahl  $a^r \in \mathbb{R}_{>0}$ , die für alle  $p, q \in \mathbb{Q}$  mit  $p < r < q$  zwischen  $a^p$  und  $a^q$  liegt. Für die so erklärten Potenzen gelten (jeweils mit  $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$  und  $r, s \in \mathbb{R}$ ) ...

- die **Rechenregeln**

$$\begin{array}{lll} a^0 = 1, & a^1 = a, & 1^r = 1, \\ a^{r+s} = a^r a^s, & a^{rs} = (a^r)^s, & (ab)^r = a^r b^r \end{array}$$

(die noch durch die Konvention  $0^r := 0$  für  $r > 0$  ergänzt seien);

- die **Monotonie-Eigenschaften**<sup>2</sup>

$$\begin{array}{l} r < s \implies a^r \leq a^s \text{ falls } a \geq 1, \\ a < b \implies a^r \leq b^r \text{ falls } r \geq 0; \end{array}$$

- die **Ungleichungen vom Bernoulli-Typ**

$$\begin{array}{ll} (1+y)^r \geq 1+ry & \text{für } y \in \mathbb{R}_{>-1}, \text{ falls } r \in \mathbb{R} \setminus ]0, 1[, \\ (1+y)^r \leq 1+ry & \text{für } y \in \mathbb{R}_{>-1}, \text{ falls } r \in [0, 1] \end{array}$$

(wobei Gleichheit einzig für  $y = 0$  oder  $r \in \{0, 1\}$  auftritt).

Beim Beweis des Satzes kann die Konstruktion der Potenz  $a^r$  durch Supremum- oder Infimum-Bildung erfolgen, und die meisten Regeln sind dann leicht zu verifizieren. Beim Beweis der Bernoulli-Ungleichung verwendet man ähnliche Argumente, wie sie im Zusammenhang mit der  $\exp(x)$  definierenden Intervallschachtelung schon auftraten. Etwas genauer wird dies in der Vorlesung erläutert.

Mit Hilfe allgemeiner Potenzen ergibt sich auch folgende Darstellung der Funktion  $\exp$ :

**Satz** (über die **natürliche Exponentialfunktion**). Die natürliche Exponentialfunktion  $\exp$  und die Eulersche Zahl  $e$  aus Abschnitt 1.5 erfüllen

$$\exp(x) = e^x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Außerdem gelten die **fundamentalen Ungleichungen**

$$\begin{array}{ll} e^x \geq 1+x & \text{für alle } x \in \mathbb{R}, \\ e^x = \frac{1}{e^{-x}} \leq \frac{1}{1-x} & \text{für alle } x \in \mathbb{R}_{<1} \end{array}$$

(mit Gleichheit einzig für  $x = 0$ ).

<sup>2</sup>Die Formeln mit  $\leq$  und  $\geq$  sind so zu verstehen, dass die Ungleichung vor dem ‚falls‘ mit der oberen Relation  $<$  gilt, wenn bei der Bedingung nach dem ‚falls‘ die obere Relation  $>$  eintritt; und entsprechend gilt die Ungleichung mit der unteren Relation  $>$ , wenn bei der Bedingung die untere Relation  $<$  eintritt.

Die erste Aussage des Satzes, die Gleichheit  $\exp(x) = e^x$ , ist dabei weniger offensichtlich, als es scheinen mag, denn tatsächlich wurde  $\exp(x)$  als Kern einer Intervallschachtelung definiert, während bei  $e^x$  zwar  $e$  aus einer Intervallschachtelung resultiert, es sich bei  $e^x$  selbst aber um eine gerade definierte Potenz mit reellem Exponenten handelt. Die Gleichung  $\exp(x) = e^x$  führt also nicht etwa eine neue Notation ein, sondern identifiziert die Funktionswerte von  $\exp$  überhaupt erst als Potenzen einer festen Zahl. Hieraus folgt die Gültigkeit des **Exponentialgesetzes**

$$\exp(x+y) = \exp(x) \exp(y) \quad \text{für } x, y \in \mathbb{R},$$

und nur deshalb ist die Bezeichnung von  $\exp$  als eine Exponentialfunktion überhaupt gerechtfertigt.

Der Beweis des Satzes wird in der Vorlesung erläutert.

In engem Zusammenhang mit Potenzen und Exponentialfunktionen steht auch folgendes Konzept:

**Satz & Definition (Logarithmen).** Für jedes  $a \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \{1\}$  und jedes  $x \in \mathbb{R}_{>0}$  gibt es genau eine Zahl  $\log_a x \in \mathbb{R}$ , genannt den *Logarithmus von  $x$  (zur Basis  $a$ )*, mit  $a^{\log_a x} = x$ . Den Logarithmus zur Basis  $e$  aus Abschnitt 1.5 nennt man den **natürlichen Logarithmus** und schreibt statt  $\log_e$  auch  $\log$  oder  $\ln$ . Für die so erklärten Logarithmen gelten (jeweils mit  $a, x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ ,  $a \neq 1$  und  $r \in \mathbb{R}$ ) ...

- **Rechenregeln** wie

$$\begin{aligned} \log_a(xy) &= \log_a x + \log_a y, & \log_a(x^r) &= r \log_a x, \\ \log_a x &= \frac{\log x}{\log a}, & x^r &= e^{r \log x}; \end{aligned}$$

- die **Monotonie-Eigenschaft**

$$x < y \implies \log_a x \leq \log_a y \text{ falls } a \geq 1.$$

Für den natürlichen Logarithmus gilt außerdem die **fundamentale Ungleichung**

$$\frac{x}{1+x} \leq \log(1+x) \leq x \quad \text{für } x \in \mathbb{R}_{>-1}$$

(mit Gleichheit einzig für  $x = 0$ ).

Auch Logarithmen erhält man durch Supremum- beziehungsweise Infimum-Bildung. Für weitere Details wird auf die Vorlesung verwiesen.

Schließlich wird in diesem Abschnitt noch kurz auf allgemeine Mittelwert-Bildungen mit Potenzen eingegangen:

**Definition (Mittelwerte positiver Zahlen).** Für  $n \in \mathbb{N}$  und ein  $n$ -Tupel positiver reeller Zahlen  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_{>0})^n$  erklärt man den **Potenz-Mittelwert** von  $x_1, x_2, \dots, x_n$  zum Exponent  $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  als

$$\text{PM}_s(x) := \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^s \right)^{\frac{1}{s}} \in \mathbb{R}_{>0}.$$

Spezialfälle dieser Bildung sind das **arithmetische Mittel**

$$\text{AM}(x) := \text{PM}_1(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \in \mathbb{R}_{>0}$$

und das **harmonische Mittel**

$$\text{HM}(x) := \text{PM}_{-1}(x) = \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^{-1} \right)^{-1} \in \mathbb{R}_{>0}.$$

Als sinnvoller Ersatz für den Potenz-Mittelwert zum Exponenten  $s = 0$ , der oben ausgeschlossen werden musste, erweist sich das **geometrische Mittel**

$$\text{GM}(x) := \text{PM}_0(x) := \left( \prod_{i=1}^n x_i \right)^{\frac{1}{n}} \in \mathbb{R}_{>0}.$$

**Satz (Ungleichung zwischen Potenz-Mittelwerten).** Für  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_{>0})^n$  mit  $n \in \mathbb{N}$  und  $r, s \in \mathbb{R}$  mit  $r \leq s$  gilt stets

$$\min\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \leq \text{PM}_r(x) \leq \text{PM}_s(x) \leq \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}.$$

Der Beweis des Satzes wird in den Übungen (sogar im etwas allgemeineren Kontext *gewichteter* Mittelwerte) behandelt. Einen wichtigen Spezialfall bildet die **AM-GM-Ungleichung**

$$\text{GM}(x) \leq \text{AM}(x) \quad \text{für } x \in (\mathbb{R}_{>0})^n.$$

## 1.7 Kreisfunktionen

Es geht in diesem Abschnitt zunächst um die Definition einer Abbildung<sup>3</sup>

$$\text{cis}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$$

von  $\mathbb{R}$  in die Einheitskreislinie

$$\mathbb{S}^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \subset \mathbb{C},$$

so dass jedes  $\vartheta \in \mathbb{R}$  auf den Endpunkt  $\text{cis } \vartheta$  eines Kreisbogens mit Anfangspunkt 1 und Länge  $|\vartheta|$  abgebildet wird. Bei positivem  $\vartheta$  wird der Kreisbogen hierbei von 1 an gegen den Uhrzeigersinn aufgetragen, bei negativem  $\vartheta$  im Uhrzeigersinn.

Die gerade gegebene, anschauliche Beschreibung der Abbildungsvorschrift ist aber noch keine präzise Definition von  $\text{cis}$ . Letztere erfolgt in Anlehnung an die Definition von  $\pi$  wie folgt:

**Satz & Definition (Kreisfunktion cis).** Sei  $\zeta_1 := -1$ ,  $\zeta_2 := \mathbf{i}$  und  $\zeta_n := \frac{\zeta_{n-1} + 1}{|\zeta_{n-1} + 1|}$  für  $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ . Dann gibt es genau eine Abbildung  $\text{cis}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ , so dass gelten:

- Für alle  $k \in \mathbb{Z}$  und  $n \in \mathbb{N}$  ist

$$\text{cis} \left( \frac{2\pi k}{2^n} \right) = \zeta_n^k.$$

<sup>3</sup>Dabei steht ‚cis‘ für ‚Cosinus plus i Sinus‘; der Grund dieser Benennung wird demnächst klar.

- Für  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$  und  $\frac{2\pi k}{2^n} < \vartheta < \frac{2\pi(k+1)}{2^n}$  liegt  $\Re(\operatorname{cis} \vartheta)$  stets zwischen  $\Re(\zeta_n^k)$  und  $\Re(\zeta_n^{k+1})$  und  $\operatorname{Im}(\operatorname{cis} \vartheta)$  stets zwischen  $\operatorname{Im}(\zeta_n^k)$  und  $\operatorname{Im}(\zeta_n^{k+1})$ .

Des Weiteren gibt es zu jedem  $z \in \mathbb{S}^1$  ein  $\vartheta \in \mathbb{R}$  mit  $\operatorname{cis} \vartheta = z$  und allgemeiner zu jedem  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  ein  $\vartheta \in \mathbb{R}$  mit  $z = |z| \operatorname{cis} \vartheta$ . Der Polarwinkel  $\vartheta$  bei dieser sogenannten **Polardarstellung** ist (nur) bis auf Addition ganzzahliger Vielfacher von  $2\pi$  eindeutig. Die **Argumentfunktion**  $\operatorname{Arg}: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow ]-\pi, \pi]$  ist die eindeutige Funktion in den eingeschränkten Wertebereich  $]-\pi, \pi]$  mit  $|z| \operatorname{cis}(\operatorname{Arg} z) = z$  für alle  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

Der Beweis des Satzes und die Konstruktion von  $\operatorname{cis}$  basieren auf der Verwendung naheliegender Intervallschachtelungen für  $\vartheta$ ,  $\Re(\operatorname{cis} \vartheta)$  und  $\operatorname{Im}(\operatorname{cis} \vartheta)$ . Etwas genauer wird dies in der Vorlesung erläutert.

**Definition (Kosinus und Sinus).** Die Kreisfunktionen Kosinus und Sinus sind definiert als

$$\begin{aligned} \cos: \mathbb{R} &\rightarrow [-1, 1], \vartheta \mapsto \Re(\operatorname{cis} \vartheta), \\ \sin: \mathbb{R} &\rightarrow [-1, 1], \vartheta \mapsto \operatorname{Im}(\operatorname{cis} \vartheta) \end{aligned}$$

oder mit anderen Worten durch die Gleichung

$$\operatorname{cis} \vartheta = \cos \vartheta + \mathbf{i} \sin \vartheta \quad \text{für alle } \vartheta \in \mathbb{R}.$$

**Haupteigenschaften** (der Kreisfunktionen  $\operatorname{cis}$ ,  $\cos$ ,  $\sin$ ).

- (1) Für alle  $\vartheta \in \mathbb{R}$  gelten

$$|\operatorname{cis} \vartheta| = 1 \quad \text{und} \quad \cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta = 1$$

(wobei Abkürzungen wie  $\cos^2 \vartheta := (\cos \vartheta)^2$  und  $\sin^2 \vartheta := (\sin \vartheta)^2$  nun oft verwendet werden).

- (2) Spezielle Werte der Kreisfunktionen sind durch  $\operatorname{cis} 0 = 1$ ,  $\operatorname{cis} \frac{\pi}{4} = \frac{1+\mathbf{i}}{\sqrt{2}}$ ,  $\operatorname{cis} \frac{\pi}{2} = \mathbf{i}$ ,  $\cos \frac{\pi}{2} = \sin 0 = \sin \pi = 0$ ,  $\cos \frac{\pi}{6} = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ ,  $\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$  und  $\cos \frac{\pi}{3} = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$  gegeben.

- (3) Die Funktion  $\operatorname{cis}$  ist **periodisch** mit **minimaler Periode  $2\pi$** , und für  $\vartheta, \varphi \in \mathbb{R}$  gelten

$$\begin{aligned} \operatorname{cis} \vartheta = \operatorname{cis} \varphi &\iff \vartheta - \varphi = 2k\pi \text{ für ein } k \in \mathbb{Z}, \\ \operatorname{cis}(\vartheta + 2\pi) &= \operatorname{cis} \vartheta, \quad \operatorname{cis}(\vartheta + \pi) = -\operatorname{cis} \vartheta. \end{aligned}$$

Hieraus folgt, dass auch  $\cos$  und  $\sin$  minimale Periode  $2\pi$  haben und den Regeln  $\cos(\vartheta + 2\pi) = \cos \vartheta$ ,  $\cos(\vartheta + \pi) = -\cos \vartheta$ ,  $\sin(\vartheta + 2\pi) = \sin \vartheta$ ,  $\sin(\vartheta + \pi) = -\sin \vartheta$  genügen. Zudem gelten  $\cos(\frac{\pi}{2} - \vartheta) = \sin \vartheta$  und  $\sin(\frac{\pi}{2} - \vartheta) = \cos \vartheta$ .

- (4) Für die Kreisfunktionen gelten die Paritäts-Regeln

$$\operatorname{cis}(-\vartheta) = \overline{\operatorname{cis} \vartheta} = \frac{1}{\operatorname{cis} \vartheta}, \quad \cos(-\vartheta) = \cos \vartheta, \quad \sin(-\vartheta) = -\sin \vartheta \quad \text{für } \vartheta \in \mathbb{R}.$$

Damit ist  $\cos$  eine gerade und  $\sin$  eine ungerade Funktion.

(5) Die **Additionstheoreme** für die Kreisfunktionen besagen

$$\begin{aligned}\operatorname{cis}(\vartheta+\varphi) &= (\operatorname{cis} \vartheta)(\operatorname{cis} \varphi), \\ \cos(\vartheta+\varphi) &= (\cos \vartheta)(\cos \varphi) - (\sin \vartheta)(\sin \varphi), \\ \sin(\vartheta+\varphi) &= (\sin \vartheta)(\cos \varphi) + (\cos \vartheta)(\sin \varphi)\end{aligned}$$

für alle  $\vartheta, \varphi \in \mathbb{R}$ . Durch iterative Anwendung des Additionstheorems für  $\operatorname{cis}$  erhält man die **Vervielfachungs-Formel von De Moivre**

$$\operatorname{cis}(k\vartheta) = (\operatorname{cis} \vartheta)^k = (\cos \vartheta + \mathbf{i} \sin \vartheta)^k,$$

Durch Ausmultiplizieren der rechten Seite mit dem Binomialsatz und Aufspaltung in Real- und Imaginärteil ergeben sich entsprechende Formeln für  $\cos(k\vartheta)$  und  $\sin(k\vartheta)$ .

(6) **Fundamentale Ungleichungen** für die Kreisfunktion  $\operatorname{cis}$  sind (mit  $\vartheta, \varphi \in \mathbb{R}$ )

$$\begin{aligned}|\operatorname{cis} \vartheta - \operatorname{cis} \varphi| &\leq |\vartheta - \varphi|, \\ |\operatorname{cis} \vartheta - \operatorname{cis} \varphi| &\geq |\vartheta - \varphi| \frac{|\operatorname{cis} \vartheta + \operatorname{cis} \varphi|}{2} = |\vartheta - \varphi| \sqrt{1 - \frac{1}{4} |\operatorname{cis} \vartheta - \operatorname{cis} \varphi|^2}, \text{ vorausgesetzt } |\vartheta - \varphi| \leq \pi\end{aligned}$$

(jeweils mit Gleichheit einzig für  $\vartheta = \varphi$ ). Für die Kreisfunktion  $\sin$  ergeben sich daraus

$$\begin{aligned}|\sin \vartheta - \sin \varphi| &\leq |\vartheta - \varphi|, \\ \sin \vartheta &\leq \vartheta, \text{ vorausgesetzt } \vartheta \geq 0, \\ \sin \vartheta &\geq \vartheta \cos \vartheta, \text{ vorausgesetzt } 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

(mit Gleichheit einzig für  $\vartheta = \varphi$  beziehungsweise für  $\vartheta = 0$ ). Für die Kreisfunktion  $\cos$  folgt

$$\begin{aligned}|\cos \vartheta - \cos \varphi| &\leq |\vartheta - \varphi|, \\ \cos \vartheta &\leq \frac{1}{\sqrt{1 + \vartheta^2}}, \text{ vorausgesetzt } |\vartheta| \leq \pi, \\ \cos \vartheta &\geq \sqrt{1 - \vartheta^2}, \text{ vorausgesetzt } |\vartheta| \leq 1\end{aligned}$$

(mit Gleichheit einzig für  $\vartheta = \varphi$  beziehungsweise für  $\vartheta = 0$ ).

Die meisten Eigenschaften der vorigen Bemerkung lassen sich leicht aus den Definitionen der Kreisfunktionen ableiten (wobei man die Eigenschaften von  $\operatorname{cis}$  und insbesondere das Additionstheorem als Grundlage betrachten und zuerst verifizieren sollte). Schwieriger gestalten sich einzig die Beweise der Ungleichungen in (6), die jetzt der Vollständigkeit halber ausgeführt werden.

*Beweis der Ungleichung*  $|\operatorname{cis} \vartheta - \operatorname{cis} \varphi| \leq |\vartheta - \varphi|$ . Es wird  $|\operatorname{cis} \vartheta - 1| \leq |\vartheta|$  für  $\vartheta \geq 0$  gezeigt. Ist dies erledigt, so folgt dasselbe für  $\vartheta < 0$ , und per Additionstheorem ergibt sich allgemein  $|\operatorname{cis} \vartheta - \operatorname{cis} \varphi| = \left| \frac{\operatorname{cis} \vartheta}{\operatorname{cis} \varphi} - 1 \right| |\operatorname{cis} \varphi| = |\operatorname{cis}(\vartheta - \varphi) - 1| \leq |\vartheta - \varphi|$ . Zum Beweis von  $|\operatorname{cis} \vartheta - 1| \leq |\vartheta|$  mit  $\vartheta \geq 0$  verwendet man  $k_n := \lfloor \frac{2^n \vartheta}{2\pi} \rfloor \in \mathbb{N}_0$  und bemerkt  $k_n \leq \frac{2^{n-1}}{\pi} \vartheta$ . Über die Definition von  $\operatorname{cis}$ , die Gleichung  $|\zeta_n| = 1$  und die von der Definition von  $\pi$  herrührende Ungleichung  $2^{n-1} |\zeta_n - 1| \leq \pi$  schließt man

$$\begin{aligned}\left| \operatorname{cis} \left( \frac{2\pi k_n}{2^n} \right) - 1 \right| &= |\zeta_n^{k_n} - 1| \\ &\leq |\zeta_n - 1| |\zeta_n^{k_n - 1}| + |\zeta_n - 1| |\zeta_n^{k_n - 2}| + \dots + |\zeta_n - 1| |\zeta_n| + |\zeta_n - 1| = k_n |\zeta_n - 1| \leq \frac{2^{n-1} |\zeta_n - 1|}{\pi} \vartheta \leq \vartheta.\end{aligned}$$



Nun kommt  $\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi k_n}{2^n}\right)$  bei wachsendem  $n$  beliebig nah an  $\operatorname{cis}\vartheta$  (was in präziserer Formulierung bedeutet, dass die Realteile von  $\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi k_n}{2^n}\right)$  und  $\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi(k_n+1)}{2^n}\right)$  Randpunkte einer Intervallschachtelung mit Kern  $\Re(\operatorname{cis}\vartheta)$  sind und die Imaginärteile Randpunkte einer Intervallschachtelung mit Kern  $\operatorname{Im}(\operatorname{cis}\vartheta)$ ). Insgesamt folgt daher mit  $|\operatorname{cis}\vartheta - 1| \leq \vartheta$  die Behauptung.

Die Gleichheitsdiskussion lässt sich nun folgendermaßen erledigen. Im Fall  $0 < |\vartheta - \varphi| < \pi$  erhält man mit  $|\operatorname{cis}\vartheta - \operatorname{cis}\varphi| = |\operatorname{cis}[(\vartheta - \varphi)/2] - \operatorname{cis}[(\varphi - \vartheta)/2]| = 2|\sin[(\vartheta - \varphi)/2]| < 2\sqrt{(\cos[(\vartheta - \varphi)/2] - 1)^2 + (\sin[(\vartheta - \varphi)/2])^2} = 2|\operatorname{cis}[(\vartheta - \varphi)/2] - 1| \leq 2\left|\frac{\vartheta - \varphi}{2}\right| = |\vartheta - \varphi|$  die strikte Ungleichung. Im Fall  $|\vartheta - \varphi| \geq \pi$  gilt trivial  $|\operatorname{cis}\vartheta - \operatorname{cis}\varphi| \leq 2 < \pi \leq |\vartheta - \varphi|$ . Insgesamt ist daher  $\vartheta = \varphi$  der einzige Gleichheitsfall.  $\square$

*Beweis der Ungleichung*  $|\operatorname{cis}\vartheta - \operatorname{cis}\varphi| \geq |\vartheta - \varphi| \frac{|\operatorname{cis}\vartheta + \operatorname{cis}\varphi|}{2}$ . Es wird  $|\operatorname{cis}\vartheta - \operatorname{cis}(-\vartheta)| \geq \vartheta |\operatorname{cis}\vartheta + \operatorname{cis}(-\vartheta)|$  für  $\vartheta \in [0, \frac{\pi}{2}]$  nachgewiesen. Ist dies geschehen, so kann man auch  $\vartheta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  zulassen, und über  $|\operatorname{cis}\vartheta - \operatorname{cis}\varphi| = |\operatorname{cis}\frac{\vartheta - \varphi}{2} - \operatorname{cis}\frac{\varphi - \vartheta}{2}|$  folgt wie im vorigen Beweis die allgemeine Ungleichung  $|\operatorname{cis}\vartheta - \operatorname{cis}\varphi| \geq |\vartheta - \varphi| |\operatorname{cis}\vartheta + \operatorname{cis}\varphi|/2$  für  $|\vartheta - \varphi| \leq \pi$ . Man beginnt die Argumentation mit der Betrachtung von  $z = x + iy$  und  $w = u + iv$  mit  $|z| = |w| = 1$ ,  $0 < u \leq x$ ,  $0 \leq y \leq v$ . Gemäß Youngscher Ungleichung oder Rechnung gilt  $xu + yv \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + u^2 + v^2) = 1 = u^2 + v^2$ , und durch Umformung erhält man  $u(x - u) \leq v(v - y)$ . Als Nächstes ergibt sich  $|z - w| = \frac{1}{u}\sqrt{u^2(x - u)^2 + u^2(v - y)^2} \leq \frac{1}{u}\sqrt{v^2 + u^2}(v - y) = \frac{1}{u}(v - y)$ . Die resultierende Ungleichung darf für  $n \in \mathbb{N}$  und  $j \leq \ell$  in  $\{1, 2, \dots, 2^{n-2} - 1\}$  auf  $z = \zeta_n^{j-1}$  und  $w = \zeta_n^j$  angewandt werden und ergibt  $|\zeta_n^j - \zeta_n^{j-1}| \leq \frac{\operatorname{Im}(\zeta_n^j) - \operatorname{Im}(\zeta_n^{j-1})}{\Re(\zeta_n^j)} \leq \frac{\operatorname{Im}(\zeta_n^j) - \operatorname{Im}(\zeta_n^{j-1})}{\Re(\zeta_n^\ell)}$ . Summation dieser Ungleichungen führt auf eine Teleskopsumme und liefert zunächst die Hilfsabschätzung

$$\ell|\zeta_n - 1| = \sum_{j=1}^{\ell} |\zeta_n^j - \zeta_n^{j-1}| \leq \frac{\operatorname{Im}(\zeta_n^\ell)}{\Re(\zeta_n^\ell)} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und } \ell \in \{1, 2, \dots, 2^{n-2} - 1\}.$$

Für den Hauptteil des Arguments wählt man  $\ell_n := 1 + \lfloor \frac{2^{n-1}\vartheta}{2\pi} \rfloor \in \mathbb{N}$  mit  $\ell_n \geq \frac{2^{n-1}\vartheta}{\pi}$ . Wegen  $\vartheta < \frac{\pi}{2}$  gilt  $\ell_n < 2^{n-2}$  für große  $n$ , und ähnlich wie im vorigen Beweis rechnet man dann

$$\frac{|\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi\ell_n}{2^n}\right) - \operatorname{cis}\left(-\frac{2\pi\ell_n}{2^n}\right)|}{|\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi\ell_n}{2^n}\right) + \operatorname{cis}\left(-\frac{2\pi\ell_n}{2^n}\right)|} = \frac{|\zeta_n^{\ell_n} - \zeta_n^{-\ell_n}|}{|\zeta_n^{\ell_n} + \zeta_n^{-\ell_n}|} = \frac{\operatorname{Im}(\zeta_n^{\ell_n})}{\Re(\zeta_n^{\ell_n})} \geq \ell_n |\zeta_n - 1| \geq \frac{2^{n-1}|\zeta_n - 1|}{\pi} \vartheta.$$

Nun kommt  $\frac{2^{n-1}|\zeta_n - 1|}{\pi}$  bei wachsendem  $n$  beliebig nah an 1 und  $\operatorname{cis}(\pm \frac{2\pi\ell_n}{2^n})$  beliebig nah an  $\operatorname{cis}(\pm\vartheta)$ . Deshalb folgt mit  $\frac{|\operatorname{cis}\vartheta - \operatorname{cis}(-\vartheta)|}{|\operatorname{cis}\vartheta + \operatorname{cis}(-\vartheta)|} \geq \vartheta$  die Behauptung.

Auch bei der hier bewiesenen Ungleichung lässt sich die Gleichheitsdiskussion im Nachhinein durchführen. Ähnlich wie oben überlegt man sich im Fall  $0 < |\vartheta - \varphi| < \pi$  dazu  $\frac{|\operatorname{cis}\vartheta - \operatorname{cis}\varphi|}{|\operatorname{cis}\vartheta + \operatorname{cis}\varphi|} = \frac{|\sin[(\vartheta - \varphi)/2]|}{|\cos[(\vartheta - \varphi)/2]|} = 2 \frac{|\sin[(\vartheta - \varphi)/4]| |\cos[(\vartheta - \varphi)/4]|}{\cos^2[(\vartheta - \varphi)/4] - \sin^2[(\vartheta - \varphi)/4]} > 2 \frac{|\sin[(\vartheta - \varphi)/4]| |\cos[(\vartheta - \varphi)/4]|}{\cos^2[(\vartheta - \varphi)/4]} = 2 \frac{|\sin[(\vartheta - \varphi)/4]|}{|\cos[(\vartheta - \varphi)/4]|} = 2 \frac{|\operatorname{cis}(\vartheta/2) - \operatorname{cis}(\varphi/2)|}{|\operatorname{cis}(\vartheta/2) + \operatorname{cis}(\varphi/2)|} \geq \left|\frac{\vartheta}{2} - \frac{\varphi}{2}\right| = |\vartheta - \varphi|/2$ . Im Fall  $|\vartheta - \varphi| = \pi$  gilt die strikte Ungleichung trivial, und als Gleichheitsfall verbleibt nur  $\vartheta = \varphi$ .  $\square$

*Beweise der Ungleichungen für sin und cos.* Die Ungleichungen  $|\sin\vartheta - \sin\varphi| \leq |\vartheta - \varphi|$  und  $|\cos\vartheta - \cos\varphi| \leq |\vartheta - \varphi|$  samt Gleichheitsdiskussion folgen direkt aus der ersten Ungleichung für cis, die Ungleichung  $\sin\vartheta \leq \vartheta$  für  $\vartheta \geq 0$  ist ein Spezialfall. Durch Anwendung der zweiten Ungleichung für cis mit  $\varphi = -\vartheta$  erhält man außerdem  $\sin\vartheta \geq \vartheta \cos\vartheta$  für  $0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$  samt Gleichheitsdiskussion. Damit folgt auch

$$(1 + \vartheta^2)(\cos\vartheta)^2 = (\cos\vartheta)^2 + (\vartheta \cos\vartheta)^2 \leq (\cos\vartheta)^2 + (\sin\vartheta)^2 = 1 \quad \text{für } |\vartheta| \leq \pi$$

und somit die Abschätzung  $\cos\vartheta \leq \frac{1}{\sqrt{1 + \vartheta^2}}$ . Mit

$$\cos\vartheta = \sqrt{1 - (\sin\vartheta)^2} \geq \sqrt{1 - \vartheta^2} \quad \text{für } |\vartheta| \leq 1$$

ist auch die letzte Abschätzung für den Kosinus erledigt. Die verbleibenden Aussagen über Gleichheitsfälle kommen bei diesen Argumenten gleich mit heraus.  $\square$

Für die Kreisfunktionen gelten neben den oben genannten noch viele weitere Formeln und Eigenschaften. An dieser Stelle soll aber nur noch eine weitere Definition getroffen werden.

**Definition (Tangens und Kotangens).** Die Kreisfunktionen Tangens und Kotangens sind definiert als

$$\begin{aligned} \tan: \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm \frac{\pi}{2}, \pm 3\frac{\pi}{2}, \pm 5\frac{\pi}{2}, \dots \right\} &\rightarrow \mathbb{R}, \vartheta \mapsto \frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta}, \\ \cot: \mathbb{R} \setminus \{0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots\} &\rightarrow \mathbb{R}, \vartheta \mapsto \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}. \end{aligned}$$

Eigenschaften dieser Funktionen lassen sich aus den entsprechenden Verhaltensweisen des Kosinus und des Sinus ableiten.

## 1.8 Komplexe Wurzeln und der Fundamentalsatz der Algebra

In diesem Abschnitt werden mit Hilfe der Kreisfunktion  $\text{cis}$  zwei der wichtigsten und schon in Abschnitt 1.1 angekündigten Eigenschaften des Zahlbereichs  $\mathbb{C}$  bewiesen.

Die erste Eigenschaft ist die generelle Existenz (ausreichend vieler) komplexer Wurzeln.

**Satz (über komplexe Wurzeln).** Für  $n \in \mathbb{N}$  besitzt jedes  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  genau  $n$  verschiedene  $n$ -te Wurzeln in  $\mathbb{C}$ . Ist  $\vartheta$  ein Polarwinkel von  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , also  $z = |z| \text{cis } \vartheta$  mit  $\vartheta \in \mathbb{R}$ , so sind diese Wurzeln die  $n$  Zahlen

$$\sqrt[n]{|z|} \text{cis } \frac{\vartheta}{n}, \quad \sqrt[n]{|z|} \text{cis } \frac{\vartheta+2\pi}{n}, \quad \sqrt[n]{|z|} \text{cis } \frac{\vartheta+4\pi}{n}, \quad \dots, \quad \sqrt[n]{|z|} \text{cis } \frac{\vartheta+2(n-1)\pi}{n}.$$

Der Verifikation, dass dies (alle) Wurzeln sind, gelingt durch kurze Rechnungen mit dem Additionstheorem und der Periodizität von  $\text{cis}$  sowie dem Wissen über die allgemeine Existenz von Polardarstellungen.

Insbesondere liefert der Satz natürlich **Formeln für die  $n$  verschiedenen  $n$ -ten Einheitswurzeln**; diese sind die **Ecken des dem Einheitskreis einbeschriebenen regulären  $n$ -Ecks** (mit 1 als einer Ecke) und haben die Gestalt

$$1, \quad \text{cis } \frac{2\pi}{n}, \quad \text{cis } \frac{4\pi}{n}, \quad \dots, \quad \text{cis } \frac{2(n-1)\pi}{n}.$$

Speziell für den Fall  $n = 2$  von **komplexen Quadratwurzeln** gibt es übrigens noch eine andere Darstellung: Die beiden Quadratwurzeln von  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$  sind die komplexen Zahlen

$$\pm \sqrt{|z|} \frac{z+|z|}{|z+|z||}$$

(und die von  $x \in \mathbb{R}_{\leq 0}$  sind natürlich  $\pm i\sqrt{-x}$ ).

Die zweite der angekündigten Eigenschaften ist die generelle Lösbarkeit polynomialer Gleichungen über  $\mathbb{C}$ .

**Hauptsatz (Fundamentalsatz der Algebra).** Jede nicht-konstante Polynomfunktion  $p$  über  $\mathbb{C}$ , d.h. jede Funktion  $p: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  zu einer Funktionsvorschrift der Form

$$p(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \dots + c_2 z^2 + c_1 z + c_0 \quad \text{für } z \in \mathbb{C}$$

mit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $c_0, c_1, c_2, \dots, c_{n-1} \in \mathbb{C}$ ,  $c_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , **besitzt in  $\mathbb{C}$  eine Nullstelle**  $z_0$ , d.h. es gibt ein  $z_0 \in \mathbb{C}$  mit  $p(z_0) = 0$ .

**Korollar (Zerlegung von Polynomen in Linearfaktoren).** Zu jedem nicht-konstanten Polynom  $p$  der Form aus dem Hauptsatz gibt es ein  $m \in \mathbb{N}$ , verschiedene  $z_1, z_2, \dots, z_{m-1}, z_m \in \mathbb{C}$  und  $k_1, k_2, \dots, k_{m-1}, k_m \in \mathbb{N}$  mit  $k_1 + k_2 + \dots + k_{m-1} + k_m = n$ , so dass gilt:

$$p(z) = c_n (z-z_1)^{k_1} (z-z_2)^{k_2} \dots (z-z_{m-1})^{k_{m-1}} (z-z_m)^{k_m} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Dabei nennt man  $k_1, k_2, \dots, k_m$  die Vielfachheiten der Nullstellen  $z_1, z_2, \dots, z_m$  von  $p$ .

Die Herleitung des Korollars aus dem Hauptsatz gelingt durch einen einfachen Induktionsbeweis, basierend auf dem Verfahren der Polynomdivision. Für die Besprechung dieses Verfahrens wiederum wird auf die (lineare) Algebra verwiesen.

Für den Hauptsatz selbst wird in der Vorlesung ein elementarer und naheliegender Beweis skizziert, der nur auf Basis des bisher behandelten Stoffes geführt werden kann, doch dann technisch nicht ganz einfach ist. Mit fortgeschrittener Analysis, insbesondere mit etwas Funktionentheorie, können später aber übrigens extrem kurze und elegante Beweise gegeben werden.

# Kapitel 2

## Folgen und Reihen

### 2.1 Grenzwerte von Folgen, Grenzwertrechnung

**Definition (Folgen).** Eine *Folge (von Elementen) in einer Menge  $X$*  definiert man als eine Abbildung  $a: \mathbb{N} \rightarrow X$  von der Menge  $\mathbb{N}$  der natürlichen Zahlen nach  $X$ . Man nennt die zu  $n \in \mathbb{N}$  gehörigen Funktionswerte  $a(n) \in X$  die **Glieder** der Folge und schreibt sie meist in der Form  $a_n$  statt  $a(n)$ . Für die ganze Folge notiert man dementsprechend  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  statt  $a$ .

Auch bei etwas anderen Definitionsbereichen wie etwa  $\mathbb{N}_0$ ,  $\mathbb{N}_{\geq k}$ ,  $\mathbb{Z}_{<0}$  oder  $\mathbb{Z}$  spricht man von Folgen, im Fall des Definitionsbereichs  $\mathbb{Z}$  auch von Doppelfolgen, und verwendet die gerade eingeführte Terminologie.

Im Folgenden werden nun Phänomene der Art untersucht, dass die Glieder  $a_n$  einer Folge von Zahlen für sehr große  $n \in \mathbb{N}$  einer festen Zahl beliebig nahe kommen. Einfache Beispiele für ein solches Verhalten sind:  $\frac{n+1}{n}$  kommt 1 beliebig nahe;  $(-\frac{1}{2})^n$  kommt 0 beliebig nahe;  $(1+\frac{1}{n})^n$  kommt der Eulerschen Zahl  $e$  beliebig nahe (denn es handelt sich in letztem Fall um die linken Randpunkte der  $e$  definierenden Intervallschachtelung). Solche Phänomene allgemeine und präzise zu beschreiben, ist allerdings gar nicht einfach, und das folgende elegante Konzept hat sich erst im Zuge einer längeren historischen Entwicklung herauskristallisiert:

**Definition (Grenzwerte und Konvergenz bei Folgen).** Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge im Zahlbereich  $\mathbb{C}$  (oder in  $\mathbb{R}$  oder in einer anderen Teilmenge von  $\mathbb{C}$ ). Dann heißt  $a \in \mathbb{C}$  **Grenzwert** oder **Limes** der Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt (bei  $n \rightarrow \infty$ ) **gegen  $a$  konvergent**, wenn es zu jedem  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  gibt, so dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq n_0$  die Ungleichung  $|a_n - a| < \varepsilon$  gilt. Man notiert hierfür

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \text{oder} \quad a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a.$$

Besitzt  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  einen Grenzwert in (einer Teilmenge von)  $\mathbb{C}$ , so heißt die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in (dieser Teilmenge von)  $\mathbb{C}$  **konvergent**, andernfalls **divergent**.

**Bemerkungen** (zur Grenzwertdefinition).

- (1) In einer **Formulierung mit Quantoren** besagt die Definition, dass  $a$  Grenzwert von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist, wenn

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}: \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}: |a_n - a| < \varepsilon$$

gilt. Die genaue Art und Reihenfolge der Quantoren ist hierbei essentiell.

- (2) **Ein Grenzwert existiert nicht immer**, die Folge  $0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$  besitzt zum Beispiel keinen Grenzwert. **Wenn ein Grenzwert existiert, so ist er aber stets eindeutig.** Zur Einführung in die Arbeit mit dem Grenzwertbegriff, wird der einfache Beweis der letzten Aussage nun sehr detailliert (und fast schon zu ausführlich) erörtert:

*Beweis für die Eindeutigkeit des Grenzwerts einer Folge.* Seien  $a, \tilde{a} \in \mathbb{C}$  zwei Grenzwerte einer Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Ist dann  $\tilde{a} \neq a$ , so liefert die Definition, angewandt mit  $\varepsilon = \frac{1}{2}|\tilde{a} - a| > 0$ , zwei Zahlen  $n_0, \tilde{n}_0 \in \mathbb{N}$ , so dass

$$|a_n - a| < \frac{1}{2}|\tilde{a} - a| \text{ für } n \in \mathbb{N}_{\geq n_0} \quad \text{und} \quad |a_n - \tilde{a}| < \frac{1}{2}|\tilde{a} - a| \text{ für } n \in \mathbb{N}_{\geq \tilde{n}_0}$$

gelten. Für die Zahl  $n_* := \max\{n_0, \tilde{n}_0\} \in \mathbb{N}$  sind beide diese Ungleichungen anwendbar, und mit der Dreiecksungleichung aus Abschnitt 1.3 folgt

$$|\tilde{a} - a| \leq |a_{n_*} - \tilde{a}| + |a_{n_*} - a| < \frac{1}{2}|\tilde{a} - a| + \frac{1}{2}|\tilde{a} - a| = |\tilde{a} - a|.$$

Die resultierende Ungleichung  $|\tilde{a} - a| < |\tilde{a} - a|$  ist widersprüchlich, also kann  $\tilde{a} \neq a$  nicht auftreten, und es muss  $\tilde{a} = a$  gelten.  $\square$

- (3) Die in Bemerkung (1) auftretende Quantoren-Kombination  $\exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$  bedeutet, dass die betreffende Aussage für **alle bis auf endlich viele**  $n \in \mathbb{N}$  gilt. Verbreitete Umschreibungen für genau diesen Sachverhalt sind, dass die Aussage **für fast alle**  $n \in \mathbb{N}$ , **für ausreichend große**  $n \in \mathbb{N}$  oder **für alle**  $n \gg 1$  gilt.
- (4) In etwas anderen Worten verlangt die Grenzwertdefinition, dass für alle (noch so kleinen)  $\varepsilon > 0$  die Folgenglieder  $a_n$  mit ausreichend großem  $n$  alle im Kreis in der Gaußschen Zahlenebene mit Radius  $\varepsilon$  und Mittelpunkt  $a$  liegen — oder im Fall  $a_n, a \in \mathbb{R}$  einfach alle im Intervall  $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ . Dabei ist entscheidend, dass der Kreis oder das Intervall wirklich *alle* Folgenglieder ab einem (tendenziell) großen Index  $n_0$  beinhalten. Dass sie stattdessen „nur“ unendlich viele Folgenglieder enthalten, ist noch keine gleichermaßen starke Forderung; dies erkennt man wieder am Beispiel der divergenten Folge  $0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$
- (5) **Abänderung endlich vieler Folgenglieder ändert nichts am Grenzwert** (und auch nicht seine Existenz oder Nicht-Existenz), d.h. aus  $a_n = b_n$  für *fast* alle  $n \in \mathbb{N}$  folgt  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ . Vor diesem Hintergrund betrachtet man Grenzwerte  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  auch dann, wenn  $a_n$  nur für *fast* alle, aber eventuell nicht für alle  $n \in \mathbb{N}$  definiert ist.

- (6) **Konvergente Folgen sind stets beschränkt** (wobei Beschränktheit einer Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  bedeutet, dass die Menge  $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$  beschränkt ist, also  $\sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n| < \infty$  gilt).

*Beweis.* Ist  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $a \in \mathbb{C}$  konvergent, so liefert die Definition ein (zu  $\varepsilon = 1$  gehöriges)  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $|a_n| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|$  für alle  $n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$ . Damit ist

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n| \leq \max\{|a_1|, |a_2|, |a_3|, \dots, |a_{n_0-1}|, 1 + |a|\} < \infty. \quad \square$$

- (7) Als **Nullfolge** bezeichnet man eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . Aus der Definition folgt, dass  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  genau dann eine Nullfolge ist, wenn die Folge  $(|a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$  der Beträge eine Nullfolge ist. Außerdem gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  genau dann, wenn  $(a_n - a)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Nullfolge ist.

**Beispiele.**

- (1) Konstante Folgen  $(a)_{n \in \mathbb{N}}$  mit Wert  $a$  konvergieren auch gegen  $a$ , es gilt also  $\lim_{n \rightarrow \infty} a = a$ .
- (2) Es gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ , die Folge  $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$  ist also eine Nullfolge. Um dies einzusehen wählt man zu  $\varepsilon > 0$  einfach  $n_0 := \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$  und bemerkt  $|\frac{1}{n}| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$  für alle  $n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$ . Hiermit lassen sich auch andere einfach Limites schon berechnen, mit Bemerkung (7) folgt beispielsweise  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (2 - \frac{1}{n}) = 2$ .
- (3) Es gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$ , da es sich bei den Ausdrücken auf der linken Seite um Randpunkte der die Eulersche Zahl definierenden Intervallschachtelung handelt. Allgemeiner existieren für jede Intervallschachtelung  $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{R}$  mit Kern  $c \in \mathbb{R}$  die Limites  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .

**Definition (Uneigentliche Grenzwerte und uneigentliche Konvergenz).** Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathbb{R}$ . Gilt  $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_0} : a_n > \frac{1}{\varepsilon}$ , so bezeichnet man  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  als **gegen  $\infty$  konvergent** und notiert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \quad \text{oder} \quad a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty.$$

Analog heißt  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  **gegen  $-\infty$  konvergent**, wenn  $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_0} : a_n < -\frac{1}{\varepsilon}$  gilt, und man notiert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \quad \text{oder} \quad a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} -\infty.$$

Man bezeichnet  $\infty$  oder  $-\infty$  hier auch als **uneigentlichen Grenzwert** und nennt die gegen solche konvergierenden Folgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  **uneigentlich konvergent**. Gleichbedeutend mit ‚uneigentlich konvergent‘ verwendet man manchmal auch ‚bestimmt divergent‘.

**Bemerkung.** Folgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  heißen auch **Unendlichfolgen**. Sie entsprechen durch Reziprokenbildung genau den Nullfolgen mit positiven Gliedern.

**Definition (Wachstumsvergleich, Geschwindigkeitsvergleich bei Folgen).** Für zwei Unendlichfolgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sagt man, dass  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  **schneller** als  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  **gegen  $\infty$  geht/strebt/wächst**, wenn  $(\frac{b_n}{a_n})_{n \in \mathbb{N}}$  ebenfalls Unendlichfolge ist. Für Nullfolgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $a_n \neq 0$  für (fast) alle  $n \in \mathbb{N}$  sagt man, dass  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  **schneller** als  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  **gegen 0 geht/strebt**, wenn  $(\frac{b_n}{a_n})_{n \in \mathbb{N}}$  auch Nullfolge ist.

**Beispiele.**

- (1) **Wichtige Unendlichfolgen** mit Parametern  $0 < r < s$  und  $1 < a < b$  sind

$$\log(\log n), \quad (\log n)^r, \quad (\log n)^s, \quad n^r, \quad n^r \log n, \quad n^s, \quad a^n, \quad b^n, \quad n!, \quad n^n.$$

Diese Folgen wurden dabei so geordnet, dass weiter rechts stehende Folgen stets schneller gegen  $\infty$  gehen als weiter links stehende Folgen.

- (2) **Wichtige Nullfolgen** sind die Kehrwerte der genannten Unendlichfolgen. Verändert man die Reihenfolge der genannten Folgen nicht, so streben die nach Kehrwertbildung weiter rechts stehende Folgen schneller gegen Null als die weiter links stehenden Folgen.

Als Nächstes folgen einige grundlegende Aussagen zum Zusammenspiel zwischen Grenzwerten und Ungleichungen.

**Satz (Vergleichsprinzipien).**

- (I) **Majorantenkriterium** für Nullfolgen: Ist  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathbb{C}$  und gilt  $|a_n| \leq Cb_n$  für (fast) alle  $n \in \mathbb{N}$  mit einer Konstante  $C \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  und einer Nullfolge  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{R}_{\geq 0}$ , so ist  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  selbst eine Nullfolge.
- (II) **Minorantenkriterium** für Unendlichfolgen: Ist  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathbb{R}$  und gilt  $a_n \geq cb_n$  für (fast) alle  $n \in \mathbb{N}$  mit einer Konstante  $c \in \mathbb{R}_{> 0}$  und einer Unendlichfolge  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , so ist  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  selbst eine Unendlichfolge.
- (III) Sind  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Folgen in  $\mathbb{R}$  mit  $a_n \leq b_n$  für (fast) alle  $n \in \mathbb{N}$  und existieren die Limites beider Folgen, so gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .
- (IV) **Einschachtelungsprinzip**: Sind  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Zahlenfolgen in  $\mathbb{R}$  mit  $a_n \leq x_n \leq b_n$  für (fast) alle  $n \in \mathbb{N}$  und existieren die Limites  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n =: c$  mit übereinstimmendem Wert  $c$ , so existiert auch  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$ .

Das in Teil (III) des Satzes formulierte Prinzip der Erhaltung *schwacher* Ungleichungen bei Grenzübergängen überträgt sich übrigens nicht auf *strikte* Ungleichungen: Mit anderen Worten folgt aus der strikten Ungleichung  $a_n < b_n$  für die Folgenglieder *keinesfalls* die strikte Ungleichung  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  für die Limites; dies sieht man schon an so einfachen Beispielen wie  $a_n = 0$  und  $b_n = \frac{1}{n}$ .

Der Beweis des Satzes ist kaum der Rede wert; alle Aussagen ergeben sich problemlos aus der Grenzwertdefinition.

Für konkrete Grenzwertberechnungen kann man manchmal auf Teil (IV) des vorigen Satzes zurückgreifen, viel häufiger und schematischer werden aber die folgenden Rechenregeln eingesetzt.

**Satz (Rechenregeln der Grenzwertrechnung).** Seien  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{C}$  konvergente Folgen mit Grenzwerten  $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in \mathbb{C}$  und  $b := \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \in \mathbb{C}$ . Dann existieren auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = a - b, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = ab.$$

Ist  $b \neq 0$ , so ist auch  $b_n \neq 0$  für fast alle  $n \in \mathbb{N}$ , und es existiert auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

Bei Folgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  reeller Zahlen gelten weitere Regeln: Ist  $a > 0$ , so folgt  $a_n > 0$  für fast alle  $n \in \mathbb{N}$ , und es existiert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = a^b.$$

Ist  $a = 0 < b$  und  $a_n \geq 0$  für fast alle  $n \in \mathbb{N}$ , so gilt die letzte Regel ebenfalls. Gilt schließlich  $1 \neq a > 0$  und  $b > 0$ , so ist  $1 \neq a_n > 0$  und  $b_n > 0$  für fast alle  $n \in \mathbb{N}$ , und es existiert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log_{a_n} b_n = \log_a b.$$

Die Beweise der Rechenregeln werden teils in der Vorlesung, teils in den Übungen behandelt.

**Bemerkung.** Auch für das Rechnen mit uneigentlichen Grenzwerten und manchen in  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  nicht sinnvollen Ausdrücken gelten gewisse Regeln. Man hält diese oft als sogenannte **symbolische Rechenregeln** wie

$$\frac{1}{\infty} = 0, \quad -3 + \infty = \infty, \quad -\infty - \infty = -\infty, \quad \frac{1}{0+} = \infty, \quad \frac{1}{0-} = -\infty, \quad 2^\infty = \infty, \quad \infty^1 = \infty$$

fest. Dabei besagt die erste Regel, dass aus  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  stets  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$  folgt, die zweite, dass sich aus  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -3$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$  stets  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \infty$  ergibt. Ähnlich sind die anderen Regeln zu verstehen, wobei  $0+$  als Platzhalter für Nullfolgen mit positiven Gliedern dient und  $0-$  als Platzhalter für Nullfolgen mit negativen Gliedern.

Es ist aber keineswegs so, dass für alle auftretenden Situationen eine Regel formuliert werden kann. Vielmehr gibt es auch **unbestimmte Ausdrücke** wie

$$\infty - \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \infty \cdot 0+, \quad \infty^{0+}, \quad 1^\infty, \quad 0^0.$$

Die Unbestimmtheit von  $\infty - \infty$  bedeutet dabei, dass man aus  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$  nichts über  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n)$  schließen kann, denn tatsächlich kann  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n)$  in dieser Situation jeden beliebigen Wert in  $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$  annehmen oder auch gar nicht existieren. Ähnlich verhält sich dies bei den anderen unbestimmten Ausdrücken.

Konkrete Beispiele für Grenzwertberechnungen werden in der Vorlesung und den Übungen gegeben.

## 2.2 Konvergenzkriterien für Folgen, Häufungswerte von Folgen

In diesem Abschnitt geht es zunächst um zwei grundlegende Konvergenzkriterien für Folgen in  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  (sowie die benötigten Definitionen). Es wurde schon in Abschnitt 1.5 erwähnt, dass diese Kriterien tatsächlich die Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$  (und  $\mathbb{C}$ ) charakterisieren, ein Beweis dafür wird hier aber nicht gegeben.

**Definition (Monotonie bei Folgen).** Eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{R}$  heißt **monoton wachsend**, wenn  $x_{n+1} \geq x_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt, und **streng monoton wachsend**, wenn sogar  $x_{n+1} > x_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt. Analog heißt die Folge **monoton fallend** beziehungsweise **streng monoton fallend**, wenn  $x_{n+1} \leq x_n$  beziehungsweise  $x_{n+1} < x_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt.

Als einfache Konsequenz aus den Definitionen von monotonen Folgen, Grenzwerten, Suprema und Infima ergibt sich:

**Satz (Monotonie-Kriterium für Folgenkonvergenz).** Jede beschränkte monotone Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{R}$  ist in  $\mathbb{R}$  konvergent. Im Fall einer monoton wachsenden Folge ist dabei  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n$ , im Fall einer monoton fallenden Folge ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} x_n$ .

**Bemerkung.** Unbeschränkte monotone Folgen in  $\mathbb{R}$  konvergieren uneigentlich gegen  $\infty$  oder  $-\infty$ . Insgesamt kann man daher sagen: **Jede monotone Folge in  $\mathbb{R}$  konvergiert eigentlich oder uneigentlich.**

**Definition (Cauchy-Folgen).** Eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  hat die **Cauchy-Eigenschaft**, wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $|x_n - x_m| < \varepsilon$  für alle  $m, n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$  gibt. Man bezeichnet Folgen mit dieser Eigenschaft auch kurz als **Cauchy-Folgen**.

Die Gültigkeit der Cauchy-Eigenschaft wird manchmal durch eine Notation wie

$$\lim_{n \geq m \rightarrow \infty} |x_n - x_m| = 0 \quad \text{oder} \quad |x_n - x_m| \xrightarrow{n \geq m \rightarrow \infty} 0$$

zum Ausdruck gebracht. Einfache, aber wichtige Aussagen über Cauchy-Folgen sind:

- Cauchy-Folgen sind stets beschränkt.
- **In  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  konvergente Folgen sind stets Cauchy-Folgen.**

Gemäß dem folgenden Konvergenzkriterium gilt auch die Umkehrung der letzten Aussage, so dass die in  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  konvergenten Folgen tatsächlich *genau* die Cauchy-Folgen sind:

**Satz (Cauchy-Kriterium für Folgenkonvergenz).** *Sei  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Jede Cauchy-Folge in  $\mathbb{K}$  konvergiert in  $\mathbb{K}$ .*

Eine Möglichkeit zum Beweis des Cauchy-Kriteriums im Fall  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  besteht im Einschachteln einer Cauchy-Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{R}$  zwischen der monoton wachsenden Folge  $(\inf_{m \in \mathbb{N}_{\geq n}} x_m)_{n \in \mathbb{N}}$  und der monoton fallenden Folge  $(\sup_{m \in \mathbb{N}_{\geq n}} x_m)_{n \in \mathbb{N}}$ . Für  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  folgt das Kriterium dann durch separate Betrachtung der Real- und Imaginärteile.

**Bemerkung.** Auf der Verwendung von Cauchy-Folgen basiert eine **elegante Konstruktion von  $\mathbb{R}$  aus  $\mathbb{Q}$** , die eine Alternative zu den in Abschnitt 1.5 erwähnten Dedekindschen Schnitten darstellt. Man führt  $\mathbb{R}$  dabei als **Faktorraum des Raums der Cauchy-Folgen in  $\mathbb{Q}$  modulo des Unterraums des Nullfolgen in  $\mathbb{Q}$**  ein (oder, so dieses Konzept bekannt, direkt als Faktoralgebra). Dann identifiziert man  $q \in \mathbb{Q}$  mit der Restklasse im Faktorraum, die aus den Folgen mit Limes  $q$  besteht. Auch bei dieser Konstruktion sind etliche Details zu prüfen, auf die hier nicht eingegangen wird. Als wesentlicher Vorteil sei aber hervorgehoben, dass die Vorgehensweise auch in viel allgemeinerem Kontext, nämlich für sogenannte metrische Räume, einsetzbar ist.

**Anwendung (Konvergenz von Iterationsfolgen, Lösung von Fixpunktgleichungen).** Sei  $I$  ein abgeschlossenes Intervall in  $\mathbb{R}$  und  $f: I \rightarrow I$  eine Abbildung von  $I$  in sich. Für jedes  $x_0 \in I$  definiert dann die Rekursionsvorschrift

$$x_{n+1} := f(x_n) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0$$

eine **Iterationsfolge**  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ . Falls Konvergenz von  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  gegen einen Limes  $x_* \in I$  sichergestellt werden kann, so ergibt sich

$$f(x_*) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x_*$$

(wobei das zweite Gleichheitszeichen eine schwache Voraussetzung an  $f$ , die sogenannte Stetigkeit, erfordert, in vielen konkreten Fällen aber schon durch die Grenzwert-Rechenregeln gerechtfertigt ist). Damit ist  $x_*$  eine Lösung der **Fixpunktgleichung**  $f(x) = x$  für  $f$ , und solche Lösungen bezeichnet man auch kurz als **Fixpunkte von  $f$** .

Das beschriebene Verfahren kann tatsächlich aus verschiedenen Blickwinkeln betrachtet und für zwei unterschiedliche, teils gegensätzliche Zwecke eingesetzt werden: Lässt sich die Fixpunktgleichung für  $f$  leicht (explizit und vielleicht sogar eindeutig) lösen, so kann man auf diese Weise



den Grenzwert oder mögliche Grenzwerte der Iterationsfolge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  bestimmen. Ist die Lösung der Fixpunktgleichung dagegen schwierig, so kann man Konvergenz der Iterationsfolge eventuell benutzen, um die bloße Existenz eines Fixpunkts zu beweisen.

In jedem Fall muss man für das beschriebene Vorgehen die oben angenommene **Konvergenz** von  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  **sicherstellen**. Dies kann (unter anderem) wie folgt gelingen:

(A) **Fall eines monoton wachsenden  $f$**  (d.h.  $f(x) \leq f(y)$  wenn  $x \leq y$  in  $I$ ):

Ist  $x_0 \leq x_1$ , so folgt erst  $x_1 = f(x_0) \leq f(x_1) = x_2$ , dann  $x_2 = f(x_1) \leq f(x_2) = x_3$ , und per Induktion ist  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  monoton wachsend. Für  $x_0 \geq x_1$  ergibt sich analog, dass  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  monoton fallend ist. Wann immer Beschränktheit von  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sichergestellt werden kann, folgt deshalb mit dem Monotonie-Kriterium die Existenz von  $x_* := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , wegen Abgeschlossenheit von  $I$  ist  $x_* \in I$ , und wie schon diskutiert ist  $x_*$  ein Fixpunkt von  $f$ .

(B) **Fall eines monoton fallenden  $f$**  (d.h.  $f(x) \geq f(y)$  wenn  $x \leq y$  in  $I$ ):

Gilt  $x_0 \leq x_2 \leq x_1$  oder  $x_0 \geq x_2 \geq x_1$ , so folgt mit  $x_0 \leq x_2 \leq x_4 \leq x_6 \leq \dots \leq x_7 \leq x_5 \leq x_3 \leq x_1$  oder  $x_0 \geq x_2 \geq x_4 \geq x_6 \geq \dots \geq x_7 \geq x_5 \geq x_3 \geq x_1$ , dass  $(x_{2n})_{n \in \mathbb{N}_0}$  und  $(x_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}_0}$  gegensinnig monoton und beschränkt sind. Nach dem Monotonie-Kriterium konvergieren diese beiden Folgen also gegen je eine Lösung der (iterierten) Fixpunktgleichung  $f(f(x)) = x$ . Kann man nun sicherstellen, dass die beiden Limes übereinstimmen (beispielsweise wegen eindeutiger Lösbarkeit von  $f(f(x)) = x$ ), so konvergiert auch  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen denselben Limes  $x_* \in I$ , und  $x_*$  ist ein Fixpunkt von  $f$ .

(C) **Fall einer strikten Kontraktion  $f$**  (siehe unten):

In diesem Fall wird mit dem nächsten Satz gezeigt, dass  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  stets Cauchy-Folge ist und gemäß dem Cauchy-Kriterium gegen einen Fixpunkt  $x_* \in I$  von  $f$  konvergiert.

Beispiele, bei denen die Konvergenz von Iterationsfolgen sichergestellt und deren Grenzwerte berechnet werden können, werden in der Vorlesung angegeben.

Als Nächstes wird der für den Fall (C) relevante Satz behandelt.

**Definition (Kontraktionen).** Eine Abbildung  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  auf einem Intervall  $I$  in  $\mathbb{R}$  heißt strikte Kontraktion oder strikt kontrahierende Abbildung, wenn  $|f(y) - f(x)| \leq \kappa|y - x|$  für alle  $x, y \in I$  mit einer festen Konstante  $\kappa \in [0, 1[$  gilt.

**Bemerkung.** Bei einer strikten Kontraktion muss die Konstante  $\kappa$  *echt kleiner als 1* sein.

**Satz (Kontraktionssatz).** Ist  $I$  abgeschlossenes Intervall in  $\mathbb{R}$ , so besitzt jede strikte Kontraktion  $f: I \rightarrow I$  genau einen Fixpunkt  $x_* \in I$ , und für beliebiges  $x_0 \in I$  konvergiert dann die durch  $x_{n+1} := f(x_n)$  für  $n \in \mathbb{N}_0$  definierte Iterationsfolge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  gegen  $x_*$ .

*Beweis.* Aus der Kontraktionseigenschaft folgt direkt, dass  $f$  höchstens einen Fixpunkt besitzt.

Sei jetzt  $\kappa \in [0, 1[$  die Kontraktionskonstante von  $f$  (wie in der Definition). Mit der Iterationsvorschrift und der Kontraktionseigenschaft erhält man dann induktiv

$$|x_{i+1} - x_i| = |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq \kappa|x_i - x_{i-1}| \leq \kappa^2|x_{i-1} - x_{i-2}| \leq \dots \leq \kappa^i|x_1 - x_0| \quad \text{für } i \in \mathbb{N}_0.$$

Ist  $n \geq m$  in  $\mathbb{N}_0$ , so ergibt sich mit der Dreiecksungleichung, der vorigen Abschätzung und der geometrischen Summenformel

$$|x_n - x_m| \leq \sum_{i=m}^{n-1} |x_{i+1} - x_i| \leq \sum_{i=m}^{n-1} \kappa^i|x_1 - x_0| = \frac{\kappa^m - \kappa^n}{1 - \kappa}|x_1 - x_0| \leq \frac{\kappa^m}{1 - \kappa}|x_1 - x_0|.$$

Wegen  $\kappa < 1$  wird die rechte Seite der Ungleichungskette für  $m \gg 1$  kleiner als jedes vorgegebene  $\varepsilon > 0$ , und daraus ergibt sich die Cauchy-Eigenschaft für  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ . Gemäß dem Cauchy-Kriterium existiert also  $x_* := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \mathbb{R}$ . Da  $I$  per Voraussetzung *abgeschlossenes* Intervall ist, folgt  $x_* \in I$ . Wegen  $|f(x_n) - f(x_*)| \leq \kappa |x_n - x_*|$  ist per Majorantenkriterium  $(f(x_n) - f(x_*))_{n \in \mathbb{N}}$  Nullfolge, und mit  $x_* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_*)$  folgt die Fixpunkteigenschaft von  $x_*$ . Damit sind auch die Behauptungen zur Existenz eines Fixpunkts und der Konvergenz gegen diesen verifiziert.  $\square$

**Bemerkung.** In der Situation des Kontraktionssatzes kann man **Iterationsfolgen**  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  (mit beliebigen Startwert  $x_0 \in I$ ) **zur näherungsweise Berechnung des Fixpunktes**  $x_*$  einsetzen. Mit ähnlichen Rechnungen wie im Beweis erhält man für die Größe  $|x_n - x_*|$  des nach Berechnung von  $x_n$  mit  $n \in \mathbb{N}$  verbleibenden Fehlers die Abschätzungen

$$|x_n - x_*| \leq \frac{\kappa}{1 - \kappa} |x_n - x_{n-1}| \leq \frac{\kappa^n}{1 - \kappa} |f(x_0) - x_0|.$$

Die Abschätzung durch  $\frac{\kappa^n}{1 - \kappa} |f(x_0) - x_0|$  heißt hierbei **A-priori-Fehlerabschätzung**, denn diese Schranke kann bestimmt werden, bevor man  $x_n$  berechnet. Die schärfere Abschätzung durch  $\frac{\kappa}{1 - \kappa} |x_n - x_{n-1}|$  heißt **A-posteriori-Fehlerabschätzung**, denn diese Schranke ergibt sich erst nach Berechnung der Folgenglieder bis hin zu  $x_{n-1}$  und  $x_n$ .

Im letzten Teil dieses Abschnitts werden nun Begriffe eingeführt, mit denen sich auch das Grenzverhalten nicht-konvergenter Folgen bei  $n \rightarrow \infty$  beschreiben lässt:

**Definition (Häufungswerte, Häufungspunkte).** Sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathbb{C}$ . Dann heißt  $x \in \mathbb{C}$  *Häufungswert oder Häufungspunkt* von  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  unendliche viele  $n \in \mathbb{N}$  mit  $|x_n - x| < \varepsilon$  gibt. Handelt es sich bei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  um eine Folge in  $\mathbb{R}$ , so bezeichnet man  $\pm\infty$  als deren *uneigentlichen Häufungswert*, wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  unendliche viele  $n \in \mathbb{N}$  mit  $\pm x_n > \frac{1}{\varepsilon}$  gibt.

**Definition (Teilfolgen).** Sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge. Ist  $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$  in  $\mathbb{N}$  (also mit anderen Worten  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine streng monoton wachsende Folge in  $\mathbb{N}$ ), so heißt  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  eine *Teilfolge* von  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Die beiden gerade eingeführten Begriffe sind eng miteinander verbunden. Tatsächlich gilt für eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Zahlen und eine weitere Zahl  $x$  (und auch für  $x = \infty$  oder  $x = -\infty$ ) der **grundlegende Zusammenhang**

$$x \text{ ist Häufungswert von } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \iff x \text{ ist Limes einer Teilfolge von } (x_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

**Hauptsatz (Satz von Bolzano-Weierstraß).** Sei  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . *Jede beschränkte Folge in  $\mathbb{K}$  besitzt einen Häufungswert in  $\mathbb{K}$  und, äquivalent, eine in  $\mathbb{K}$  konvergente Teilfolge.*

Mit ‚einem Häufungswert‘ und ‚einer Teilfolge‘ meint man hier ‚mindestens einen Häufungswert‘ und ‚mindestens eine Teilfolge‘ — dies ist in der Mathematik die Standard-Auslegung, wenn die Existenz eines Objekts erwähnt wird.

**Bemerkungen.**

- (1) Unbeschränkte Folgen in  $\mathbb{R}$  besitzen einen uneigentlichen Häufungswert und eine uneigentlich konvergente Teilfolge. Insgesamt kann man daher auch sagen: **Jede Folge in  $\mathbb{R}$  besitzt,**

im eigentlichen oder im uneigentlichen Sinne, einen Häufungswert und eine konvergente Teilfolge.

- (2) Als Korollar zum Satz von Bolzano-Weierstraß ergeben sich folgende Äquivalenzen. Für eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{K}$  und  $x \in \mathbb{K}$  gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \iff (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ beschränkt, } x \text{ einziger Häufungswert von } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ in } \mathbb{K},$$

und für eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{R}$  und  $x \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$  gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \iff x \text{ einziger Häufungswert von } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ in } \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}.$$

Der Beweis des Satzes von Bolzano-Weierstraß kann im Fall  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  durch iterative Intervall-Halbierung erfolgen, wobei in jedem Schritt ein Teilintervall gewählt wird, das unendlich viele Folgenglieder enthält. Auf diese Weise ergibt sich eine Intervallschachtelung, die als Kern einen Häufungswert enthält. Eine alternativer Beweis erfolgt durch Konstruktion einer monotonen Teilfolge und Anwendung des Monotonie-Kriteriums. Der Fall  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  schließlich kann auf den Fall  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  zurückgeführt oder direkt mit Hilfe von Quadrat-Schachtelungen behandelt werden.

**Satz & Definition (Limes von Häufungswerten; Limes superior und inferior).**

Sei  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Ist  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathbb{K}$  und existiert für eine Folge  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  von Häufungswerten von  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  der (im Fall  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  eventuell uneigentliche) Limes  $a := \lim_{k \rightarrow \infty} a_k$ , so ist  $a$  ebenfalls ein Häufungswert von  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Insbesondere gibt es bei einer Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{R}$  stets **einen größten und einen kleinsten Häufungswert** in  $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ , genannt der **Limes superior**  $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$  und der **Limes inferior**  $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$  von  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Die erste Eigenschaft lässt sich auch so ausdrücken, dass die Menge  $\mathcal{H}$  der Häufungswerte von  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$  oder  $\mathbb{C}$  bezüglich Limes-Bildung abgeschlossen ist. Zum Beweis dieser Eigenschaft kann man  $a_k \in \mathbb{K}$  annehmen und wählt dann sukzessive  $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$  in  $\mathbb{N}$ , so dass am Ende  $|x_{n_k} - a_k| < \frac{1}{k}$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt. Es folgt, dass die Teilfolge  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  von  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  denselben Limes  $a$  wie  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  besitzt, also  $a$  ein Häufungswert von  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist. Wegen dieser Eigenschaft und  $\mathcal{H} \neq \emptyset$  (gemäß Bolzano-Weierstraß) ist im Fall  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  dann  $\sup \mathcal{H} \in \mathcal{H}$  der größte und  $\inf \mathcal{H} \in \mathcal{H}$  der kleinste Häufungswert von  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Bemerkungen.**

- (1) Per Definition gilt stets  $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ . Der (eventuell uneigentliche) Limes  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  existiert genau dann, wenn Gleichheit  $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$  eintritt.
- (2) Eine Folge kann sehr viele Häufungswerte besitzen. Ist beispielsweise  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Abzählung<sup>1</sup> von  $\mathbb{Q}$ , so sind *alle* Elemente von  $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$  Häufungswerte von  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

<sup>1</sup>Man bezeichnet eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in einer Menge  $X$  als Abzählung dieser Menge, wenn jedes Element von  $X$  in der Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vorkommt, also  $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = X$  gilt. Die beiden Cantorschen Diagonalverfahren (die in der Vorlesung kurz beschrieben werden) zeigen, dass Abzählungen von  $\mathbb{Q}$  explizit angegeben werden können, während eine Abzählung von  $\mathbb{R}$  gar nicht existiert. Mit anderen Worten ist  $\mathbb{Q}$  eine sogenannte abzählbar unendliche Menge,  $\mathbb{R}$  ist eine überabzählbare Menge (mit zu vielen Elementen, als dass sie nummeriert werden könnten).

## 2.3 Reihen (und unendliche Produkte)

Ab jetzt wird das Symbol  $\mathbb{K}$  stets als Platzhalter für entweder  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  verwendet.

**Definition (Reihen; Konvergenz, Divergenz und Wert von Reihen).** Eine Reihe ist eine formale unendliche Summe  $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$  mit  $k_0 \in \mathbb{Z}$  und einer Folge  $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}_{\geq k_0}}$  von **Reihengliedern** in  $\mathbb{K}$ .

Man bezeichnet  $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$  als **konvergent**, wenn die Folge  $(\sum_{k=k_0}^n a_k)_{n \in \mathbb{Z}_{\geq k_0}}$  der sogenannten **Partialsommen** in  $\mathbb{K}$  konvergiert, andernfalls heißt  $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$  **divergent**. Für  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  nennt man  $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$  **bestimmt divergent**, wenn  $(\sum_{k=k_0}^n a_k)_{n \in \mathbb{Z}_{\geq k_0}}$  bestimmt gegen  $\infty$  oder  $-\infty$  divergiert, und in anderen Divergenzfällen **unbestimmt divergent**. Für konvergente oder bestimmt divergente Reihen bezeichnet man schließlich den Limes der Partialsommen

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=k_0}^n a_k$$

als **Wert der Reihe**.

Für eine Reihe  $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$  sind suggestive Schreibweisen wie  $a_{k_0} + a_{k_0+1} + a_{k_0+2} + a_{k_0+3} + \dots$  gebräuchlich, bei denen nur endlich viele Reihenglieder angegeben werden und die anderen eigentlich nicht bestimmt sind. Führt man aber ausreichend viele Reihenglieder an, um ein klares Bildungsgesetz zu suggerieren, so sind solche Notationen in der Rechenpraxis dennoch sinnvoll und unproblematisch.

**Grundeigenschaften** (von Reihen). Seien  $k_0 \in \mathbb{Z}$ ,  $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}_{\geq k_0}}$  und  $(b_k)_{k \in \mathbb{Z}_{\geq k_0}}$  Folgen in  $\mathbb{K}$  sowie  $s \in \mathbb{K}$  und  $m \in \mathbb{Z}_{\geq k_0}$ . Dann gelten:

- (1) Falls  $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$  und  $\sum_{k=k_0}^{\infty} b_k$  konvergieren, so konvergiert auch  $\sum_{k=k_0}^{\infty} (a_k \pm b_k)$  mit Wert

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k \pm \sum_{k=k_0}^{\infty} b_k.$$

Falls eine der Reihen  $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$  oder  $\sum_{k=k_0}^{\infty} (sa_k)$  mit  $s \neq 0$  konvergiert oder bestimmt divergiert, so tut dies auch die andere mit

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} (sa_k) = s \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k.$$

- (2) **Abänderung endlich vieler Glieder ändert nichts an Konvergenz oder Divergenz** einer Reihe, ändert aber (meistens) ihren Wert. **Vertauschung endlicher vieler Glieder beeinflusst weder die Konvergenz einer Reihe noch den Reihenwert.**

- (3) Falls eine der beteiligten Reihen konvergiert oder bestimmt divergiert, so tut dies auch die andere mit

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k = \sum_{k=k_0}^m a_k + \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k.$$

- (4) Ist  $\mathbb{Z}_{\geq k_0} = \{\ell_i : i \in \mathbb{N}\} \dot{\cup} \{m_j : j \in \mathbb{N}\}$  disjunkt zerlegt durch zwei streng monoton wachsende Indexfolgen  $(\ell_i)_{i \in \mathbb{N}}$  und  $(m_j)_{j \in \mathbb{N}}$  und konvergieren  $\sum_{i=1}^{\infty} a_{\ell_i}$  und  $\sum_{j=1}^{\infty} a_{m_j}$ , so konvergiert auch  $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$  mit

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k = \sum_{i=1}^{\infty} a_{\ell_i} + \sum_{j=1}^{\infty} a_{m_j}.$$

Ein typischer Spezialfall dieser Regel ist die Zerlegung

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{i=0}^{\infty} a_{2i} + \sum_{j=0}^{\infty} a_{2j+1}$$

in die Teilreihen mit nur geraden und nur ungeraden Indizes (falls diese konvergieren).

- (5) Gilt

$$a_k \leq b_k \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}_{\geq k_0}$$

und sind  $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$  und  $\sum_{k=k_0}^{\infty} b_k$  konvergent oder bestimmt divergent, so folgt

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=k_0}^{\infty} b_k.$$

Die Beweise dieser Regeln gestalten sich problemlos. Sie erfolgen größtenteils durch Zurückführung auf entsprechende Gesetzmäßigkeiten für endliche Summen und Limites von Folgen.

Konvergenzkriterien für Reihen werden schwerpunktmäßig im nächsten Abschnitt behandelt. Diejenigen Konvergenzkriterien, die sich direkt aus denen für Folgen ergeben, werden aber schon jetzt erwähnt:

**Satz (erste Konvergenzkriterien für Reihen).** Seien  $k_0 \in \mathbb{Z}$ ,  $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}_{\geq k_0}}$  eine Folge in  $\mathbb{K}$ .

- (I) **Beschränktheitskriterium:** Falls  $a_k \geq 0$  für  $k \gg 1$  gilt, so konvergiert  $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$  genau dann, wenn die Folge  $(\sum_{k=k_0}^n a_k)_{n \in \mathbb{Z}_{\geq k_0}}$  der Partialsummen beschränkt bleibt, und andernfalls liegt bestimmte Divergenz  $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k = \infty$  vor.

- (II) **Cauchy-Kriterium:** Die Reihe  $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$  konvergiert genau dann, wenn gilt:

$$\left| \sum_{k=m}^n a_k \right| \xrightarrow{n \geq m \rightarrow \infty} 0.$$

- (III) **Grundlegendes notwendiges Kriterium für Reihenkonvergenz:** Wenn  $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$  konvergiert, dann gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . Mit anderen Worten ist für Konvergenz einer Reihe notwendig, dass ihre Glieder eine Nullfolge bilden.

Es empfiehlt sich, das **notwendige Kriterium (III)** bei Untersuchung einer gegebenen Reihe stets **zallererst** zu **prüfen**: Stellt man fest, dass die Glieder keine Nullfolge bilden, so kann man die Reihe direkt als divergent abhaken. Nur wenn die Glieder eine Nullfolge bilden, ist eine genauere Untersuchung erforderlich.

Als Nächstes werden einige direkte Konsequenzen des Satzes festgehalten:

**Korollar.** Seien  $k_0 \in \mathbb{Z}$ ,  $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}_{\geq k_0}}$  eine Folge in  $\mathbb{K}$  und  $(b_k)_{k \in \mathbb{Z}_{\geq k_0}}$  eine Folge in  $\mathbb{R}$ .

(A) Ist  $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$  konvergent, so bilden die sogenannten **Reihenreste**  $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$  bei  $m \rightarrow \infty$  eine Nullfolge, das heißt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=m}^{\infty} a_k = 0.$$

(B) Konvergiert  $\sum_{k=k_0}^{\infty} |a_k|$ , so konvergiert auch  $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$  und ist abgeschätzt durch die **Dreiecksungleichung für Reihen**

$$\left| \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=k_0}^{\infty} |a_k|.$$

(C) **Majorantenkriterium:** Gilt  $|a_k| \leq Cb_k$  für  $k \gg 1$  mit einer festen Konstante  $C \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  und ist  $\sum_{k=k_0}^{\infty} b_k$  konvergent, so konvergiert auch  $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ .

(D) **Minorantenkriterium:** Sei  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ . Gilt  $a_k \geq cb_k$  für  $k \gg 1$  mit einer Konstante  $c \in \mathbb{R}_{> 0}$  und ist  $\sum_{k=k_0}^{\infty} b_k = \infty$ , so folgt  $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k = \infty$ .

**Beispiele. Vier fundamentale** (Typen von) **Reihen** folgen.

(1) Aus der geometrischen Summenformel folgt die Konvergenz der **geometrischen Reihe**

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \quad \text{für } q \in \mathbb{C} \text{ mit } |q| < 1.$$

Für  $q \in \mathbb{C}$  mit  $|q| \geq 1$  dagegen divergiert  $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$  (im Fall  $q \in \mathbb{R}_{\geq 1}$  bestimmt gegen  $\infty$ ).

(2) Die bestimmte Divergenz der **harmonischen Reihe**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$$

kann mit dem sogenannten Verdichtungskriterium oder mit Hilfe eines unendlichen Produkts gezeigt werden; dazu demnächst mehr.

(3) Ein Typ von **Teleskopreihe**, der sich bei Existenz von  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  berechnen lässt, ist

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} (b_{k+1} - b_k) = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right) - b_{k_0}.$$

(4) Das vierte Beispiel ist die Exponentialreihe des nächsten Satzes.

**Satz (reelle Exponentialreihe).** Für alle  $x \in \mathbb{R}$  konvergiert die **Exponentialreihe**

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \exp(x) = e^x$$

(wobei für  $x = 0 = k$  hier  $0^0 := 1$  verstanden sei), und für die Approximation der natürlichen Exponentialfunktion durch die Partialsummen der Exponentialreihe gilt die **Fehlerabschätzung**

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!} \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} (e^{|x|} - 1) \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|x|} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_0.$$

Insbesondere ergibt sich für  $x = 1$  die **Reihendarstellung der Eulerschen Zahl**

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots$$

Der Beweis des Satzes beruht auf Abschätzungen, die von der aus Abschnitt 1.5 bekannten Darstellung der natürlichen Exponentialfunktion  $e^x = \exp(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{x}{n})^n$  ausgehen.

Zum Abschluss dieses Abschnitts wird auf multiplikative Analoga zu Reihen eingegangen:

**Bemerkung und Beispiele (zu unendlichen Produkten).** Unendlichen Produkten  $\prod_{k=k_0}^{\infty} a_k$  mit Faktoren  $a_k \in \mathbb{K}$  kann der Wert

$$\prod_{k=k_0}^{\infty} a_k := \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=k_0}^n a_k$$

zugeordnet werden, falls der Limes der Partialprodukte auf der rechten Seite existiert. Im Fall positiver reeller Faktoren  $a_k \in \mathbb{R}_{>0}$  **kann die Theorie unendlicher Produkte weitgehend auf die von Reihen zurückgeführt werden**, denn aus der Logarithmus-Rechenregel  $\log \prod_{k=k_0}^n a_k = \sum_{k=k_0}^n \log a_k$  ergibt sich für  $a_k \in \mathbb{R}_{>0}$  und  $a \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$  die Äquivalenz

$$\prod_{k=k_0}^{\infty} a_k = a \iff \sum_{k=k_0}^{\infty} \log a_k = \log a,$$

bei der  $\log \infty := \infty$  und  $\log 0 := -\infty$  zu verstehen ist.

Einige Beispiele unendlicher Produkte sind dennoch von Interesse:

(1) Ein **divergentes Teleskopprodukt** ist

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{1} = \infty.$$

Durch Logarithmieren folgt  $\sum_{k=1}^{\infty} \log(1 + \frac{1}{k}) = \infty$ , und mit der fundamentalen Logarithmus-Ungleichung  $\log(1 + \frac{1}{k}) \leq \frac{1}{k}$  und dem Minorantenkriterium erhält man die zuvor behauptete **Divergenz der harmonischen Reihe**.

(2) Ein Beispiel eines **konvergenten Teleskopprodukts** ist

$$\prod_{k=2}^{\infty} \frac{k^2}{k^2-1} = \prod_{k=2}^{\infty} \frac{k/(k-1)}{(k+1)/k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2/1}{(n+1)/n} = 2.$$

(3) Bezeichnet  $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$  die Folge der Primzahlen in  $\mathbb{N}$  (also  $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 7, p_5 = 11, p_6 = 13, p_7 = 17$  und so weiter), so gilt *zunächst nur formal*

$$\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_i}} = \prod_{i=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p_i^k} = \sum_{k_1, k_2, k_3, \dots=0}^{\infty} \frac{1}{\prod_{i=1}^{\infty} p_i^{k_i}} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} = \infty. \quad (*)$$

Die erste Gleichheit ergibt sich dabei aus der geometrischen Reihe, die zweite ist ein „unendliches Ausmultiplizieren“, die dritte beruht auf Existenz und Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung, die vierte ist die Divergenz der harmonischen Reihe. Um die Argumentation zu präzisieren und insbesondere die Reihe mit unendlich vielen Indizes  $k_1, k_2, k_3, \dots$

zu vermeiden, reicht tatsächlich die Abschätzung der Partialprodukte  $\prod_{i=1}^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p_i^k} \geq \prod_{i=1}^n \sum_{k=0}^n \frac{1}{p_i^k} = \sum_{k_1, k_2, \dots, k_n=0}^n \frac{1}{\prod_{i=1}^n p_i^{k_i}} \geq \sum_{m=1}^n \frac{1}{m}$ , wobei für  $m \in \mathbb{N}_{\leq n}$  eine Primfaktorzerlegung  $m = \prod_{i=1}^n p_i^{k_i}$  mit  $k_i \in \mathbb{N}_{\leq n}$  benutzt wurde (die ersten  $n$  Primzahlen und Exponenten bis  $n$  reichen für  $m \leq n$  ja mehr als aus). Das durch (\*) motivierte Ergebnis  $\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-1/p_i} = \infty$  folgt nun mit  $n \rightarrow \infty$ .

Wegen  $1 + \frac{1}{p_i} \geq 1 + \frac{1}{p_{i+1}-1} = \frac{1}{1-1/p_{i+1}}$  ergibt sich hieraus auch

$$\prod_{i=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{p_i}\right) = \infty,$$

und wie in Beispiel (1) erhält man die (schon von Euler gefundene) Identität

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{p_i} = \infty.$$

Die Divergenz der letzten Reihe erfordert, dass auch sehr große Primzahlen unter den natürlichen Zahlen vergleichsweise „häufig“ auftreten, jedenfalls „häufiger“ als Quadratzahlen, weil nämlich  $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} < \infty$  konvergiert (für letzteres siehe Abschnitt 2.4).

## 2.4 Spezielle Konvergenzkriterien für Reihen, Umordnungen und Produkte von Reihen

In diesem Abschnitt geht es zunächst um ein Konzept besonders gutartiger Konvergenz:

**Definition (absolute Konvergenz).** Sei  $k_0 \in \mathbb{Z}$  und  $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}_{\geq k_0}}$  eine Folge in  $\mathbb{K}$ . Dann heißt die Reihe  $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$  **absolut konvergent**, wenn die Reihe der Beträge  $\sum_{k=k_0}^{\infty} |a_k|$  konvergiert.

Gemäß dem Beschränktheitskriterium kann Konvergenz von  $\sum_{k=k_0}^{\infty} |a_k|$  auch einfach durch die Ungleichung  $\sum_{k=k_0}^{\infty} |a_k| < \infty$  ausgedrückt werden, und gemäß der Dreiecksungleichung für Reihen impliziert diese Konvergenz die Konvergenz von  $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$  selbst.

Der folgende Satz liefert hinreichende Kriterien für absolute Konvergenz:

**Satz (Kriterien für absolute Konvergenz).** Sei  $k_0 \in \mathbb{Z}$  und  $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}_{\geq k_0}}$  eine Folge in  $\mathbb{K}$ .

(I) **Quotientenkriterium:** Ist  $a_k \neq 0$  für  $k \gg 1$  und gilt

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1,$$

so konvergiert  $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$  absolut.

(II) **Wurzelkriterium:** Gilt

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1,$$

so konvergiert  $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$  absolut.



(III) **Verdichtungskriterium:** Sei (ein Endstück von)  $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}_{\geq k_0}}$  **monotone Nullfolge** und  $\ell_0 \in \mathbb{N}_0$  mit  $2^{\ell_0} \geq k_0$ . Dann gilt:

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k \text{ konvergiert} \iff \sum_{\ell=\ell_0}^{\infty} 2^\ell a_{2^\ell} \text{ konvergiert}$$

(wobei die Reihe rechts manchmal als **verdichtete Reihe** bezeichnet wird).

Das Quotienten- und das Wurzelkriterium leitet man durch Vergleich mit geometrischen Majorantenreihen her. Das Verdichtungskriterium beweist man durch geeignete Gruppierung der Reihenglieder  $a_k$  und Abschätzung über das größte und kleinste Glied jeder Gruppe. Falls man über das Verdichtungskriterium Konvergenz erhält, so ist sie übrigens immer absolut, denn die Voraussetzung der monotonen Nullfolge erzwingt, dass fast alle  $a_k$  einheitliches Vorzeichen haben.

In der Rechenpraxis werden das Quotienten- und das Wurzelkriterium oft recht schematisch eingesetzt. Tatsächlich funktionieren diese Kriterien aber nur in Fällen, in denen man auch direkt eine geometrische Majorantenreihe angeben kann, während sie in interessanten Grenzfällen oft versagen. Das Verdichtungskriterium dagegen hat folgende wichtige Anwendung:

**Anwendung** (des Verdichtungskriteriums).

(1) Die Konvergenz der Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \quad \text{mit } s \in \mathbb{R}$$

wird durch das Verdichtungskriterium auf die der geometrischen Reihen  $\sum_{\ell=0}^{\infty} (2^{1-s})^\ell$  zurückgeführt. Diese Reihen **konvergieren** also **genau** im Fall  $2^{1-s} < 1$  oder mit anderen Worten **im Fall  $s > 1$** .

(2) Auch die Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(\log k)^s} \quad \text{mit } s \in \mathbb{R}$$

konvergieren genau im Fall  $s > 1$ , wie man mit dem Verdichtungskriterium und (1) einsieht. In ähnlicher Weise tritt auch bei  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(\log k)(\log \log k)^s}$  und analogen Reihen mit höheren iterierten Logarithmen genau im Fall  $s > 1$  Konvergenz ein.

Als Nächstes folgt ein Kriterium, das auch viele nicht-absolut konvergente Reihen erfasst:

**Satz (Leibniz-Kriterium).** Ist  $k_0 \in \mathbb{Z}$  und ist (ein Endstück von)  $(b_k)_{k \in \mathbb{Z}_{\geq k_0}}$  **monotone Nullfolge** in  $\mathbb{R}$ , so konvergiert die alternierende Reihe

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} (-1)^k b_k.$$

Der Beweis des Leibniz-Kriteriums basiert auf der Beobachtung, dass die Partialsummen  $\sum_{k=k_0}^n (-1)^k b_k$  mit geradem  $n \gg 1$  und die mit ungeradem  $n \gg 1$  jeweils beschränkte monotone Folgen bilden. Diese Folgen besitzen einen gemeinsamen Grenzwert in  $\mathbb{R}$ , der auch der Wert der Reihe ist.

Aus dem Leibniz-Kriterium entnimmt man die nicht-absolute Konvergenz der **alternierenden harmonischen Reihe**  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$  und der **Leibnizschen Reihe**  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ . Die Werte der Reihen können mit diesem Kriterium allerdings nicht bestimmt werden und werden sich erst in den Übungen beziehungsweise im weiteren Verlauf der Vorlesung herausstellen.

Weitere Kriterien für eventuell nicht-absolute Konvergenz benötigen noch einen Begriff:

**Definition (Folgen von beschränkter Variation).** Sei  $k_0 \in \mathbb{Z}$ . Eine Folge  $(b_k)_{k \in \mathbb{Z}_{\geq k_0}}$  in  $\mathbb{K}$  heißt Folge von **beschränkter Variation**, wenn  $\sum_{k=k_0}^{\infty} |b_{k+1} - b_k| < \infty$  gilt.

Aus der Dreiecksungleichung für Reihen folgt, dass eine Folge  $(b_k)_{k \in \mathbb{Z}_{\geq k_0}}$  von beschränkter Variation stets gegen  $b_{k_0} + \sum_{k=k_0}^{\infty} (b_{k+1} - b_k) \in \mathbb{K}$  konvergiert.

**Satz.** Seien  $k_0 \in \mathbb{Z}$  sowie  $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}_{\geq k_0}}$  und  $(b_k)_{k \in \mathbb{Z}_{\geq k_0}}$  Folgen in  $\mathbb{K}$ .

- (I) **Konvergenzkriterium von Abel:** Ist  $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$  konvergent und ist  $(b_k)_{k \in \mathbb{Z}_{\geq k_0}}$  von beschränkter Variation, so konvergiert auch  $\sum_{k=k_0}^{\infty} (a_k b_k)$ .
- (II) **Konvergenzkriterium von Dirichlet:** Ist die Partialsummenfolge  $(\sum_{k=k_0}^n a_k)_{n \in \mathbb{Z}_{\geq k_0}}$  beschränkt und ist  $(b_k)_{k \in \mathbb{Z}_{\geq k_0}}$  Nullfolge von beschränkter Variation, so konvergiert  $\sum_{k=k_0}^{\infty} (a_k b_k)$ .

Das Kriterium von Dirichlet verallgemeinert dabei das Leibniz-Kriterium, das dem Spezialfall  $a_k = (-1)^k$  entspricht. Bewiesen werden beide Kriterien mit der **Abelschen Formel für partielle Summation**

$$\sum_{k=k_0}^n (a_k b_k) = b_{n+1} \sum_{k=k_0}^n a_k - \sum_{k=k_0}^n \left[ (b_{k+1} - b_k) \sum_{j=k_0}^k a_j \right],$$

denn Konvergenz des vorderen Terms ist klar, die des hinteren Terms stellt die Majorante  $\sum_{k=k_0}^{\infty} |b_{k+1} - b_k|$  sicher.

Im Folgenden geht es hauptsächlich um Umordnungen von Reihen.

**Definition.** Man nennt  $x_+ := \max\{x, 0\} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  den **Positivteil** und  $x_- := \max\{-x, 0\} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  den **Negativteil** von  $x \in \mathbb{R}$ .

Diese Konventionen sind so gewählt, dass  $x = x_+ - x_-$  und  $|x| = x_+ + x_-$  gelten.

**Definition (Umordnungen, Teilreihen).** Sei  $k_0 \in \mathbb{Z}$  und  $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}_{\geq k_0}}$  eine Folge in  $\mathbb{K}$ . Eine Umordnung von  $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$  ist eine Reihe der Form  $\sum_{m=m_0}^{\infty} a_{\ell_m}$  mit  $m_0 \in \mathbb{Z}$ , wenn es sich bei  $m \mapsto \ell_m$  um eine bijektive Abbildung von (Indizes in)  $\mathbb{Z}_{\geq m_0}$  auf (Indizes in)  $\mathbb{Z}_{\geq k_0}$  handelt. Eine Teilreihe von  $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$  ist eine Reihe der Form  $\sum_{m=m_0}^{\infty} a_{\ell_m}$  mit  $m_0 \in \mathbb{Z}$ , bei der  $(\ell_m)_{m \in \mathbb{Z}_{\geq m_0}}$  eine strikt wachsende Folge (von Indizes) in  $\mathbb{Z}_{\geq k_0}$  ist.

Die wesentliche Frage, ob und inwiefern Umordnung Konvergenz und Wert einer Reihe verändern kann, wird mit dem nächsten Satz weitgehend beantwortet.

**Satz (über Umordnungen und Teilreihen).** Sei  $k_0 \in \mathbb{Z}$  und  $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}_{\geq k_0}}$  eine Folge in  $\mathbb{K}$ .

- (I) Konvergiert  $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$  **absolut**, so konvergieren auch alle Umordnungen und Teilreihen von  $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ , und die Umordnungen haben denselben Wert wie  $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$  selbst.
- (I') Liegt für  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  der Fall  $\sum_{k=k_0}^{\infty} (a_k)_+ = \infty$ ,  $\sum_{k=k_0}^{\infty} (a_k)_- < \infty$  vor, so hat jede Umordnung von  $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$  den Wert  $\infty$  (wie auch  $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$  selbst), und jede Teilreihe von  $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$  hat einen Wert in  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ . Im Fall  $\sum_{k=k_0}^{\infty} (a_k)_+ < \infty$ ,  $\sum_{k=k_0}^{\infty} (a_k)_- = \infty$  gilt Analoges mit  $-\infty$  anstelle von  $\infty$ .
- (II) **Riemannscher Umordnungssatz:** Ist  $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$  im Fall  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  konvergent, aber nicht absolut konvergent, so gibt es zu jedem  $s \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$  Umordnungen und Teilreihen von  $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$  mit Wert  $s$ , und es gibt auch unbestimmt divergente Umordnungen und Teilreihen.

Ein Beweis des Satzes wird in der Vorlesung skizziert.

Explizite Beispiele für das Verhalten in (II) liefern Umordnungen und Teilreihen der alternierenden harmonischen Reihe.

**Bemerkung.** Für eine Reihe  $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$  mit reellen Gliedern  $a_k$  ergibt sich aus dem Satz, dass beliebige Umordnung „erlaubt ist“ und den Wert der Reihe nicht ändert, vorausgesetzt dass nur  $\sum_{k=k_0}^{\infty} (a_k)_+ < \infty$  oder  $\sum_{k=k_0}^{\infty} (a_k)_- < \infty$  eintritt (gilt beides, so ist auch  $\sum_{k=k_0}^{\infty} |a_k| < \infty$ , und (I) greift; andernfalls greift (I')). Insbesondere ist **Umordnung** daher **unproblematisch**, wenn fast alle Glieder einheitliches Vorzeichen haben, also  $a_k \geq 0$  für  $k \gg 1$  oder  $a_k \leq 0$  für  $k \gg 1$  gilt.

Im einzig verbleibenden Fall  $\sum_{k=k_0}^{\infty} (a_k)_+ = \sum_{k=k_0}^{\infty} (a_k)_- = \infty$  besagt (II) dagegen, dass bei Umordnung „alles schief gehen“ und sich der Wert der konvergenten Reihe  $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$  beliebig ändern kann. Dies liegt — grob gesagt — daran, dass man bei der Berechnung einer solchen Reihe  $\infty - \infty$  verrechnen muss und dieser Ausdruck hochgradig unbestimmt ist.

**Definition (bedingte und unbedingte Konvergenz).** Eine Reihe  $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$  heißt **unbedingt konvergent**, wenn sie konvergiert und alle ihre Umordnungen denselben Wert haben. Ist die Reihe konvergent, besitzt aber Umordnungen mit verschiedenen Werten oder divergente Umordnungen, so heißt sie **bedingt konvergent**.

**Bemerkung.** Jedenfalls bei reellen Gliedern sind gemäß dem vorausgehenden Satz die absolut konvergenten Reihen genau die unbedingt konvergenten, und die konvergenten, aber nicht absolut konvergenten Reihen sind genau die bedingt konvergenten.

**Definition (Summation über beliebige Indexmengen).** Sei  $I$  eine **abzählbar unendliche Menge**, d.h. es gebe eine Bijektion  $\mathbb{N} \rightarrow I, k \mapsto i_k$  von  $\mathbb{N}$  auf  $I$ . Man trifft dann sukzessive folgende Definitionen, die sich in Anbetracht des vorigen Satzes als nur von  $I$ , nicht aber von der zugrunde gelegten Bijektion abhängig erweisen.

- Ist  $(a_i)_{i \in I}$  eine Familie<sup>2</sup> reeller Zahlen und konvergiert  $\sum_{k=1}^{\infty} (a_{i_k})_+$  oder  $\sum_{k=1}^{\infty} (a_{i_k})_-$  (oder auch beide), so setzt man

$$\sum_{i \in I} a_i := \sum_{k=1}^{\infty} a_{i_k} = \sum_{k=1}^{\infty} (a_{i_k})_+ - \sum_{k=1}^{\infty} (a_{i_k})_- \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\};$$

andernfalls ist  $\sum_{i \in I} a_i$  vom Typ „ $\infty - \infty$ “ und bleibt undefiniert.

- Man nennt eine Familie  $(a_i)_{i \in I}$  **reeller oder komplexer Zahlen summierbar**, wenn (im Sinne des vorigen Punktes)  $\sum_{i \in I} |a_i| < \infty$  gilt.
- Ist  $(a_i)_{i \in I}$  eine **summierbare Familie komplexer Zahlen**, so vereinbart man in teilweiser Verallgemeinerung der reellen Konvention

$$\sum_{i \in I} a_i := \sum_{k=1}^{\infty} a_{i_k} \in \mathbb{C}$$

(wobei Konvergenz durch die Dreiecksungleichung sichergestellt wird).

---

<sup>2</sup>Eine Familie  $(a_i)_{i \in I}$  von Elementen einer Menge  $M$  ist selbst ein Element von  $M^I = \text{Abb}(I, M)$ , d.h.  $(a_i)_{i \in I}$  entspricht einer Funktion  $I \rightarrow M, i \mapsto a_i$ , bei der man  $a_i$  für den  $i \in I$  zugeordneten Funktionswert in  $M$  schreibt.

**Bemerkung.** Prinzipiell kann man  $\sum_{i \in I} a_i$  auch für Familien  $(a_i)_{i \in I}$  mit **überabzählbarer Indexmenge**  $I$  erklären (nämlich erst im Fall  $a_i \geq 0$  als Supremum aller endlichen Teilsommen und dann allgemeiner für  $a_i \in \mathbb{K}$ ). Ein endlicher Wert  $\sum_{i \in I} a_i \in \mathbb{K}$  ergibt sich aber doch nur, wenn die „eigentliche“ Indexmenge  $\{i \in I : a_i \neq 0\}$  endlich oder abzählbar unendlich ist; insofern bringt die Verallgemeinerung kaum einen Gewinn und wird nicht genauer diskutiert.

**Satz (über allgemeine Umordnungen).** *Seien  $I$  und  $\Lambda$  endliche oder abzählbar unendliche Mengen, und  $I = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} J_\lambda$  sei zerlegt in eine Familie  $(J_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  paarweise disjunkter Teilmengen. Falls  $\sum_{i \in I} a_i$  im Sinn der vorigen Definition erklärt ist, so gilt*

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{\lambda \in \Lambda} \sum_{j \in J_\lambda} a_j.$$

Der Beweis des Satzes erfolgt analog zu dem des Umordnungssatzes für Reihen.

Die vielleicht wichtigste Anwendung folgt:

**Korollar & Definition (Doppelreihensatz).** *Sei  $(a_{k,\ell})_{(k,\ell) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0}$  eine Familie reeller oder komplexer Zahlen über der abzählbaren Indexmenge  $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ . Falls  $\sum_{(k,\ell) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0} a_{k,\ell}$  im Sinn der vorigen Definition erklärt ist, so vereinbart man hierfür die Notation  $\sum_{k,\ell=0}^{\infty} a_{k,\ell}$  als Doppelreihe. Es tritt dann **Gleichheit von zeilenweiser, spaltenweiser und diagonaler Summation** ein, d.h. es gilt*

$$\sum_{k,\ell=0}^{\infty} a_{k,\ell} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} a_{k,\ell} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{k,\ell} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\substack{k,\ell \in \mathbb{N}_0 \\ k+\ell=m}} a_{k,\ell}.$$

Für die Rechenpraxis bedeutet der Satz, dass man Doppelreihen  $\sum_{k,\ell=0}^{\infty} a_{k,\ell}$  mit nur nicht-negativen Gliedern  $a_{k,\ell} \geq 0$  oder mit nur nicht-positiven Gliedern  $a_{k,\ell} \leq 0$  problemlos durch Summation in beliebiger Reihenfolge ausrechnen darf (denn in diesen Fällen ist  $\sum_{k,\ell=0}^{\infty} a_{k,\ell} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$  stets erklärt). Sind die Vorzeichen uneinheitlich beziehungsweise die Summanden komplex, so gilt es zunächst  $\sum_{k,\ell=0}^{\infty} (a_{k,\ell})_+$ ,  $\sum_{k,\ell=0}^{\infty} (a_{k,\ell})_-$  beziehungsweise  $\sum_{k,\ell=0}^{\infty} |a_{k,\ell}|$  zu kontrollieren; nur wenn man hierfür ein endliches Ergebnis garantiert, ist  $\sum_{k,\ell=0}^{\infty} a_{k,\ell}$  definiert und darf (wieder in beliebiger Reihenfolge) berechnet werden. Die vorgeschobene Betrachtung der Positiv-/Negativteile beziehungsweise Beträge stellt dabei die Existenz von  $\sum_{k,\ell=0}^{\infty} a_{k,\ell}$  sicher und ist zwingend erforderlich, denn bei Nicht-Existenz von  $\sum_{k,\ell=0}^{\infty} a_{k,\ell}$  können zeilenweise, spaltenweise und diagonale Summation dennoch zu (gleichen oder unterschiedlichen) endlichen Ergebnissen führen, von denen aber keines sinnvoll ist.

Einzig im speziellen Fall  $a_{k,\ell} = a_k b_\ell$  betrifft das gerade beschriebene Problem jedenfalls die zeilen- und spaltenweise Summation nicht, denn, sobald  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  und  $\sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell$  konvergieren, gilt (gemäß Regel über das Herausziehen von Faktoren, ganz ohne Rückgriff auf den Doppelreihensatz)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} (a_k b_\ell) = \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \left( \sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell \right) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (a_k b_\ell).$$

Diagonale Summation ist hierbei auch von Interesse (unter anderem, da sie nicht die Berechnung von zwei Reihen, sondern nur die einer endlichen Summe und einer Reihe erfordert) und ist meist möglich. Dies wird nun genauer formuliert:

**Definition (Cauchy-Produkt von Reihen).** Sind  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$  und  $(b_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}_0}$  Folgen in  $\mathbb{K}$ , so heißt die (formale) Reihe

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\substack{k, \ell \in \mathbb{N}_0 \\ k+\ell=m}} (a_k b_\ell) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^m (a_k b_{m-k}) = \sum_{m=0}^{\infty} (a_0 b_m + a_1 b_{m-1} + a_2 b_{m-2} + \dots + a_{m-1} b_1 + a_m b_0)$$

das Cauchy-Produkt von  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  und  $\sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell$ .

Man kann sich die Bildung des Cauchy-Produkts als ein formales Ausmultiplizieren des Produkts  $(\sum_{k=0}^{\infty} a_k)(\sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell)$  vorstellen (bei dem es dann gilt, die entstehenden Summanden in der angegebenen Reihenfolge wieder aufzusummieren). Diese Interpretation unterstützt auch:

**Korollar (Cauchy-Produkt bei absoluter Konvergenz).** Seien  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$  und  $(b_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}_0}$  Folgen in  $\mathbb{K}$ . Konvergieren die Reihen  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  und  $\sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell$  absolut, so konvergiert auch ihr Cauchy-Produkt absolut, und für die Werte gilt

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^m (a_k b_{m-k}) = \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \left( \sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell \right). \quad (*)$$

Zur Herleitung des Korollars zeigt man durch zeilen- oder spaltenweises Vorgehen Summierbarkeit von  $(a_k b_\ell)_{k, \ell \in \mathbb{N}_0}$  und erhält dann die Behauptung aus dem Doppelreihensatz.

Übrigens kann man (\*) auch unter schwächeren Konvergenzannahmen sicherstellen: Konvergieren die Reihen  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  und  $\sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell$ , aber nur eine von ihnen absolut, so konvergiert ihr Cauchy-Produkt und genügt (\*). Und ist nur bekannt, dass  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ,  $\sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell$  und deren Cauchy-Produkt alle drei konvergieren, so gilt jedenfalls (\*). Die Beweise dieser beiden Aussagen sind allerdings etwas aufwendiger und werden weder hier noch in der Vorlesung behandelt.

## 2.5 Konvergenz von Funktionenfolgen und Funktionenreihen

In diesem Abschnitt geht es um die Konvergenz von Folgen und Reihen, deren Glieder statt Zahlen ganze Funktionen sind.

**Definition (punktweise und gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen).** Seien  $D$  eine Menge und  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\text{Abb}(D, \mathbb{K})$ , d.h. eine Folge von Funktionen  $f_n: D \rightarrow \mathbb{K}$ .

- Man sagt, dass  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  **punktweise** auf  $D$  gegen eine Grenzfunktion  $f \in \text{Abb}(D, \mathbb{K})$  **konvergiert**, wenn gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{für alle } x \in D.$$

- Man sagt, dass  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  **gleichmäßig** auf  $D$  gegen eine Grenzfunktion  $f \in \text{Abb}(D, \mathbb{K})$  **konvergiert**, wenn gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| \right) = 0.$$

Man verwendet für beide Konvergenzarten Notationen wie  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$  und  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$  und setzt entweder „punktweise auf  $D$ “ oder „gleichmäßig auf  $D$ “ in Worten hinzu.

Die Grenzfunktion ist bei beiden Konvergenzarten natürlich eindeutig bestimmt.

Punktweise Konvergenz  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$  bedeutet in einer Schreibweise mit Quantoren

$$\forall x \in D: \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}: \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}: |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

und gleichmäßige Konvergenz  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$  bedeutet

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}: \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}: \forall x \in D: |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Man kann hieran den wesentlichen Unterschied zwischen diesen Konvergenzarten erkennen, nämlich den, dass der All-Quantor  $\forall x$  einmal vor und einmal nach dem Existenz-Quantor  $\exists n_0$  auftritt (wohingegen Vertauschung von  $\forall x$  mit  $\forall \varepsilon$  und  $\forall n$  keinen Unterschied macht). Dies führt dazu, dass bei punktweiser Konvergenz lediglich die Existenz eines von  $x$  und  $\varepsilon$  abhängigen  $n_0$  verlangt wird, während für gleichmäßige Konvergenz ein *nur* von  $\varepsilon$  abhängiges  $n_0$  benötigt wird, das dennoch für alle  $x \in D$  funktioniert. Insbesondere ist hiermit natürlich klar, dass gleichmäßige Konvergenz eine stärkere Forderung als punktweise Konvergenz darstellt.

**Bemerkung.** Die wahre **Bedeutung gleichmäßiger Konvergenz** besteht vor allem darin, dass sie oft die **Vertauschung von Grenzprozessen** rechtfertigt. Beispielsweise erlaubt gleichmäßige Konvergenz die Vertauschung eines Limes und eines Supremums, es gilt also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f \text{ gleichmäßig auf } D \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sup_{x \in D} f_n(x) \right) = \sup_{x \in D} f(x).$$

Punktweise Konvergenz  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$  auf  $D$  liefert dagegen nur  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \left( \sup_{x \in D} f_n(x) \right) \geq \sup_{x \in D} f(x)$ . Analoges gilt natürlich für Infima anstelle von Suprema. **Weitere und wichtigere Beispiele** von Vertauschungsprinzipien, die auf gleichmäßiger Konvergenz beruhen, folgen **demnächst** (und spielen in der ganzen Analysis immer wieder eine wichtige Rolle).

Punktweise und gleichmäßige Konvergenz machen auch bei Funktionenreihen Sinn:

**Definition (punktweise und gleichmäßige Konvergenz von Funktionenreihen).** Seien  $D$  eine Menge,  $k_0 \in \mathbb{Z}$  und  $(f_k)_{k \in \mathbb{Z}_{\geq k_0}}$  eine Folge in  $\text{Abb}(D, \mathbb{K})$ . Man spricht von **punktweiser beziehungsweise gleichmäßiger Konvergenz** der Funktionenreihe  $\sum_{k=k_0}^{\infty} f_k$ , wenn ihre Partialsummenfolge  $(\sum_{k=k_0}^n f_k)_{n \in \mathbb{Z}_{\geq k_0}}$  punktweise beziehungsweise gleichmäßig konvergiert. Als Wert der Reihe betrachtet man im Konvergenzfall die Grenzfunktion

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} f_k := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=k_0}^n f_k.$$

Punktweise Konvergenz von Funktionenfolgen und -reihen lässt sich direkt mit den aus den vorausgehenden Abschnitten bekannten Kriterien für Zahlenfolgen und -reihen untersuchen. Für gleichmäßige Konvergenz wird nun eine Auswahl spezifischer Kriterien formuliert, die nichtsdestotrotz nah am bereits Bekannten bleiben:

**Satz (Kriterien für gleichmäßige Konvergenz).** Seien eine Menge  $D$ ,  $k_0 \in \mathbb{Z}$  und Funktionen  $f_k, f, g_k: D \rightarrow \mathbb{K}$  zu  $k \in \mathbb{Z}$  gegeben.

- (I) **Cauchy-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz:** Die Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert genau dann gleichmäßig auf  $D$ , wenn sie auf  $D$  **gleichmäßige Cauchy-Folge** ist, d.h. wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  gibt, so dass  $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$  für alle  $n, m \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$  und  $x \in D$  gilt.

- (II) **Nullfolgenkriterium:** Gleichmäßige Konvergenz  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$  liegt genau dann vor, wenn es eine Nullfolge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  (von Zahlen!) in  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  gibt, so dass  $\forall x \in D: |f_n(x) - f(x)| \leq a_n$  für  $n \gg 1$  gilt.
- (III) **Weierstraß-Majorantenkriterium:** Gilt  $\forall x \in D: |f_k(x)| \leq c_k$  für  $k \gg 1$  für Konstanten  $c_k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  und konvergiert die **konstante Majorantenreihe**  $\sum_{k=k_0}^{\infty} c_k < \infty$ , so konvergiert die Funktionenreihe  $\sum_{k=k_0}^{\infty} f_k$  gleichmäßig.
- (IV) **Leibniz-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz:** Sei  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ . Ist  $(g_k(x))_{k \in \mathbb{Z}_{\geq k_0}}$  für jedes  $x \in D$  monotone Folge und konvergiert  $g_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$  gleichmäßig auf  $D$ , so konvergiert  $\sum_{k=k_0}^{\infty} (-1)^k g_k$  gleichmäßig auf  $D$ .
- (V) **Abel-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz:** Konvergiert  $\sum_{k=k_0}^{\infty} f_k$  gleichmäßig auf  $D$  sowie  $\sum_{k=k_0}^{\infty} |g_{k+1} - g_k|$  punktweise auf  $D$  und ist  $|g_{k_0}| + \sum_{k=k_0}^{\infty} |g_{k+1} - g_k|$  auf  $D$  beschränkt<sup>3</sup>, so konvergiert  $\sum_{k=k_0}^{\infty} (f_k g_k)$  gleichmäßig auf  $D$ .
- (VI) **Dirichlet-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz:** Bleiben die Partialsummen von  $\sum_{k=k_0}^{\infty} f_k$  auf  $D$  gleichmäßig beschränkt<sup>4</sup> und konvergiert  $\sum_{k=k_0}^{\infty} |g_{k+1} - g_k|$  gleichmäßig auf  $D$  sowie  $g_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$  punktweise auf  $D$ , so konvergiert  $\sum_{k=k_0}^{\infty} (f_k g_k)$  gleichmäßig auf  $D$ .

**Definition & Bemerkung (normale Konvergenz von Funktionenreihen).** Unter den Kriterien des Satzes ist insbesondere das Majorantenkriterium (III) von Bedeutung, so dass sich für die dort vorausgesetzte Konvergenz eine spezifische Bezeichnung eingebürgert hat: Man nennt  $\sum_{k=k_0}^{\infty} f_k$  **normal konvergent**, wenn es wie im Kriterium (III) eine konvergente, konstante Majorantenreihe  $\sum_{k=k_0}^{\infty} c_k < \infty$  gibt.

Die Beweise der Konvergenzkriterien (I)–(III) sind recht einfach: Das Cauchy-Kriterium beweist man durch Zurückführung auf das Cauchy-Kriterium für Zahlenfolgen, das Nullfolgenkriterium ist eine direkte Konsequenz der Definition, und das Majorantenkriterium ergibt sich durch Anwendung der Nullfolgenkriteriums mit einer punktwisen Grenzfunktion und  $a_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k$ .

Die Beweise der Kriterien (V) und (VI) gestalten sich etwas komplizierter. Sie basieren auf der (in Abschnitt 2.4 am Rande erwähnten) **Abelschen Formel für partielle Summation**

$$\sum_{k=m}^n (f_k g_k) = g_{n+1} \sum_{k=m}^n f_k - \sum_{k=m}^n \left[ (g_{k+1} - g_k) \sum_{j=m}^k f_j \right].$$

Für das Abel-Kriterium macht man hierbei den Grenzübergang  $n \geq m \rightarrow \infty$  und argumentiert, dass auf der rechten Seite der Formel  $|g_{n+1}|$  und  $\sum_{k=m}^n |g_{k+1} - g_k|$  gleichmäßig beschränkt bleiben, während  $|\sum_{k=m}^n f_k|$  und  $|\sum_{j=m}^k f_j|$  gleichmäßig gegen Null gehen. Gemäß dem Cauchy-Kriterium (I) folgt dann gleichmäßige Konvergenz von  $\sum_{k=k_0}^{\infty} (f_k g_k)$ . Für das Dirichlet-Kriterium benutzt man, dass aus gleichmäßiger Konvergenz der Reihe  $\sum_{k=k_0}^{\infty} |g_{k+1} - g_k|$  die gleichmäßige Folgen-Konvergenz  $g_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} g$  mit  $g := g_{k_0} + \sum_{k=k_0}^{\infty} (g_{k+1} - g_k)$  folgt. In der Situation von (VI) muss  $g \equiv 0$  sein, daher ist die dort vorausgesetzte Konvergenz  $g_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$  automatisch gleichmäßig. Es reicht nun, in der Abelschen Formel mit  $m = k_0$  den Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$  zu machen. Der hintere Term auf der rechten Seite konvergiert dann gleichmäßig,

<sup>3</sup>Die hier vorausgesetzte Beschränktheit bedeutet  $\sup_{x \in D} [|g_{k_0}(x)| + \sum_{k=k_0}^{\infty} |g_{k+1}(x) - g_k(x)|] < \infty$ .

<sup>4</sup>Gleichmäßige Beschränktheit der Partialsummen bedeutet hier, dass es eine Schranke  $M \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  mit  $|\sum_{k=k_0}^n f_k(x)| \leq M$  für alle  $x \in D$  und  $n \in \mathbb{Z}_{\geq k_0}$  geben muss.

weil  $|\sum_{j=m}^k f_j|$  gleichmäßig beschränkt bleibt und die gleichmäßig konvergente Majorantenreihe  $\sum_{k=m}^{\infty} |g_{k+1} - g_k|$  zur Verfügung steht. Der vordere Term ist als Produkt der gleichmäßigen Nullfolge  $g_{n+1}$  mit einer gleichmäßig beschränkten Folge selbst eine gleichmäßige Nullfolge. Insgesamt folgt somit auch in diesem Fall die behauptete gleichmäßige Konvergenz von  $\sum_{k=m}^{\infty} (f_k g_k)$ .

Das Leibniz-Kriterium (IV) erhält man aus dem Spezialfall  $f_k \equiv (-1)^k$  von (VI), denn unter den Voraussetzungen von (IV) ergibt sich mit  $\sum_{k=k_0}^n |g_{k+1} - g_k| = |\sum_{k=k_0}^n (g_{k+1} - g_k)| = |g_{n+1} - g_{k_0}|$  die gleichmäßige Konvergenz von  $\sum_{k=k_0}^{\infty} |g_{k+1} - g_k| = |g_{k_0}|$ .

## 2.6 Potenzreihen und komplexe Exponentialfunktion

Folgender ist der wichtigste Typ von Funktionenreihen:

**Definition (Potenzreihen).** Eine *Potenzreihe* ist eine Reihe der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + c_3(z-a)^3 + \dots$$

mit gegebenen **Koeffizienten**  $c_0, c_1, c_2, c_3, \dots \in \mathbb{C}$  und gegebenem **Entwicklungspunkt**  $a \in \mathbb{C}$ . Man fasst diese Reihe als Funktionenreihe der komplexen Variablen  $z \in \mathbb{C}$  auf und nennt die Menge  $\{z \in \mathbb{C} : \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k \text{ konvergiert.}\}$  den **Konvergenzbereich** der Potenzreihe. Die durch die Abbildungsvorschrift  $z \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k$  definierte Funktion vom Konvergenzbereich der Potenzreihe nach  $\mathbb{C}$  nennt man eine **Potenzreihenfunktion**.

Das Konvergenzverhalten von Potenzreihen lässt sich nun sehr allgemein beschreiben.

**Hauptsatz (Konvergenzverhalten von Potenzreihen).** Seien  $a \in \mathbb{C}$  und  $(c_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$  eine Folge in  $\mathbb{C}$ . Dann gibt es **genau eine Zahl**  $R \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ , so dass

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k &\text{ für alle } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z-a| < R \text{ konvergiert,} \\ \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k &\text{ für alle } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z-a| > R \text{ divergiert.} \end{aligned}$$

Die Konvergenz im Fall  $|z-a| < R$  ist sogar absolut, und für jedes fixierte  $r < R$  ist sie normal und somit gleichmäßig auf der Menge  $\{z \in \mathbb{C} : |z-a| \leq r\}$ .

**Definition (Konvergenzradius).** Die eindeutig bestimmte Zahl  $R \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$  des Hauptsatzes heißt **Konvergenzradius** der Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k$ .

Der Konvergenzbereich einer Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k$  ist also entweder ganz  $\mathbb{C}$  (Fall  $R = \infty$ ), nur der Entwicklungspunkt  $\{a\}$  (Fall  $R = 0$ ) oder eine Kreisscheibe in der Gaußschen Zahlenebene mit Mittelpunkt  $a$  und Radius  $R \in \mathbb{R}_{>0}$ . Im letzten Fall ist es genauer so, dass die offene Kreisscheibe  $\{z \in \mathbb{C} : |z-a| < R\}$  im Konvergenzbereich und der Konvergenzbereich wiederum in der abgeschlossenen Kreisscheibe  $\{z \in \mathbb{C} : |z-a| \leq R\}$  enthalten ist; darüber, ob/welche Randpunkte, d.h. Punkte der Kreislinie  $\{z \in \mathbb{C} : |z-a| = R\}$ , zum Konvergenzbereich gehören, sagt der Satz erst einmal nichts. Leicht einzusehen ist aber, dass absolute Konvergenz entweder auf der ganzen Kreislinie oder in keinem einzigen Randpunkt eintritt. Liegt keine absolute Konvergenz vor, so ist nicht-absolute Konvergenz auf der ganzen



Kreislinie, Divergenz auf der ganzen Kreislinie oder auch nicht-absolute Konvergenz in manchen und Divergenz in anderen Randpunkten möglich. Grundlegende Beispiele hierzu werden in der Vorlesung besprochen. Fortgeschrittene Beispiele demonstrieren übrigens auch die Möglichkeit des Auftretens „wilder Mischungen“ von Konvergenz- und Divergenzrandpunkten sowie sehr ungleichmäßiger Konvergenz auf dem ganzen Rand.

**Zusatz** (über die **Berechnung von Konvergenzradien**). Zur Berechnung des Konvergenzradius  $R$  einer Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k$  kann man ...

(A) für ein  $R \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$  nachweisen, dass für  $s \in [0, R[$  stets  $|c_k|s^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$  und für  $s \in [R, \infty[$  stets  $|c_k|s^k \not\xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$  gilt;

(B) die **Formel von Euler**

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{c_k}{c_{k+1}} \right|$$

verwenden, **vorausgesetzt** der Limes existiert in  $\mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ ;

(C) die allgemeingültige **Formel von Cauchy-Hadamard**

$$R = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}}$$

verwenden, bei der  $\frac{1}{0} = \infty$  und  $\frac{1}{\infty} = 0$  zu verstehen ist.

Zum Beweis des Hauptsatzes und des Zusatzes wird in der Vorlesung durch Vergleich mit geometrischen Reihen argumentiert. Die Formeln von Euler und Cauchy-Hadamard hängen dabei mit dem Quotientenkriterium und dem Wurzelkriterium des Abschnitts 2.4 zusammen.

**Grundoperationen** (mit Potenzreihen). Seien

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k \quad \text{und} \quad \tilde{f}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{c}_k(z-a)^k$$

Potenzreihen(funktionen) mit Konvergenzradien  $R$  und  $\tilde{R}$ .

(1) **Linearkombinationen**

$$\sum_{k=0}^{\infty} (sc_k + t\tilde{c}_k)(z-a)^k = sf(z) + t\tilde{f}(z) \quad \text{mit } s, t \in \mathbb{K}$$

sind **wieder Potenzreihen**; ihr Konvergenzradius ist mindestens  $\min\{R, \tilde{R}\}$ .

(2) Das **Cauchy-Produkt**

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^m c_k \tilde{c}_{m-k} \right) (z-a)^m = f(z)\tilde{f}(z)$$

ist **wieder eine Potenzreihe**; ihr Konvergenzradius ist mindestens  $\min\{R, \tilde{R}\}$ .

- (3) Unter der **Entwicklung um einen anderen Punkt**  $b$  im offenen Konvergenzbereich (d.h. um  $b \in \mathbb{C}$  mit  $|b-a| < R$ ) versteht man den Übergang zur Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{\ell=0}^{\infty} d_{\ell}(z-b)^{\ell} \quad \text{mit Koeffizienten } d_{\ell} = \sum_{k=\ell}^{\infty} c_k \binom{k}{\ell} (b-a)^{k-\ell}$$

um den Entwicklungspunkt  $b$ . Der Konvergenzradius dieser Reihe ist mindestens  $R-|b-a|$ , und auf der offenen Kreisscheibe um  $b$  mit Radius  $R-|b-a|$  stellt sie die ursprüngliche Funktion  $f$  dar.

Die Form der Koeffizienten in (3) ergibt sich durch Ausmultiplizieren von  $((b-a) + (z-b))^k$  mittels Binomialsatz und Umordnung.

Es folgt das wohl wichtigste Beispiel einer Potenzreihe, deren Konvergenzradius (z.B. gemäß Formel von Euler)  $\infty$  ist:

**Definition (komplexe Exponentialfunktion und Exponentialreihe).** Die **komplexe Exponentialfunktion**  $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ist definiert durch

$$\exp(z) := e^z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \quad \text{für } z \in \mathbb{C}$$

mit der für alle  $z \in \mathbb{C}$  absolut konvergenten **komplexen Exponentialreihe**  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ .

Aufgrund des Satzes über die reelle Exponentialreihe in Abschnitt 2.3 ist diese Definition konsistent mit der früheren Definition von  $\exp(x) = e^x$  für  $x \in \mathbb{R}$ .

**Hauptsatz (Eigenschaften der komplexen Exponentialfunktion).** Wichtige Eigenschaften der komplexen Exponentialfunktion folgen:

- (I) Die Partialsummen der Exponentialreihe genügen der **Fehlerabschätzung**

$$\left| e^z - \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!} \leq \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} (e^{|z|} - 1) \leq \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|z|} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}_0.$$

- (II) Die **Grenzwertdarstellungen** der Exponentialfunktion

$$e^z = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{z}{n} \right)^n \quad \text{und} \quad e^{\lim_{n \rightarrow \infty} z_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{z_n}{n} \right)^n$$

gelten für jedes  $z \in \mathbb{C}$  und jede in  $\mathbb{C}$  konvergente Folge  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

- (III) Es gilt das **Exponentialgesetz**

$$\boxed{e^{z+w} = e^z e^w \quad \text{für alle } z, w \in \mathbb{C}.}$$

- (IV) Es gilt die **Eulersche Formel**

$$\boxed{e^{i\vartheta} = \operatorname{cis} \vartheta = \cos \vartheta + i \sin \vartheta \quad \text{für alle } \vartheta \in \mathbb{R}.}$$

(V) Es gilt die Abschätzung

$$|e^z - e^w| \leq e^M |z - w| \quad \text{für alle } z, w \in \mathbb{C} \text{ mit } \max\{\Re(z), \Re(w)\} \leq M,$$

die später als *Dehnungsbeschränktheit der Exponentialfunktion* (bei von oben beschränktem Realteil) verstanden werden kann.

Aus den Teilen (III), (IV) des Satzes und den Eigenschaften von  $\text{cis}$  erhält man die Folgerungen

$$e^z = e^{\Re(z)} \text{cis}(\text{Im}(z)), \quad |e^z| = e^{\Re(z)}, \quad \overline{e^z} = e^{\overline{z}}$$

für beliebiges  $z \in \mathbb{C}$ , und wegen der Möglichkeit der Polardarstellung folgt auch, dass die Bildmenge  $\exp(\mathbb{C})$  von  $\exp$  genau  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  ist. Aus der  $2\pi$ -Periodizität von  $\text{cis}$  ergibt sich für  $z, w \in \mathbb{C}$  außerdem die Äquivalenz

$$e^z = e^w \iff z = w + 2\pi i k \text{ für ein } k \in \mathbb{Z}$$

und damit die  **$2\pi i$ -Periodizität** der Exponentialfunktion.

Beim Beweis des Hauptsatzes gehen verschiedene Argumente ein. Für die Teile (I) und (II) verwendet man dieselben Abschätzungen wie bei der reellen Exponentialreihe, während das Exponentialgesetz (III) auf die Berechnung des Cauchy-Produkts zweier Exponentialreihen zurückgeführt werden kann. Zum Beweis der Eulerschen Formel verifiziert man mit Abschätzungen aus Abschnitt 1.7 zunächst  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\text{cis} \frac{\vartheta}{n} - 1) = i\vartheta$  und schließt mittels (II) und der Formel von De Moivre auf

$$e^{i\vartheta} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{n(\text{cis} \frac{\vartheta}{n} - 1)}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \text{cis} \frac{\vartheta}{n} \right)^n = \text{cis } \vartheta.$$

Für Teil (V) schließlich wird ein Beweis durch explizite Rechnung und Abschätzung in der Vorlesung angegeben.

Ausgehend von der komplexen Exponentialfunktion können verschiedene andere Funktionen und Konzepte eingeführt werden:

**Korollar & Definition (Kreisfunktionen und Hyperbelfunktionen im Komplexen).**

Für komplexe Argumente  $z \in \mathbb{C}$  erklärt man die **Kreisfunktionen**  $\sin, \cos: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  sowie  $\tan: \mathbb{C} \setminus (\mathbb{Z} + \frac{1}{2})\pi \rightarrow \mathbb{C}$  und  $\cot: \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}\pi \rightarrow \mathbb{C}$  durch

$$\begin{aligned} \cos z &:= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}, & \sin z &:= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}, \\ \tan z &:= \frac{\sin z}{\cos z} \quad \text{falls } z \notin \left(\mathbb{Z} + \frac{1}{2}\right)\pi, & \cot z &:= \frac{\cos z}{\sin z} \quad \text{falls } z \notin \mathbb{Z}\pi \end{aligned}$$

(wobei  $(\mathbb{Z} + \frac{1}{2})\pi := \{(z + \frac{1}{2})\pi : z \in \mathbb{Z}\}$  und ähnliche naheliegende Notationen verwendet wurden). Diese Definition verallgemeinert die in Abschnitt 1.7 erklärten Kreisfunktionen einer reellen Variablen, und man erhält jetzt

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1 \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Analog werden die **Hyperbelfunktionen Sinus Hyperbolicus und Kosinus Hyperbolicus**  $\sinh, \cosh: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  sowie **Tangens Hyperbolicus**  $\tanh: \mathbb{C} \setminus (\mathbb{Z} + \frac{1}{2})i\pi \rightarrow \mathbb{C}$  und **Kotangens**

**Hyperbolicus**  $\coth: \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}i\pi \rightarrow \mathbb{C}$  für  $z \in \mathbb{C}$  erklärt durch

$$\begin{aligned} \cosh z &:= \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}, & \sinh z &:= \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \\ \tanh z &:= \frac{\sinh z}{\cosh z} \quad \text{falls } z \notin \left(\mathbb{Z} + \frac{1}{2}\right)i\pi, & \coth z &:= \frac{\cosh z}{\sinh z} \quad \text{falls } z \notin \mathbb{Z}i\pi. \end{aligned}$$

Man erhält

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1 \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

**Korollar & Definition (komplexe Logarithmen).** Zu jedem  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  gibt es eine Zahl  $w \in \mathbb{C}$  mit  $e^w = z$ . Eine solches  $w$  wird als **komplexer Logarithmus** von  $z$  bezeichnet und ist (nur) bis auf Addition von  $2\pi ik$  mit  $k \in \mathbb{Z}$  eindeutig durch  $z$  bestimmt. Den (völlig) eindeutigen komplexen Logarithmus von  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  mit Imaginärteil in  $]-\pi, \pi]$  bezeichnet man mit  $\text{Log } z$ , und die hierdurch definierte Funktion  $\text{Log}: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} + i] -\pi, \pi]$  nennt man den **Hauptzweig des komplexen Logarithmus**; dieser hängt mit der Argumentfunktion aus Abschnitt 1.7 durch

$$\text{Log } z = \log |z| + i \text{Arg } z \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

zusammen.

**Definition (Potenzen mit komplexen Exponenten).** Für komplexe Basen  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  und komplexe Exponenten  $s \in \mathbb{C}$  kann man eine Potenz  $z^s \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  durch

$$z^s := \exp(s \text{Log } z)$$

über den Hauptzweig  $\text{Log}$  des komplexen Logarithmus erklären.

Für positive reelle Basen  $z = a \in \mathbb{R}_{>0}$  und komplexe Exponenten  $s \in \mathbb{C}$  kommt dann bei  $a^s = \exp(s \log a)$  nur der *reelle* Logarithmus  $\log$  vor, und in diesem Fall ist die Definition allgemein üblich und genügt den „normalen“ Rechenregeln. Für  $z, w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$  dagegen kann sich  $z^s w^s$  von  $(zw)^s$  um einen Faktor  $\exp(s2\pi ik)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  unterscheiden, daher sind Potenzen mit negativen oder nicht-reellen Basen nicht gleichermaßen natürlich und mit Vorsicht zu behandeln.

Als Nächstes werden weitere Sätze und Operationen mit Potenzreihen eingeführt, die dann bei der Behandlung und Berechnung konkreter Beispielreihen eingesetzt werden.

**Satz (Identitätssatz für Potenzreihen).** Seien  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k$  und  $\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{c}_k(z-a)^k$  zwei Potenzreihen mit Koeffizienten  $c_k, \tilde{c}_k \in \mathbb{C}$  und gemeinsamem Entwicklungspunkt  $a \in \mathbb{C}$ . Seien außerdem  $f$  und  $\tilde{f}$  die durch diese Reihen auf den jeweiligen Konvergenzbereichen  $D_f$  und  $D_{\tilde{f}}$  gegebenen Potenzreihenfunktionen. Gibt es dann eine Folge  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $(D_f \cap D_{\tilde{f}}) \setminus \{a\}$  mit  $f(z_n) = \tilde{f}(z_n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ , so stimmen die Koeffizienten  $c_k = \tilde{c}_k$  für alle  $k \in \mathbb{N}_0$  überein (und folglich gilt  $f = \tilde{f}$  auf  $D_f = \tilde{D}_f$ ).

Zum Beweis des Satzes führt man ein Widerspruchsargument. Man nimmt an, dass es Zahlen  $k \in \mathbb{N}_0$  mit  $c_k \neq \tilde{c}_k$  gibt, und betrachtet die kleinste solche Zahl  $k_0 \in \mathbb{N}_0$ . Es ergibt sich dann mit

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(z_n) - \tilde{f}(z_n)}{(z_n - a)^{k_0}} = c_{k_0} - \tilde{c}_{k_0} + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=k_0+1}^{\infty} (c_k - \tilde{c}_k)(z_n - a)^{k-k_0} \\ &= c_{k_0} - \tilde{c}_{k_0} + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \left[ (c_k - \tilde{c}_k) \lim_{n \rightarrow \infty} (z_n - a)^{k-k_0} \right] = c_{k_0} - \tilde{c}_{k_0} \end{aligned}$$

ein Widerspruch. Das soeben erfolgte Hineinziehen des Limes in die Reihe ist hierbei durch die gleichmäßige Konvergenz der Reihe nahe des Entwicklungspunkts  $a$  gerechtfertigt und wird in der Vorlesung technisch genauer begründet. Es handelt sich um eine **typische Manifestation des Prinzips, dass gleichmäßige Konvergenz die Vertauschung von Grenzprozessen erlaubt**.

**Weitere Operationen** (mit Potenzreihen). Seien

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k, \quad \tilde{f}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{c}_k (z-a)^k, \quad \tilde{g}(\zeta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \tilde{d}_\ell (\zeta - \tilde{f}(a))^\ell$$

Potenzreihen(funktionen) mit positiven Konvergenzradien (wobei ein eventueller Wechsel des Entwicklungspunkts gemäß Operation (3) bei  $\tilde{f}$ ,  $\tilde{g}$  bereits vorgenommen sei).

- (4) Ist  $c_0 = f(a) \neq 0$ , so ist der **Quotient**  $\frac{\tilde{f}(z)}{f(z)}$  **wieder** als **Potenzreihe** mit positivem Konvergenzradius um den Entwicklungspunkt  $a$  darstellbar.
- (5) Die **Verkettung**  $\tilde{g}(\tilde{f}(z))$  ist **wieder** als **Potenzreihe** mit positivem Konvergenzradius um den Entwicklungspunkt  $a$  darstellbar.
- (6) Ist  $c_1 \neq 0$ , so gibt es ein  $\rho > 0$  und eine **Potenzreihenfunktion**  $g$  mit  $g(c_0) = a$  vom Konvergenzradius mindestens  $\rho$  um den Entwicklungspunkt  $c_0 = f(a)$ , so dass  $f(g(\zeta)) = \zeta$  für  $|\zeta - c_0| < \rho$  gilt. Man bezeichnet  $g$  dann als (lokale) **Umkehrfunktion** zu  $f$  nahe  $a$ .

Der wesentliche Punkt ist hierbei, dass die **Konvergenzradien** der Reihen in (4), (5), (6) zwar nicht explizit gegeben, aber jedenfalls **positiv** sind.

*Beweis zu Quotienten-Operation (4).* Es reicht,  $1/f(z)$  in eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius zu entwickeln, denn mittels Cauchy-Produkt erhält man aus Potenzreihen für  $\tilde{f}(z)$  und  $1/f(z)$  eine weitere für den Quotienten  $\tilde{f}(z)/f(z)$ , wieder mit positivem Konvergenzradius. Die Entwicklung von  $1/f(z)$  gelingt mittels der geometrischen Reihe

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{c_0} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{c_0} \sum_{k=1}^{\infty} c_k (z-a)^k} = \frac{1}{c_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left( -\frac{1}{c_0} \sum_{k=1}^{\infty} c_k (z-a)^k \right)^\ell,$$

wobei die Konvergenz der rechten Seite für  $|z-a| \leq \rho$  mit einem gewissen positiven Radius  $\rho$  jetzt diskutiert wird. Aufgrund des positiven Konvergenzradius der Ausgangsreihe ist es tatsächlich möglich (und reicht aus), ein positives  $\rho$  mit  $\frac{\rho}{|c_0|} \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \rho^{k-1} \leq \frac{1}{2}$  zu wählen. Wegen  $\frac{1}{|c_0|} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left( \frac{1}{|c_0|} \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \rho^k \right)^\ell \leq \frac{1}{|c_0|} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2} \right)^\ell = \frac{2}{|c_0|}$  konvergieren für  $|z-a| \leq \rho$  dann alle Reihen in der Entwicklung von  $1/f(z)$  absolut. Die absolute Konvergenz bleibt erhalten, wenn man  $\left( -\frac{1}{c_0} \sum_{k=1}^{\infty} c_k (z-a)^k \right)^\ell = \sum_{k=\ell}^{\infty} \gamma_{k,\ell} (z-a)^k$  mittels mehrfachen Cauchy-Produkts ausmultipliziert und gewisse Koeffizienten  $\gamma_{k,\ell} \in \mathbb{C}$  erhält. Folglich erlaubt die absolute Konvergenz auch die Umordnung

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{c_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{k=\ell}^{\infty} \gamma_{k,\ell} (z-a)^k = \frac{1}{c_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{c_0} \sum_{\ell=0}^k \gamma_{k,\ell} \right) (z-a)^k$$

der erhaltenen Doppelreihe in eine mindestens für  $|z-a| \leq \rho$  konvergente Potenzreihe.  $\square$

*Beweis zur Verkettungs-Operation (5).* Für die Verkettung erhält man durch Einsetzen und Vereinfachung mittels  $\tilde{f}(a) = \tilde{c}_0$  die Reihe

$$\tilde{g}(\tilde{f}(z)) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \tilde{d}_\ell \left( \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{c}_k (z-a)^k - \tilde{f}(a) \right)^\ell = \sum_{\ell=0}^{\infty} \tilde{d}_\ell \left( \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{c}_k (z-a)^k \right)^\ell.$$

Auch hier ist die Konvergenz für  $|z-a| \leq \rho$  mit positivem  $\rho$  sicherzustellen. Den Ansatzpunkt dafür bildet die Beobachtung, dass die Koeffizienten  $\tilde{d}_\ell$  wegen des positiven Konvergenzradius der zugehörigen Potenzreihe höchstens exponentiell wachsen können, also  $|\tilde{d}_\ell| \leq C q^\ell$  für alle  $\ell \in \mathbb{N}_0$  und gewisse Konstanten  $q, C \in \mathbb{R}_{>0}$  erfüllen. Darauf aufbauend argumentiert man weitgehend wie im vorigen Beweis: Es kann ein positives  $\rho$  mit  $\rho \sum_{k=1}^{\infty} |\tilde{c}_k| \rho^{k-1} \leq \frac{1}{2q}$  gewählt werden, für  $|z-a| \leq \rho$  ist absolute Konvergenz garantiert, und per Cauchy-Produkt und Umordnung gelangt man zu einer mindestens für  $|z-a| \leq \rho$  konvergenten Potenzreihendarstellung von  $\tilde{g}(\tilde{f}(z))$ .  $\square$

Der Beweis zur Umkehr-Operation (6) ist mit der Binomialreihe des nächsten Satzes verbunden und wird deshalb bis nach diesem Satz aufgeschoben.

**Satz (grundlegende Beispiele von Potenzreihen).** *Grundlegende Potenzreihen sind ...*

(I) die **Binomialreihe** zum Exponent  $s \in \mathbb{C}$  (Konvergenzradius 1 falls  $s \notin \mathbb{N}_0$  und  $\infty$  sonst)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{s}{k} z^k = (1+z)^s \quad \text{für } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| < 1$$

(wobei rechts die oben definierten allgemeinen Potenzen auftreten);

(II) die **Logarithmusreihe** (Konvergenzradius 1)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} z^k = \text{Log}(1+z) \quad \text{für } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| < 1$$

(wobei rechts der Hauptzweig Log des komplexen Logarithmus auftritt);

(III) die Reihe mit den Bernoulli-Zahlen  $b_k$  (positiver Konvergenzradius  $R_e$ , der sich später als  $2\pi$  herausstellen wird)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{k!} z^k = \frac{z}{e^z - 1} \quad \text{für } z \in \mathbb{C} \text{ mit } 0 \neq |z| < R_e.$$

**Bemerkung.** Die Bedeutung der letztgenannten Reihe besteht vor allem darin, dass man aus ihr **Reihenentwicklungen der Kreis- und Hyperbelfunktionen tan, cot, tanh und coth** ableiten kann. Im Einzelnen verwendet man dazu die Formeln  $z \coth z = z + \frac{2z}{e^z - 1}$  und  $\tanh z = 2 \coth(2z) - \coth z$  sowie  $\cot z = i \coth(iz)$  und  $\tan z = \frac{1}{i} \tanh(iz)$ . Benutzt man zudem  $b_1 = -\frac{1}{2}$  und die Tatsache, dass alle anderen Bernoulli-Zahlen  $b_k$  mit ungeradem Index verschwinden, so ergibt sich (Formeln mit coth und cot gültig für  $0 \neq |z| < \frac{R_e}{2}$ , mit tanh und tan für  $|z| < \frac{R_e}{4}$ )

$$\begin{aligned} z \coth z &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^k b_{2k}}{(2k)!} z^{2k}, & \tanh z &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^k (4^k - 1) b_{2k}}{(2k)!} z^{2k-1}, \\ z \cot z &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 4^k b_{2k}}{(2k)!} z^{2k}, & \tan z &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} 4^k (4^k - 1) b_{2k}}{(2k)!} z^{2k-1}. \end{aligned}$$

Ein Beweis des Satzes wird in der Vorlesung gegeben.

Im Einzelnen wird bei diesem Beweis zuerst der Wert  $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{s}{k} x^k = (1+x)^s$  der Binomialreihe für *reelle*  $x \in ]-1, 1[$  und *rationale* Exponenten  $s \in \mathbb{Q}$  nachgewiesen. Damit lässt sich dann die Möglichkeit der Umkehr-Operation (6) begründen:

*Beweisskizze zur Umkehr-Operation (6).* Es lässt sich annehmen, dass  $a = c_0 = 0$ ,  $c_1 = 1$  eintritt (sonst zu  $f_0(z) := c_1^{-1}(f(a+z) - c_0)$  übergehen) und der Konvergenzradius  $R$  von  $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} c_k z^k$  größer als 1 ist (sonst  $f_*(z) := \frac{2}{R} f(\frac{R}{2} z)$  betrachten). Für  $M := \sup_{k \in \mathbb{N}} |c_k|$  bedeutet dies  $M \geq 1$  und (zum Beispiel gemäß der Formel von Cauchy-Hadamard)  $M < \infty$ .

Für eine Vorüberlegung sei zudem angenommen, dass die gesuchte Entwicklung der Umkehrfunktion  $g(\zeta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} d_{\ell} \zeta^{\ell}$  mit positivem Konvergenzradius existiert. Dann muss  $d_0 = g(0) = 0$  gelten, und aus  $\zeta = f(g(\zeta)) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k (\sum_{\ell=1}^{\infty} d_{\ell} \zeta^{\ell})^k$  berechnet man durch Ausmultiplizieren der rechten Seite, Koeffizientenvergleich gemäß dem Identitätssatz und Auflösen

$$d_1 = 1 \quad \text{und} \quad d_m = - \sum_{k=2}^m c_k \sum_{\substack{\ell_1, \dots, \ell_k \in \mathbb{N} \\ \ell_1 + \dots + \ell_k = m}} d_{\ell_1} d_{\ell_2} \dots d_{\ell_k} \quad \text{für } m \in \mathbb{N}_{\geq 2}.$$

Um die Existenz der gesuchten Potenzreihenfunktion  $g$  zu beweisen, kehrt man diese Argumentation nun um: Man fasst die gerade erhaltenen Formeln als Rekursionsformeln auf, durch die man die Koeffizienten  $d_\ell$  überhaupt erst definiert. Dann erhält man die Behauptung, sobald man bei  $g(\zeta) := \sum_{\ell=1}^{\infty} d_\ell \zeta^\ell$  einen positiven Konvergenzradius sicherstellt — denn die Rekursionsformeln wurden ja gerade so bestimmt, dass  $f(g(\zeta)) = \zeta$  für  $|\zeta| \ll 1$  eintritt.

Es bleibt also nur der behauptete *positive* Konvergenzradius beim so definierten  $g$  nachzuweisen. Dazu vergleicht man  $z + \sum_{k=2}^{\infty} c_k z^k = f(z)$  für  $|z| \ll 1$  mit der geometrischen Reihenentwicklung  $z - \sum_{k=2}^{\infty} z^k = z - \frac{z^2}{1-z} =: \hat{f}(z)$ . Durch Lösen einer quadratischen Gleichung erhält man eine explizite lokale Umkehrfunktion  $\hat{g}$  zu  $\hat{f}$ , diese ist zumindest für  $x \in \mathbb{R}$  mit  $|x| \ll 1$  durch  $\hat{g}(x) = \frac{1}{4}(1+x-\sqrt{1-6x+x^2})$  gegeben. Der erhaltene Ausdruck für  $\hat{g}$  lässt sich mit (dem schon verfügbaren Fall) der Binomialreihe und der Verkettungs-Operation (5) in eine Potenzreihe  $\hat{g}(x) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \hat{d}_\ell x^\ell$  mit positivem Konvergenzradius entwickeln. Die Rekursionsformeln der Vorüberlegung müssen nun auch mit den Koeffizienten  $\hat{d}_\ell$  von  $\hat{g}$  anstelle der  $d_\ell$  und den Koeffizienten  $\hat{c}_2 = \hat{c}_3 = \hat{c}_4 = \dots = -1$  von  $\hat{f}$  anstelle der  $c_k$  gelten (denn für die Vorüberlegung reicht es,  $\hat{f}(\hat{g}(x)) = x$  nur für *reelle*  $x$  zu wissen, die sich gegen 0 häufen). Aus der Struktur der Rekursionsformeln und  $|c_k| \leq M = M(-\hat{c}_k)$  für  $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$  folgt jetzt durch Induktion  $|d_m| \leq M^{m-1} \hat{d}_m$  für alle  $m \in \mathbb{N}$ , und damit kann man vom positiven Konvergenzradius bei  $\hat{g}$  auf einen positiven Konvergenzradius bei  $g$  schließen.  $\square$

Unter Verwendung der Umkehr-Operation (6) können die Aussagen des letzten Satzes zur Binomialreihe (im allgemeinen Fall) und zur Logarithmusreihe gezeigt werden. Die Aussage über die Reihe mit den Bernoulli-Zahlen beruht dagegen auf der Quotienten-Operation (4). Für die Ausführung dieser Beweise wird auf die Vorlesung verwiesen.

Als vorläufig letztes Resultat zu Reihen wird noch ein nützliches Ergebnis zum Randverhalten von Potenzreihen erwähnt.

**Satz (Abelscher Grenzwertsatz).** Sei  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k =: f(z)$  eine Potenzreihe(nfunktion) mit positivem Konvergenzradius  $R$ . **Konvergiert die Reihe in einem Randpunkt  $z^* \in \mathbb{C}$ ,  $|z^* - a| = R$  ihres Konvergenzbereichs  $D$ , so konvergiert sie gleichmäßig auf jedem dreieckigen Bereich  $\Delta$  mit diesem Randpunkt  $z^*$  als einer Ecke und den anderen beiden Ecken in  $D$ . Für jede konvergente Folge  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\Delta$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n \in D$  gilt dann**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} z_n\right),$$

und insbesondere kann der Reihenwert im Randpunkt

$$f(z^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}a + \left(1 - \frac{1}{n}\right)z^*\right)$$

durch Annäherung entlang der Strecke von  $a$  nach  $z^*$  berechnet werden.

Der Beweis der im Satz behaupteten gleichmäßigen Konvergenz erfolgt mit dem Abel-Kriterium aus Abschnitt 2.5. Die Grenzwertaussagen basieren dann auf der Vertauschung des Limes mit der Reihe und ergeben sich als eine typische Folgerung aus der gleichmäßiger Konvergenz.

**Bemerkung.** Der Satz erfasst auch und vor allem den Fall nicht-absoluter Konvergenz im Randpunkt  $z^*$  und garantiert selbst dann, dass diese Konvergenz gegen den „erwarteten“ Wert erfolgt und dieser als Limes von Werten im Innern des Konvergenzkreises berechnet werden kann. Bei absoluter Konvergenz in einem Randpunkt stimmt dies auch, ist aber viel einfacher einzusehen: In diesem Fall hat man ja direkt eine konstante Majorantenreihe, die sogar auf dem gesamten Konvergenzkreis gleichmäßige Konvergenz erzwingt.

**Anwendung** (des Abelschen Grenzwertsatzes auf die Logarithmusreihe). Gemäß dem Dirichlet-Kriterium konvergiert die Logarithmus-Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} z^k$  auch für alle Randpunkte  $z \in \mathbb{C}$ ,  $|z| = 1$  ihres Konvergenzkreises außer  $z = -1$ . Aus dem Abelschen Grenzwertsatz folgt dann, dass die Logarithmusreihe auch in diesen Randpunkten den Wert  $\text{Log}(1+z)$  besitzt. Für  $z = 1$  ergibt sich hieraus der Wert der alternierenden harmonischen Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \log 2$$

(die in den Übungen aber auch auf anderem Weg schon berechnet wurde). Für  $z = \mathbf{i}$  erhält man nach Imaginärteilbildung den Wert der sogenannten **Leibnizschen Reihe**

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell}}{2\ell+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \pm \dots = \frac{\pi}{4}.$$



## Kapitel 3

# Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit

### 3.1 Allgemeine Grenzwerte

In diesem Abschnitt wird ein allgemeiner Grenzwertbegriff vorgestellt.

**Definition (allgemeine Grenzwerte, Umgebungsformulierung).** Seien Mengen  $D$  und  $M$ , eine Funktion  $f: D \rightarrow M$  sowie nicht-leere Mengensysteme  $\mathcal{S}_a \subset \mathcal{P}(D)$  und  $\mathcal{S}_b \subset \mathcal{P}(M)$  gegeben, wobei die Elemente von  $\mathcal{S}_a$  in diesem Zusammenhang als **Umgebungen von  $a$**  und die von  $\mathcal{S}_b$  als **Umgebungen von  $b$**  bezeichnet werden. Man sagt dann, dass  **$f(x)$  beim Grenzübergang  $x \rightarrow a$  gegen  $b$  konvergiert** und nennt  $b$  den **Grenzwert oder Limes von  $f$  an der Grenzstelle  $a$** , wenn es zu jedem  $V \in \mathcal{S}_b$  ein  $U \in \mathcal{S}_a$  gibt, so dass für alle  $x \in U \setminus \{a\}$  auch  $f(x) \in V$  gilt. Man notiert hierfür

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \quad \text{oder} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b.$$

Es mag verwundern, dass  $a$  und  $b$  in dieser Definition nicht spezifiziert werden und zur Definition von  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  nur die beliebigen Mengensysteme  $\mathcal{S}_a$  und  $\mathcal{S}_b$  verwendet werden, während  $a$  und  $b$  selbst gar nicht auftreten (jedenfalls abgesehen von der Herausnahme von  $\{a\}$ ). Hierfür gibt es aber gute Gründe: Zum einen kann man sich für den Anfang zwar  $a \in D$ ,  $b \in M$  oder sogar  $a \in U$ ,  $b \in V$  für alle  $U \in \mathcal{S}_a$ ,  $V \in \mathcal{S}_b$  vorstellen, aber für viele naheliegende Fälle ist dies schon zu einschränkend. Zum anderen arbeitet man in der Praxis nicht mit beliebigen, sondern mit speziellen, nur von  $a$  und  $b$  abhängigen Mengensystemen  $\mathcal{S}_a$  und  $\mathcal{S}_b$ , so dass es Sinn macht, bei  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  nur  $a$  und  $b$  zu notieren und auf explizite Angabe von  $\mathcal{S}_a$  und  $\mathcal{S}_b$  zu verzichten. Beides wird im Folgenden noch klarer.

#### Bemerkungen.

- (1) In einer **Formulierung mit Quantoren** besagt die Definition von  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  gerade

$$\forall V \in \mathcal{S}_b: \exists U \in \mathcal{S}_a: \forall x \in U \setminus \{a\}: f(x) \in V.$$

Die Aussage  $\forall x \in U \setminus \{a\}: f(x) \in V$  kann man dabei kürzer als  $f(U \setminus \{a\}) \subset V$  notieren.

- (2) Bei Wahl geeigneter Mengensysteme  $\mathcal{S}_a$  und  $\mathcal{S}_b$  bedeutet  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ , **dass für nahe an  $a$  gelegene, doch von  $a$  verschiedene  $x$  auch  $f(x)$  nahe an  $b$  liegt**. Unter gewissen

Minimalannahmen (im Einzelnen denen, dass  $(U \cap \tilde{U}) \setminus \{a\} \neq \emptyset$  für alle  $U, \tilde{U} \in \mathcal{S}_a$  gilt und es zu zwei verschiedenen Kandidaten  $b \neq \tilde{b}$  für den Grenzwert jeweils ein  $V \in \mathcal{S}_b$  und ein  $\tilde{V} \in \mathcal{S}_{\tilde{b}}$  mit  $V \cap \tilde{V} = \emptyset$  gibt) ist der **Limes**  $b$  außerdem **eindeutig** durch  $a$  und die Werte von  $f$  auf einer punktierten Umgebung  $U \setminus \{a\}$ ,  $U \in \mathcal{S}_a$  von  $a$  bestimmt. Insbesondere **hängt**  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  **nicht vom Funktionswert  $f(a)$**  an der Grenzstelle  $a$  ab.

(3) Analog erklärt man  $b$  zum **Häufungswert** von  $f(x)$  beim Grenzübergang  $x \rightarrow a$ , wenn

$$\forall V \in \mathcal{S}_b: \forall U \in \mathcal{S}_a: \exists x \in U \setminus \{a\}: f(x) \in V$$

gilt. Für  $M = \mathbb{R}$  kann man dann in Analogie zu Folgen auch für allgemeine Grenzübergänge  $x \rightarrow a$  den **Limes superior** und den **Limes inferior** als größten und kleinsten Häufungswert einführen.

**Definitionen & Bemerkungen (Standard-Grenzwerte,  $\varepsilon$ - $\delta$ -Formulierung).** Seien  $D$  und  $M$  Mengen sowie  $f: D \rightarrow M$  eine Funktion. Typischerweise sind die Umgebungssysteme der vorigen Definition von der Form

$$\mathcal{S}_a = \{U_\delta(a) \cap D : \delta \in \mathbb{R}_{>0}\}, \quad \mathcal{S}_b = \{V_\varepsilon(b) \cap M : \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\},$$

die Umgebungen können also durch positive Parameter  $\delta$  und  $\varepsilon$  beschrieben werden. Ist dies der Fall, so ist  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  auch durch die  $\varepsilon$ - $\delta$ -Bedingung

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}: \exists \delta \in \mathbb{R}_{>0}: \forall x \in D: (x \in U_\delta(a) \setminus \{a\} \implies f(x) \in V_\varepsilon(b))$$

charakterisiert. Im Fall  $D \subset \mathbb{K}$  vereinbart man dabei folgende **Standard-Wahlen der  $\delta$ -Umgebungen**  $U_\delta(a)$  von  $a$ :

- (1) Beim (beidseitigen) **reellen Grenzübergang**  $x \rightarrow a$  gegen  $a \in \mathbb{R}$  wählt man stets die  $\delta$ -Umgebungen  $U_\delta(a) = ]a-\delta, a+\delta[$  von  $a$ .
- (2) **Einseitige (reelle) Grenzübergänge** gegen  $a \in \mathbb{R}$  sind der **linksseitige Grenzübergang**  $x \nearrow a$  bzw.  $x \rightarrow a-$  mit den  $\delta$ -Umgebungen  $U_\delta(a) = ]a-\delta, a[$  und der **rechtsseitige Grenzübergang**  $x \searrow a$  bzw.  $x \rightarrow a+$  mit den  $\delta$ -Umgebungen  $U_\delta(a) = ]a, a+\delta[$ .
- (3) Beim (allseitigen) **komplexen Grenzübergang**  $z \rightarrow a$  gegen  $a \in \mathbb{C}$  wählt man die  $\delta$ -Umgebungen  $U_\delta(a) = B_\delta(a) := \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < \delta\}$  als Radius- $\delta$ -Kreise um  $a$ .
- (4) **Uneigentliche reelle Grenzübergänge** sind  $x \rightarrow \infty$  bzw.  $x \nearrow \infty$  mit den  $\delta$ -Umgebungen  $U_\delta(\infty) = ]\frac{1}{\delta}, \infty[$  und  $x \rightarrow -\infty$  bzw.  $x \searrow -\infty$  mit den  $\delta$ -Umgebungen  $U_\delta(-\infty) = ]-\infty, -\frac{1}{\delta}[$ .
- (5) Beim **uneigentlichen komplexen Grenzübergang**  $|z| \rightarrow \infty$  bzw.  $z \rightarrow \infty_{\mathbb{C}}$  gegen den sogenannten **unendlich fernen Punkt**  $\infty_{\mathbb{C}}$  der Gaußschen Zahlenebene verwendet man die  $\delta$ -Umgebungen  $U_\delta(\infty_{\mathbb{C}}) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > \frac{1}{\delta}\}$  von  $\infty_{\mathbb{C}}$ .

Völlig analog erfolgt für  $M \subset \mathbb{K}$  die **Wahl der  $\varepsilon$ -Umgebungen**  $V_\varepsilon(b)$  von  $b$ , sowohl bei eigentlichen Grenzwerten  $b \in \mathbb{K}$  als auch bei uneigentlichen Grenzwerten  $b \in \{\infty, -\infty, \infty_{\mathbb{C}}\}$ .

Ein erwähnenswerter Zusammenhang besteht zwischen Limites der Typen (1) und (2): Genau dann gilt  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  für den beidseitigen Limes, wenn bei den einseitigen Limites die Gleichheit  $\lim_{x \nearrow a} f(x) = b = \lim_{x \searrow a} f(x)$  eintritt.

**Bemerkungen.**

- (1) Man beschränkt sich stets auf die Betrachtung von Grenzstellen  $a$ , denen man in  $D$  beliebig nah kommen kann, d.h. auf solche  $a$ , die  $U_\delta(a) \cap D \setminus \{a\} \neq \emptyset$  für alle  $\delta > 0$  erfüllen. Ist dies gegeben, so genügen die aufgezählten Standard-Umgebungen jedenfalls den Minimalvoraussetzungen, die Eindeutigkeit des Limes sicherstellen.
- (2) Genau genommen hängt der Grenzwertbegriff auch vom zugrunde gelegten Definitionsbereich  $D$  ab. Manchmal ist es daher sinnvoll,  $D$  durch Notationen wie  $\lim_{D \ni x \rightarrow a} f(x) = b$  oder  $f(x) \xrightarrow{D \ni x \rightarrow a} b$  hervorzuheben.
- (3) Der **Grenzwertbegriff für Folgen** ist in den obigen Definitionen als **Spezialfall enthalten** und entspricht dem Grenzübergang  $\mathbb{N} \ni n \rightarrow \infty$  mit zugrunde liegendem Definitionsbereich  $\mathbb{N}$ ; dies erkennt man daran, dass  $U_\delta(\infty) \cap \mathbb{N} = \mathbb{N}_{\geq n_0}$  für  $n_0 := \lfloor \frac{1}{\delta} \rfloor + 1$  gilt.

**Satz (Folgenkriterium für allgemeine Grenzwerte).** Seien  $D, M$  Mengen,  $f: D \rightarrow M$  eine Funktion sowie  $\mathcal{S}_a \subset \mathcal{P}(D)$ ,  $\mathcal{S}_b \subset \mathcal{P}(M)$  nicht-leere Mengensysteme. Das System  $\mathcal{S}_a$  genüge der schwachen Annahme, dass es bereits durch abzählbar viele Umgebungen  $U_1^*, U_2^*, U_3^*, \dots \in \mathcal{S}_a$  gekennzeichnet<sup>1</sup> ist. Dann gilt:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \iff \text{Für jede Folge } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ in } D \setminus \{a\} \text{ mit } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \text{ gilt auch } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b.$$

Hierbei sind alle Grenzwertbildungen im Sinn der allgemeinen Definition zu verstehen. Bei  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  wird diese wie zuvor mit  $\mathcal{S}_a, \mathcal{S}_b$  angewandt, bei  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  mit Standard-Umgebungen von  $\infty$  und  $\mathcal{S}_a$ , bei  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$  mit Standard-Umgebungen von  $\infty$  und  $\mathcal{S}_b$ .

Der kurze Beweis des Folgenkriteriums wird in der Vorlesung geführt.

Als Nächstes folgen einige auch für praktische Grenzwertberechnungen nützliche Resultate.

**Satz.** Seien  $D$  eine Menge,  $f, g, h: D \rightarrow \mathbb{K}$  Funktionen und  $\mathcal{S}_a \subset \mathcal{P}(D)$  ein nicht-leeres Mengensystem, das der Annahme des vorigen Satzes (oder einer noch etwas schwächeren<sup>2</sup>) genügt.

(I) **Grenzwert-Rechenregeln:** Wenn die Ausdrücke rechts definiert sind, gelten die Regeln

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) &= \left( \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right) \pm \left( \lim_{x \rightarrow a} g(x) \right), \\ \lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) &= \left( \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right) \left( \lim_{x \rightarrow a} g(x) \right), \\ \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}, \\ \lim_{x \rightarrow a} \log f(x) &= \log \left( \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right), \\ \lim_{x \rightarrow a} (f(x)^{g(x)}) &= \left( \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}, \end{aligned}$$

wobei für die letzte Regel zu Potenzen noch  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) > 0$  vorausgesetzt sei (oder alternativ  $f \geq 0$  auf einer punktierten Umgebung  $U \setminus \{a\}$ ,  $U \in \mathcal{S}_a$ , samt  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) > 0$ ).

<sup>1</sup>Die genaue Annahme ist die Existenz abzählbar vieler  $U_1^*, U_2^*, U_3^*, \dots \in \mathcal{S}_a$ , so dass  $U_n^* \setminus \{a\} \neq \emptyset$  und  $U_{n+1}^* \subset U_n^*$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gelten und für jedes  $U \in \mathcal{S}_a$  ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $U_n^* \subset U$  existiert. Man verwendet hierfür auch die Sprechweise, dass eine abzählbare Basis  $U_1^*, U_2^*, U_3^*, \dots$  für  $\mathcal{S}_a$  existiert, und bei den Standard- $\delta$ -Umgebungen  $U_\delta(a)$  ist eine solche stets durch die Wahl  $U_n^* = U_{1/n}(a) \cap D$  gegeben.

<sup>2</sup>Hier reicht, dass  $U \setminus \{a\} \neq \emptyset$  für alle  $U \in \mathcal{S}_a$  gilt und es zu  $U, \tilde{U} \in \mathcal{S}_a$  stets ein  $\hat{U} \in \mathcal{S}_a$  mit  $\hat{U} \subset U \cap \tilde{U}$  gibt. Auch dies ist für Standard-Wahlen von  $\mathcal{S}_a$  erfüllt und sichert jedenfalls Eindeutigkeit der betrachteten Limes.

- (II) **Einschachtelungsprinzip:** *Gibt es eine Umgebung  $U \in \mathcal{S}_a$  von  $a$ , so dass  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  für alle  $x \in U \setminus \{a\}$  gilt, und existieren  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) =: b$  mit gleichem Wert  $b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ , so existiert auch  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ .*

Hierbei betrifft das allgemeine Umgebungssystem  $\mathcal{S}_a$  nur die Grenzstelle  $a$ , für die Grenzwerte konnten wie üblich Standard-Umgebungen unterstellt werden (denn  $f$ ,  $g$  und  $h$  sind  $\mathbb{K}$ -wertig).

Besitzt  $\mathcal{S}_a$  die für das Folgenkriterium benötigte abzählbare Basis, so kann man die Behauptungen des Satzes auf Resultate für Folgen aus Abschnitt 2.1 zurückführen. Man kann die von Folgen bekannten Beweise aber auch problemlos so modifizieren, dass sie direkt mit Umgebungen arbeiten, und kommt dann mit der noch etwas schwächeren Annahme für  $\mathcal{S}_a$  aus.

**Satz (Substitutionsregel für Grenzwerte).** *Seien  $A, B, C$  Mengen,  $f: A \rightarrow B$ ,  $g: B \rightarrow C$  Funktionen und  $\mathcal{S}_a \subset \mathcal{P}(A)$ ,  $\mathcal{S}_b \subset \mathcal{P}(B)$ ,  $\mathcal{S}_c \subset \mathcal{P}(C)$  nicht-leere Mengensysteme. Dann gilt*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \text{ und } \lim_{y \rightarrow b} g(y) = c \implies \lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = c,$$

*vorausgesetzt dass entweder  $f$  den Wert  $b$  auf  $A \setminus \{a\}$  nicht annimmt oder  $g(b)$  mit dem Grenzwert  $c \in \bigcap_{W \in \mathcal{S}_c} W$  übereinstimmt.*

Beispiele für Grenzwertberechnungen mit Hilfe dieser Resultate werden in der Vorlesung gegeben.

## 3.2 Stetige Funktionen einer Variablen

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit einem (ersten) wichtigen Konzept gutartiger Funktionen.

**Definition (Stetigkeit).** *Sei  $f: D \rightarrow \mathbb{K}$  eine Funktion auf einer Teilmenge  $D$  von  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  und  $a \in D$ . Man bezeichnet  $f$  als **stetig in  $a$**  oder **stetig an der Stelle  $a$** , wenn der (bezüglich Standard-Umgebungen gebildete) Limes  $\lim_{D \ni x \rightarrow a} f(x)$  existiert und mit  $f(a)$  übereinstimmt. Die Funktion  $f$  heißt eine **stetige Funktion** oder **stetig auf  $D$** , wenn  $f$  an allen Stellen  $a \in D$  stetig ist.*

**Bemerkungen** (zu Stetigkeit).

- (1) Alternativ kann man Stetigkeit von  $f$  an einer Stelle  $a \in D$  durch die  **$\varepsilon$ - $\delta$ -Bedingung für Stetigkeit**

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}: \exists \delta \in \mathbb{R}_{>0}: \forall x \in D: (|x-a| < \delta \implies |f(x)-f(a)| < \varepsilon)$$

oder die **Folgen-Stetigkeit**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a) \quad \text{für jede gegen } a \text{ konvergente Folge } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ in } D$$

charakterisieren.

- (2) Insbesondere ist für stetige Funktionen  $f: D \rightarrow \mathbb{K}$  die Vertauschung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right)$$

stets erlaubt, sofern der Limes rechts in  $D$  existiert. Dies war bereits in Abschnitt 2.2 bei der Lösung von Fixpunktgleichungen einmal relevant.

- (3) Ein hinreichendes Kriterium für Stetigkeit bildet die sogenannte Hölder-Stetigkeit. Dabei heißt  $f$  **Hölder-stetig** zum Exponent  $s \in ]0, 1]$  auf  $D$ , wenn

$$|f(\tilde{x}) - f(x)| \leq C|\tilde{x} - x|^s \quad \text{für alle } x, \tilde{x} \in D$$

mit einer Konstante  $C \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  gilt. Von Bedeutung ist vor allem Hölder-Stetigkeit zum Exponent 1, die man als **Lipschitz-Stetigkeit** oder **Dehnungsbeschränktheit** bezeichnet.

- (4) Konstante Funktionen und die Identität  $x \mapsto x$  sind trivialerweise stetig auf jedem Definitionsbereich. Die Exponentialfunktion  $\exp$  hat gemäß Abschnitt 2.6 die Eigenschaft, dass sie auf Bereichen der Form  $\{z \in \mathbb{C} : \Re(z) \leq M\}$  mit  $M \in \mathbb{R}$  dehnungsbeschränkt ist; mit der vorigen Bemerkung folgt daraus, dass **exp auf ganz  $\mathbb{C}$  stetig** ist (und ebenso jede Exponentialfunktion  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $s \mapsto a^s = \exp(s \operatorname{Log} a)$  mit beliebiger Basis  $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ).

**Satz (über Stetigkeit-erhaltende Operationen).** Seien  $D$  und  $\tilde{D}$  Teilmengen von  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ . Folgende Operation erhalten Stetigkeit:

- (0) **Einschränkung:** Ist  $f: D \rightarrow \mathbb{K}$  stetig auf  $D$  und  $\tilde{D} \subset D$ , so ist die Einschränkung<sup>3</sup>  $f|_{\tilde{D}}$  stetig auf  $\tilde{D}$ .
- (I) **Rechenoperationen:** Sind  $f, g: D \rightarrow \mathbb{K}$  stetig auf  $D$ , so folgt Stetigkeit der Funktionen<sup>4</sup>  $f+g$ ,  $f-g$ ,  $fg$  auf  $D$  und, falls  $g$  dort keine Nullstelle hat, auch die von  $\frac{f}{g}$  auf  $D$ .
- (II) **Vereinigung:** Ist  $f: I \rightarrow \mathbb{K}$  stetig auf einem Intervall  $I$  mit rechtem Randpunkt  $b \in I$ ,  $g: J \rightarrow \mathbb{K}$  stetig auf einem Intervall  $J$  mit linkem Randpunkt  $b \in J$  **und gilt  $f(b) = g(b)$** , so erhält man durch

$$h(x) := \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \leq b \\ g(x) & \text{falls } x \geq b \end{cases}$$

eine auf  $I \cup J$  stetige Funktion  $h: I \cup J \rightarrow \mathbb{K}$ .

- (III) **Verkettung:** Ist  $f: D \rightarrow \mathbb{K}$  stetig auf  $D$  und  $g: \tilde{D} \rightarrow \mathbb{K}$  stetig auf einer Obermenge  $\tilde{D}$  des Bildes  $f(D)$ , so ist die Verkettung<sup>5</sup>  $g \circ f$  stetig auf  $D$ .
- (IV) **Umkehrfunktion:** Ist  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  **streng monoton und stetig** auf einem Intervall  $I$ , so ist  $J := f(I)$  ein Intervall, und es existiert eine auf  $J$  stetige Umkehrfunktion  $f^{-1}: J \rightarrow I$  zu  $f$  (d.h. es gelten  $f^{-1}(f(x)) = x$  für alle  $x \in I$  und  $f(f^{-1}(y)) = y$  für alle  $y \in J$ ).

Ein Beweis des Satzes wird in der Vorlesung ausgeführt (wobei der Nachweis, dass  $J$  in (IV) ein Intervall ist, auf den folgenden Abschnitt 3.3 vertagt wird).

**Bemerkungen** (zu weiteren stetigen Funktionen).

- (1) Aus der Stetigkeit von  $\exp$  und (IV) folgt, dass der natürliche **Logarithmus**  $\log$  **auf  $\mathbb{R}_{>0}$  stetig** ist (und folglich auch  $\log_a = \frac{\log}{\log a}$  mit beliebigem  $a \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \{1\}$ ).
- (2) Aus der Stetigkeit von  $\exp$  und den Regeln (I) folgt **Stetigkeit der Kreisfunktionen  $\sin, \cos, \tan, \cot$  und der Hyperbelfunktionen  $\sinh, \cosh, \tanh, \coth$**  auf ihren jeweiligen Definitionsbereichen in  $\mathbb{C}$ . Insbesondere sind  $\sin, \cos$  und  $\sinh, \cosh$  auf ganz  $\mathbb{C}$  stetig.

<sup>3</sup>Die Einschränkung  $f|_{\tilde{D}}: \tilde{D} \rightarrow \mathbb{K}$  ist (trivial) definiert durch  $(f|_{\tilde{D}})(x) := f(x)$  für  $x \in \tilde{D}$ .

<sup>4</sup>Dabei wird  $f+g: D \rightarrow \mathbb{K}$  durch  $(f+g)(x) := f(x)+g(x)$  für  $x \in D$  erklärt, analoges gilt für  $f-g$ ,  $fg$  und  $\frac{f}{g}$ .

<sup>5</sup>Die Verkettung oder Komposition  $g \circ f: D \rightarrow \mathbb{K}$  ist definiert durch  $(g \circ f)(x) := g(f(x))$ .

- (3) Auf Intervallen strenger Monotonie existieren gemäß (IV) auch **stetige Umkehrfunktionen zu den Kreis- und Hyperbelfunktionen**. Die Umkehrfunktionen der Kreisfunktionen auf gewissen maximalen Monotonie-Intervallen (z.B. zu  $\sin$  auf  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  mit  $\sin([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) = [-1, 1]$  und zu  $\tan$  auf  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  mit  $\tan(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[) = \mathbb{R}$ ) sind die sogenannten **Arcusfunktionen**

$$\begin{aligned} \arcsin: [-1, 1] &\rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], & \arccos: [-1, 1] &\rightarrow [0, \pi], \\ \arctan: \mathbb{R} &\rightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, & \operatorname{arccot}: \mathbb{R} &\rightarrow ]0, \pi[. \end{aligned}$$

Die Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen auf maximalen Monotonie-Intervallen sind die sogenannten **Areafunktionen**

$$\begin{aligned} \operatorname{Arsinh}: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & \operatorname{Arcosh}: \mathbb{R}_{\geq 1} &\rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \\ \operatorname{Artanh}: ]-1, 1[ &\rightarrow \mathbb{R}, & \operatorname{Arcoth}: \mathbb{R}_{> 1} &\rightarrow \mathbb{R}_{> 0}. \end{aligned}$$

Für diese Funktionen gelten diverse Logarithmus-Formeln und Reihenentwicklungen. Beispiele sind  $\operatorname{Arsinh} y = \log(y + \sqrt{y^2 + 1})$  für  $y \in \mathbb{R}$  sowie  $\operatorname{Artanh} x = \log \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$  für  $x \in ]-1, 1[$  und  $\arctan x = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left( \operatorname{Log} \frac{1+ix}{1-ix} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$  für  $x \in [-1, 1]$ .

- (4) **Alle mit den Operationen (0)–(IV) aus den bis jetzt bekannten stetigen Funktionen gebildeten Funktionsausdrücke geben erneut stetige Funktionen** (auf dem jeweiligen Definitionsbereich). Daher sind die allermeisten Funktionen, die man ohne Weiteres hinschreiben kann, stetig — beim Auftreten von Fallunterscheidungen allerdings nur dann, wenn die Werte auf den verschiedenen Bereichen wie in (II) zusammenpassen.

Natürlich gibt es aber viele Funktionen  $f$ , die an gewissen Stellen ihres Definitionsbereichs nicht stetig sind. Solche Funktionen nennt man **unstetig** und die betreffenden Stellen **Unstetigkeitsstellen**. **Typische Unstetigkeitsstellen** „einigermaßen vernünftiger“ Funktionen sind:

- **Hebbare<sup>6</sup> Unstetigkeitsstellen** von  $f$  sind Stellen  $a$ , für die  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  in  $\mathbb{K}$  existiert, aber nicht mit  $f(a)$  übereinstimmt; zum Beispiel weist der Betrag der Signumsfunktion bei 0 eine hebbare Unstetigkeitsstelle.
- **Sprungsstellen** von  $f$  sind Stellen  $a$ , für die  $\lim_{x \nearrow a} f(x)$  und  $\lim_{x \searrow a} f(x)$  beide in  $\mathbb{K}$  existieren, aber nicht miteinander übereinstimmen; zum Beispiel hat die Signumsfunktion bei 0 eine Sprungstelle.
- **Unendlichkeitsstellen** mit unterschiedlichem Vorzeichen-Verhalten treten beispielsweise bei  $x \mapsto \pm \frac{1}{x}$  und  $x \mapsto \pm \frac{1}{x^2}$  an der Stelle 0 auf. Diese sind Unstetigkeitsstellen, sobald man in der Definitionslücke 0 irgendeinen endlichen Funktionswert festlegt.
- Eine **Oszillationsstelle** liegt beispielsweise bei  $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$  an der Stelle 0 vor. Auch hier tritt bei Festlegung eines beliebigen Funktionswerts an der Stelle 0 stets Unstetigkeit ein.

Die letzten zwei Begriffe sind hierbei nicht völlig präzise definiert und voneinander abgegrenzt, denn auch Unendlich-Oszillationsstellen, wie sie  $x \mapsto \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$  und  $x \mapsto \tan \frac{1}{x}$  bei 0 aufweisen, können natürlich auftreten.

<sup>6</sup>Die Benennung erfolgt im Hinblick darauf, dass man von  $f$  durch Abänderung nur des einen Funktionswerts  $f(a)$  zu einer in  $a$  stetigen Funktion übergehen und damit „die Unstetigkeit beheben“ kann.

### 3.3 Drei Hauptsätze über stetige Funktionen

In diesem Abschnitt werden drei der wichtigsten allgemeinen Sätze über stetige Funktionen einer reellen Variablen zusammengestellt. Der erste dieser drei Sätze folgt.

**Hauptsatz (Zwischenwertsatz).** Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion auf einem nicht-leeren kompakten Intervall  $[a, b]$ . Dann ist jeder Wert  $y \in \mathbb{R}$ , der zwischen  $f(a)$  und  $f(b)$  liegt, ein Funktionswert von  $f$ , d.h. es gibt zu jedem solchen  $y$  ein  $x \in [a, b]$  mit  $f(x) = y$ .

Der kurze Beweis des Satzes wird in der Vorlesung ausgeführt.

Man kann den Zwischenwertsatz als einen Existenzsatz für Lösungen  $x \in \mathbb{R}$  der Gleichung  $f(x) = y$  bei gegebenem  $y \in \mathbb{R}$  auffassen. Zwei direkte Konsequenzen folgen:

**Korollar (Nullstellensatz).** Ist  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion auf  $[a, b] \neq \emptyset$  mit entweder  $f(a) \leq 0 \leq f(b)$  oder  $f(a) \geq 0 \geq f(b)$ , so besitzt  $f$  in  $[a, b]$  eine Nullstelle.

**Korollar (Intervallerhaltung bei stetigem Bild).** Das Bild  $f(I)$  eines Intervalls  $I$  unter einer stetigen Abbildung  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  ist ein Intervall.

**Bemerkungen** (zum Zwischenwertsatz).

- (1) Man kann die Aussage des Zwischenwertsatzes äquivalent so formulieren, dass  $[f(a), f(b)] \subset f([a, b])$  im Fall  $f(a) \leq f(b)$  beziehungsweise  $[f(b), f(a)] \subset f([a, b])$  im Fall  $f(a) \geq f(b)$  gilt.
- (2) Aus dem Zwischenwertsatz folgen ähnliche Aussagen über nicht-kompakte Intervalle. Ist beispielsweise  $f: ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und existieren die einseitigen Grenzwerte  $f(a+)$  und  $f(b-)$ , so ist zumindest jeder Wert **echt** zwischen  $f(a+)$  und  $f(b-)$  ein Funktionswert, es gilt also  $]f(a+), f(b-)[ \subset f(]a, b[)$  im Fall  $f(a+) \leq f(b-)$  beziehungsweise  $]f(b-), f(a+)[ \subset f(]a, b[)$  im Fall  $f(a+) \geq f(b-)$ .

Eine weitere Folgerung, die in der Vorlesung durch Anwendung des Zwischenwertsatzes auf die Funktion  $x \mapsto f(x) - x$  bewiesen wird, ist:

**Korollar (Fixpunktsatz** für stetige Abbildungen von Intervallen). Ist  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig auf  $I = [a, b] \neq \emptyset$  mit entweder  $f(I) \subset I$  oder  $I \subset f(I)$ , so besitzt  $f$  einen Fixpunkt in  $I$ .

Der zweite Hauptsatz dieses Abschnitts garantiert die Existenz von Extremstellen im Sinne der nächsten Definition.

**Definition (Extremstellen).** Seien  $D$  eine Menge,  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $\mathbb{R}$ -wertige Funktion. Man nennt  $x_* \in D$  eine (**absolute**) **Minimalstelle** von  $f$  auf  $D$ , wenn  $f(x_*) \leq f(x)$  für alle  $x \in D$  oder äquivalent  $f(x_*) = \inf_D f$  gilt. Analog nennt man  $x^* \in D$  eine (**absolute**) **Maximalstelle** von  $f$  auf  $D$ , wenn  $f(x^*) \geq f(x)$  für alle  $x \in D$  oder äquivalent  $f(x^*) = \sup_D f$  gilt.

**Hauptsatz (Satz vom Minimum und Maximum, Extremalsatz).** Eine stetige Funktion  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  auf einem **kompakten** Intervall  $I \neq \emptyset$  besitzt stets eine Minimalstelle und eine Maximalstelle auf  $I$ .

Die Existenz einer Minimal- und einer Maximalstelle ist hierbei wie üblich so zu verstehen, dass es *mindestens* eine Minimalstelle und *mindestens* eine Maximalstelle, möglicherweise aber sehr viele von diesen gibt. Im Extremfall eines konstanten  $f$  sind tatsächlich alle Stellen in  $[a, b]$  sowohl Minimal- als auch Maximalstellen.

**Korollar** (Erhaltung kompakter Intervalle bei stetigem Bild). *Das Bild  $f([a, b])$  eines kompakten Intervalls unter einer stetigen Abbildung  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist ein kompaktes Intervall, nämlich das Intervall  $[\min_{[a,b]} f, \max_{[a,b]} f]$ .*

**Korollar. Stetige Funktionen sind auf kompakten Intervallen stets beschränkt.**

*Beweis des Extremalsatzes.* Es wird nur die Existenz einer Minimalstelle gezeigt, die Existenz einer Maximalstelle erhält man analog oder durch Betrachtung von  $-f$ .

Aus der Definition des Infimums folgt zunächst die Existenz einer sogenannten **Minimalfolge** für  $f$  in  $I$ , d.h. einer Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $I$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \inf_I f$ . Da  $I$  als kompaktes Intervall beschränkt ist, ist  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine beschränkte Folge und besitzt nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine in  $\mathbb{R}$  konvergente Teilfolge  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ . Da das kompakte Intervall  $I$  durch *schwache* Ungleichungen charakterisiert ist und diese beim Grenzübergang erhalten bleiben, ist auch der Limes  $x_* := \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}$  in  $I$ . Mit der Stetigkeit von  $f$  und der definierenden Eigenschaft der Minimalfolge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  folgt

$$f(x_*) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \inf_I f,$$

also ist  $x_*$  die gesuchte Minimalstelle von  $f$  auf  $I$ . □

**Bemerkungen** (zum Extremalsatz).

- (1) Für stetige Funktionen  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  auf einem **nicht-kompakten** Intervall  $I \neq \emptyset$  zeigt eine Abwandlung des vorausgehenden Arguments die Existenz einer Minimalstelle, falls **für jeden nicht zu  $I$  gehörigen Randpunkt  $a$  die Zusatzbedingung**  $\liminf_{I \ni x \rightarrow a} f(x) > \inf_I f$  gilt. Ohne Kenntnis von  $\inf_I f$  lässt sich dies in der Praxis vor allem dann anwenden, wenn  $\lim_{I \ni x \rightarrow a} f(x) = \infty$  eintritt.
- (2) Der Extremalsatz garantiert nur die bloße Existenz von Minimal- und Maximalstellen. Verfahren zur Berechnung solcher Stellen benutzen andere Methoden und werden erst im späteren Abschnitt 4.2 behandelt.

Der dritte Hauptsatz dieses Abschnitts besagt schließlich, dass neben den schon früher diskutierten Operationen auch die Bildung eines *gleichmäßigen* Limes die Stetigkeit von Funktionen erhält

**Hauptsatz** (über **Stetigkeit der Grenzfunktion bei gleichmäßiger Konvergenz**). *Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge stetiger Funktionen  $f_n: D \rightarrow \mathbb{K}$  auf einer Teilmenge  $D$  von  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ . Konvergiert  $f_n$  bei  $n \rightarrow \infty$  **gleichmäßig** auf  $D$  gegen  $f: D \rightarrow \mathbb{K}$ , so ist die Grenzfunktion  $f$  stetig auf  $D$ .*

*Beweis.* Sei  $a \in D$ , und es sei ein beliebiges  $\varepsilon > 0$  gegeben. Gemäß der Definition gleichmäßiger Konvergenz gibt es dann ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $\sup_D |f_{n_0} - f| < \frac{\varepsilon}{3}$ . Wegen der Stetigkeit von  $f_{n_0}$  in  $a$  gibt es außerdem ein  $\delta > 0$ , so dass für alle  $x \in D$  mit  $|x - a| < \delta$  stets  $|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)| < \varepsilon$  eintritt. Für solche  $x$  folgt mit der Dreiecksungleichung auch

$$|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)| + |f_{n_0}(a) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Wegen der Beliebigkeit von  $\varepsilon > 0$  ist damit die Stetigkeit von  $f$  in  $a$  nachgewiesen. Da  $a \in D$  ebenfalls beliebig war, ist  $f$  stetig auf  $D$ . □

Man bezeichnet eine derartige Argumentation manchmal als  **$\varepsilon$ -Drittel-Argument**.



Da aus Abschnitt 2.6 bekannt ist, dass eine Potenzreihe um  $a \in \mathbb{C}$  mit Konvergenzradius  $R$  auf jeder Menge  $\{z \in \mathbb{C} : |z-a| \leq r\}$  mit  $r < R$  gleichmäßig konvergiert, folgt unmittelbar:

**Korollar. Potenzreihenfunktionen sind (mindestens) auf dem offenen Konvergenzkreis stetig.**

**Bemerkungen** (zum Satz über Stetigkeit der Grenzfunktion).

- (1) In der Situation des Satzes bedeutet die Stetigkeit der Grenzfunktion  $f$  an der Stelle  $a \in D$ , dass

$$\lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

bei gleichmäßiger Konvergenz mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a) = f(a)$$

übereinstimmt. Es handelt sich daher um eine erneute **Manifestation des Prinzips, dass gleichmäßige Konvergenz die Vertauschung von Grenzprozessen erlaubt.** Bei punktweiser Konvergenz dagegen ist eine solche Vertauschung im Allgemeinen nicht gerechtfertigt.

- (2) Einfache Beispiele zeigen: Gleichmäßige Konvergenz ist nur hinreichend, aber keineswegs notwendig dafür, dass die Grenzfunktion einer Folge stetiger Funktionen ebenfalls stetig ist. Eine entsprechende Umkehrung des Hauptsatzes gilt im Allgemeinen also nicht, im speziellen Fall *monotoner* Konvergenz auf einem *kompakten Intervall* gilt sie aber doch:

**Satz von Dini:** Sind  $f_n, f: I \rightarrow \mathbb{R}$  stetige Funktionen auf einem kompakten Intervall  $I$  und ist  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  für alle  $x \in I$  eine monotone Folge, so ist punktweise Konvergenz  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$  auf  $I$  automatisch gleichmäßig.

Ein Beweis dieses Sachverhalts wird in der Vorlesung erläutert.

**Anwendungen** (des Extremalsatzes und des Satzes über die Stetigkeit der Grenzfunktion).

- (1) Als **Partialbruchzerlegung des Kotangens** bezeichnet man dessen Darstellung

$$\pi \cot(\pi z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n \frac{1}{z-k} = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2-k^2} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}.$$

Ausgehend von den vorausgehenden Hauptsätzen wird in der Vorlesung ein Beweis dieser Identität mit dem sogenannten Herglotz-Trick skizziert.

- (2) Die **Riemannsche Zeta-Funktion**  $\zeta$  wird auf Zahlen  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\Re(s) > 1$  als absolut konvergente Dirichlet-Reihe

$$\zeta(s) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$$

definiert, und für ihre **Werte in geraden natürlichen Zahlen** gilt **Eulers bemerkenswerte Formel**

$$\zeta(2\ell) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2\ell}} = \frac{(-1)^{\ell-1} 2^{2\ell-1} b_{2\ell}}{(2\ell)!} \pi^{2\ell} \quad \text{für } \ell \in \mathbb{N}$$

(mit den Bernoulli-Zahlen  $b_j$ ). Insbesondere ist hiermit das genaue Wachstum der Bernoulli-Zahlen ermittelt, und daraus folgt, dass der in Abschnitt 2.6 auftretende Konvergenzradius  $R_e$  tatsächlich den dort schon behaupteten Wert  $2\pi$  hat. Außerdem erhält man für  $\ell = 1$  den berühmten Reihenwert

$$\zeta(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{6} \pi^2.$$

In der Vorlesung wird ein Beweis von Eulers Formel gegeben, der auf dem Vergleich der Koeffizienten in *zwei* Potenzreihenentwicklungen von  $\pi z \cot(\pi z)$  um  $z = 0$  basiert. Eine Entwicklung ist dabei die aus Abschnitt 2.6 bekannte mit den Bernoulli-Zahlen, die andere ergibt sich, wenn man den Term  $\frac{2z}{z^2 - k^2}$  in der Partialbruchzerlegung in eine geometrische Reihe entwickelt und umordnet.

## Kapitel 4

# Differentialrechnung mit Funktionen einer Variablen

### 4.1 Definition und Berechnung von Ableitungen

Ist  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion auf  $D \subset \mathbb{R}$ , so ergibt der **Differenzenquotient**  $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \in \mathbb{R}$  für  $a \neq x$  in  $D$  die **durchschnittliche Steigung** von  $f$  auf dem Intervall zwischen  $a$  und  $x$ . Diese durchschnittliche Steigung ist nichts anderes als die Steigung der Geraden durch die Punkte  $(a, f(a))$  und  $(x, f(x))$  in  $\mathbb{R}^2$ . Da die beiden Punkte auf dem Graphen der Funktion  $f$  liegen, wird die Gerade auch als **Sekante** des Graphen und ihre Steigung als **Sekantensteigung** bezeichnet.

Falls er existiert, kann man den **Limes der Differenzenquotienten**  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$  beim Grenzübergang  $x \rightarrow a$  gegen ein fixiertes  $a \in D$  als Maß für die **Steigung** von  $f$  **an der einen Stelle**  $a \in D$  beziehungsweise die Steigung der „sich bestmöglich anschmiegenden“ Berührgeraden an den Graphen von  $f$  durch den einen Punkt  $(a, f(a))$  betrachten. Die Berührgerade nennt man auch **Tangente**, und dementsprechend hofft man die **Tangentensteigung als Limes von Sekantensteigungen** zu erhalten.

Es folgt der Ausbau dieser Ideen zu einer formalen Definition (die auch den Fall  $\mathbb{C}$ -wertiger  $f$  erfasst, in diesem aber nicht ganz so einfach veranschaulicht werden kann).

**Definition (Differenzierbarkeit und Ableitungen an einzelnen Stellen).** *Seien eine nicht-leere Teilmenge  $D$  von  $\mathbb{R}$ , eine Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{K}$  und ein innerer Punkt  $a$  von  $D$  (d.h. ein  $a \in D$  mit  $]a-\delta, a+\delta[ \subset D$  für ein  $\delta > 0$ ) gegeben. Dann heißt  $f$  **im Punkt  $a$  oder an der Stelle  $a$  differenzierbar**, wenn der Limes*

$$f'(a) := \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \in \mathbb{K}$$

*existiert, und  $f'(a)$  heißt im Existenzfall die **Ableitung von  $f$  in  $a$** . Gleichbedeutend mit  $f'(a)$  werden die Notationen  $\dot{f}(a)$ ,  $\frac{df}{dx}(a)$  und  $\frac{d}{dt}|_{t=a} f(t)$  verwendet.*

Mit der Substitutionsregel des Abschnitts 3.1 lässt sich Definition von  $f'(a)$  in die alternative Form

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \in \mathbb{K}$$

umschreiben. Im Folgenden werden beide Limesdarstellungen der Ableitung ohne weitere Diskussion verwendet.

**Definition (Differenzierbarkeit auf Bereichen, Ableitungsfunktionen).** Sei  $D \neq \emptyset$  offen in  $\mathbb{R}$  (d.h. eine Teilmenge von  $\mathbb{R}$ , die nur innere Punkte enthält). Ist  $f: D \rightarrow \mathbb{K}$  in allen  $x \in D$  differenzierbar, so nennt man die Funktion  $f$  **auf  $D$  differenzierbar** und bezeichnet

$$f': D \rightarrow \mathbb{K}, x \mapsto f'(x)$$

als **Ableitung** oder **Ableitungsfunktion** von  $f$  auf  $D$ . Für die Funktion  $f'$  schreibt man auch  $\frac{df}{dx}$  und für den Funktionsterm  $f'(x)$  auch  $\frac{d}{dx}f(x)$ .

**Bemerkungen** (zu Differenzierbarkeit und Ableitungen).

- (1) Generell gilt: **Aus Differenzierbarkeit** (an einer Stelle oder auf einem Bereich) **folgt Stetigkeit** (an der Stelle oder auf dem Bereich).

*Beweis.* Existiert  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \in \mathbb{K}$ , so folgt mit der Grenzwert-Rechenregel für Produkte  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)-f(a)) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \lim_{x \rightarrow a} (x-a) = 0$ , also  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .  $\square$

- (2) Differenzierbarkeit ist (genau wie Stetigkeit) eine **lokale Eigenschaft**, d.h. sie hängt nur von den Werten von  $f$  auf  $]a-\delta, a+\delta[$  mit beliebig kleinem  $\delta > 0$  ab.

- (3) Im Fall  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , also für  $\mathbb{C}$ -wertiges  $f$ , gilt

$$f'(a) = (\Re f)'(a) + \mathbf{i}(\Im f)'(a)$$

(sobald entweder die Ableitung links existiert oder beide Ableitungen rechts existieren).

- (4) **Einseitige Differenzierbarkeit** und **einseitige Ableitungen** einer Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{K}$  werden wie folgt erklärt. Für  $a \in D$  mit  $]a-\delta, a] \subset D$  für ein  $\delta > 0$  definiert man linksseitige Differenzierbarkeit und die linksseitige Ableitung mittels

$$f'_-(a) := \lim_{x \nearrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a},$$

für  $a \in D$  mit  $]a, a+\delta] \subset D$  für ein  $\delta > 0$  definiert man rechtsseitige Differenzierbarkeit und die rechtsseitige Ableitung mittels

$$f'_+(a) := \lim_{x \searrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

In inneren Punkten  $a$  von  $D$  **existiert somit  $f'(a)$  genau dann, wenn  $f'_-(a)$  und  $f'_+(a)$  existieren und übereinstimmen**. Als alternative Notation für  $f'_\pm(a)$  ist  $\frac{d}{dt}|_{t=a\pm} f(t)$  gebräuchlich, und, falls  $D$  ein Intervall und  $a$  ein Randpunkt von  $D$  ist, wird die eine definierte einseitige Ableitung von  $f$  in  $a$  auch nur mit  $f'(a)$  bezeichnet.

Der nächste Satz beschreibt die vielleicht fundamentalste Eigenschaft der Ableitung und schlägt auch den Bogen zurück zur eingangs beschriebenen Motivation.

**Satz (Ableitung und lineare Approximation).** Für eine nicht-leere Teilmenge  $D$  von  $\mathbb{R}$ , eine Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{K}$  und einen inneren Punkt  $a$  von  $D$  gilt: Genau dann ist  $f$  differenzierbar in  $a$ , wenn es eine affin lineare<sup>1</sup> Funktion  $\ell: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$  mit

$$\ell(a) = f(a) \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-\ell(x)}{x-a} = 0 \quad (*)$$

<sup>1</sup>Eine affin lineare Funktion  $\ell: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$  hat die Form  $\ell(x) = sx+c$  für  $x \in \mathbb{R}$  mit festen  $s, c \in \mathbb{K}$ .

gibt. Falls Differenzierbarkeit von  $f$  in  $a$  vorliegt und die affin lineare Funktion  $\ell$  existiert, so ist  $\ell$  durch  $f$  und  $a$  eindeutig bestimmt und gegeben durch

$$\ell(x) = f(a) + f'(a)(x-a) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}. \quad (**)$$

*Beweis.* Sei zuerst  $f$  differenzierbar in  $a$ . Dann definiert  $(**)$  eine affin lineare Funktion  $\ell$ , die  $\ell(a) = f(a)$  erfüllt, und es folgt  $\frac{f(x)-\ell(x)}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$ .

Sei umgekehrt  $\ell$  mit  $\ell(x) = sx+c$  und der Eigenschaft  $(*)$  gegeben. Dann folgt  $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{f(x)-\ell(x)}{x-a} + \frac{\ell(x)-\ell(a)}{x-a} = \frac{f(x)-\ell(x)}{x-a} + s \xrightarrow{x \rightarrow a} s$ , also existiert  $f'(a) = s$ .

Die Eindeutigkeit von  $\ell$  folgt aus der der Koeffizienten  $s$  und  $c$  in  $\ell(x) = sx+c$ . Eindeutigkeit von  $s$  und  $c$  gilt, da  $s = f'(a)$  gezeigt wurde und  $\ell(a) = f(a)$  dann  $c = f(a) - f'(a)a$  erzwingt.  $\square$

**Bemerkungen** (zur linearen Approximation).

- (1) Gilt  $(*)$ , so sagt man auch, dass  $f$  bei  $a$  **von erster Ordnung durch die lineare Funktion  $\ell$  approximiert wird**, denn die Abweichung  $f(x) - \ell(x)$  zwischen  $\ell$  und  $f$  strebt dann bei  $x \rightarrow a$  schneller als  $x-a$  gegen 0. Die „erste Ordnung“ bezieht sich hierbei darauf, das mit der „ersten Potenz“  $x-a = (x-a)^1$  verglichen wird.
- (2) Der Graph der linearen Funktion  $\ell$  ist die zu Beginn des Abschnitts erwähnte Tangente an den Graphen von  $f$  in  $(a, f(a))$ . Deshalb bezeichnet man  $(**)$  als **Tangentengleichung**.

**Beispiele (Ableitung von Grundfunktionen).** In Vorlesung und Übungen werden die Ableitungen einiger Grundfunktionen berechnet. Im Einzelnen handelt es sich um Ableitungen ...

- (1) **konstanter und linearer Funktionen**

$$\frac{d}{dx}c = 0, \quad \frac{d}{dx}(sx+c) = s \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ und } s, c \in \mathbb{C};$$

- (2) von **Potenzfunktionen** mit ganzzahligen Exponent  $k \in \mathbb{Z}$

$$\frac{d}{dx}x^k = kx^{k-1} \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ (nur } x \neq 0 \text{ falls } k < 0);$$

- (3) der **natürlichen Exponentialfunktion**

$$\frac{d}{dx}e^{sx} = se^{sx} \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ und } s \in \mathbb{C};$$

- (4) einer **Potenzreihenfunktion**  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$  mit Entwicklungspunkt  $a \in \mathbb{R}$  und Konvergenzradius  $R$ ; eine solche Funktion  $f$  ist auf  $]a-R, a+R[$  differenzierbar, und ihre Ableitungsfunktion  $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} kc_k(x-a)^{k-1}$  ist wieder eine Potenzreihenfunktion mit gleichem Konvergenzradius  $R$  um  $a$  (wobei  $x$  als *reelle* Variable aufgefasst wird);

- (5) des **Sinus** und des **Kosinus**

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x, \quad \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x \quad \text{für } x \in \mathbb{R};$$

(6) des **natürlichen Logarithmus**

$$\frac{d}{dx} \log |x| = \frac{1}{x} \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

**Beispiele** (für **Nicht-Differenzierbarkeit** stetiger Funktionen).

- (1) Die reelle **Betragsfunktion** ist an allen Stellen in  $\mathbb{R}_{>0}$  differenzierbar mit Ableitung 1 und an allen Stellen in  $\mathbb{R}_{<0}$  mit Ableitung  $-1$ , **an der Stelle 0** ist sie aber **nicht differenzierbar**. Es handelt sich um ein typisches Beispiel einer **Knickstelle**, in der beide einseitigen Ableitungen existieren, aber nicht übereinstimmen.
- (2) Bei  $w_s(x) := (\operatorname{sgn} x)|x|^s$  mit festem Parameter  $s \in ]0, 1[$  existiert  $w'_s(0)$  nicht, weil die zugehörigen Differenzenquotienten gegen  $\infty$  konvergieren. Auch solche Stellen, bei denen eine Funktion „**unendlich steil**“ wird und die **Tangente** an ihren Graphen **vertikal** liegt, sind typische Nicht-Differenzierbarkeitsstellen.
- (3) Weitere typische Nicht-Differenzierbarkeitsstellen sind Stellen mit starker **Oszillation der Differenzenquotienten**. Ein Beispiel hierfür ist die durch  $h(0) := 0$  und  $h(x) := x \cos \frac{1}{x}$  für  $x \neq 0$  definierte stetige Funktion  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit Nicht-Differenzierbarkeitsstelle 0.
- (4) In den vorausgehenden Beispielen trat Nicht-Differenzierbarkeit nur an einzelnen Stellen in  $\mathbb{R}$  auf (und durch einfache Modifikationen bekommt man ohne Weiteres nur abzählbar viele Nicht-Differenzierbarkeitsstellen). Tatsächlich gibt es aber auch **Beispiele stetiger Funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die an keiner einzigen Stelle in  $\mathbb{R}$  differenzierbar sind**. In der Vorlesung wird erläutert, dass ein solches Beispiel durch die Reihe

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} 4^{-k} \min\{4^k x - \lfloor 4^k x \rfloor, \lfloor 4^k x \rfloor + 1 - 4^k x\} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

gegeben ist.

Die Ableitungen weiterer Funktionen lassen sich mit Hilfe von **Differentiationsregeln** auf die obigen Grundfunktionen zurückführen. Die wichtigsten solchen Regeln werden in den nächsten drei Sätzen zusammengefasst und in der Vorlesung bewiesen.

**Satz.** Für  $D \subset \mathbb{R}$  und Funktionen  $f, g: D \rightarrow \mathbb{K}$  gelten

(I) die **Summenregel**  $(f \pm g)' = f' \pm g'$ ,

(II) die **Faktorregel**  $(sf)' = sf'$  mit  $s \in \mathbb{K}$ ,

(III) die **Produktregel**  $(fg)' = f'g + fg'$ ,

(IV) die **Quotientenregel**  $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ ,

überall wo  $f'$  und  $g'$  auf  $D$  existieren und, im Fall der Quotientenregel,  $g$  keine Nullstelle hat.

**Satz (Kettenregel).** Für Funktionen  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  auf  $D \subset \mathbb{R}$  und  $g: \tilde{D} \rightarrow \mathbb{K}$  auf  $\tilde{D} \subset \mathbb{R}$  mit  $f(D) \subset \tilde{D}$  gilt: Existieren  $f'(a)$  und  $g'(f(a))$  für ein  $a \in D$ , so existiert auch die Ableitung der Komposition

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

**Bemerkung** (zur Kettenregel). Sind  $f$  und  $g$  jeweils auf dem gesamten Definitionsbereich stetig, so kann die Kettenregel als

$$\frac{d}{dx}g(f(x)) = g'(f(x))f'(x) \text{ für } x \in D \quad \text{oder} \quad (g \circ f)' = (g' \circ f)f' \text{ auf } D$$

geschrieben werden. Unabhängig von der genauen Schreibweise berechnet sich die **Ableitung der Komposition**  $g \circ f$  als **Produkt** der „äußeren“ **Ableitung**  $g'$ , ausgewertet an den richtigen Stellen, mit der „inneren“ **Ableitung**  $f'$ . Man bezeichnet die (oft nachträglich ausgeführte) Berechnung von  $f'$  auch als **Nachdifferenzieren**.

**Satz (Ableitung der Umkehrfunktion)**. Seien  $I$  und  $J$  Intervalle sowie  $f: I \rightarrow J$  eine stetige Funktion mit stetiger Umkehrfunktion  $f^{-1}: J \rightarrow I$ . Existiert dann  $f'(a) \neq 0$  für ein  $a \in I$ , so existiert auch die Ableitung der Umkehrfunktion

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

**Bemerkungen** (zur Ableitung der Umkehrfunktion).

(1) Ist  $f$  auf ganz  $I$  differenzierbar, so besagt die Regel zur Ableitung der Umkehrfunktion

$$(f^{-1})' \circ f = \frac{1}{f'} \text{ auf } I \quad \text{beziehungsweise} \quad (f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}} \text{ auf } J.$$

(2) Kann  $f'$  als Funktion  $h \circ f$  von  $f$  ausgedrückt werden, gilt also  $f' = h \circ f$  auf  $I$ , so ergibt sich  $(f^{-1})' = \frac{1}{h}$  auf  $J$ . Die ist für einige konkrete Ableitungs-Berechnungen sehr praktisch.

**Beispiele**. Mit Hilfe der vorausgehenden Regeln werden in der Vorlesung berechnet ...

(1) die Ableitungen der Hyperbel- und Kreisfunktionen  $\sinh$ ,  $\cosh$ ,  $\tan$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \sinh x &= \cosh x, & \frac{d}{dx} \cosh x &= \sinh x & \text{für } x \in \mathbb{R}, \\ \frac{d}{dx} \tan x &= \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x & & & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus (2\mathbb{Z}+1)\frac{\pi}{2}; \end{aligned}$$

(2) die Ableitungen **allgemeiner Potenz- und Exponentialfunktionen**

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} x^s &= s x^{s-1} & \text{für } x \in \mathbb{R}_{>0} \text{ und } s \in \mathbb{C}, \\ \frac{d}{dx} a^x &= a^x \log a & \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ und } a \in \mathbb{R}_{>0}; \end{aligned}$$

(3) die Ableitungen der Arcus- und Areefunktionen  $\arcsin$ ,  $\arctan$ ,  $\text{Arsinh}$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} \arcsin y &= \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} & \text{für } y \in ]-1, 1[, \\ \frac{d}{dy} \arctan y &= \frac{1}{1+y^2} & \text{für } y \in \mathbb{R}, \\ \frac{d}{dy} \text{Arsinh } y &= \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} & \text{für } y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Darüber hinaus können Ableitungen aller „elementaren Funktionsausdrücke“ mit den Differentiationsregeln schematisch ausgerechnet werden.

In vielen Fällen ist die Ableitung einer Funktion erneut differenzierbar, so dass man ein weiteres Mal oder tatsächlich viele weitere Male ableiten kann. Auch solche iterierten Ableitungen werden sich später als sehr nützlich herausstellen. Formal werden sie wie folgt definiert.

**Definition (Ableitungen höherer Ordnung).** Sei  $f: D \rightarrow \mathbb{K}$  eine Funktion auf  $D \subset \mathbb{R}$ .

- Man setzt  $f^{(0)} := f$  und vereinbart für beliebiges  $m \in \mathbb{N}$  rekursiv: Existiert  $f^{(m)}(a) := (f^{(m-1)})'(a)$  in einem inneren Punkt  $a \in D$  des Existenzbereichs von  $f^{(m-1)}$ , so bezeichnet man  $f$  als  **$m$ -fach differenzierbar** an der Stelle  $a$  und  $f^{(m)}(a)$  als  **$m$ -te Ableitung von  $f$  an der Stelle  $a$** .
- Sei  $D$  offen in  $\mathbb{R}$  und  $m \in \mathbb{N}_0$ . Ist  $f$  dann  $m$ -fach differenzierbar in jedem  $x \in D$ , so sagt man,  $f$  sei  **$m$ -fach differenzierbar auf  $D$** , und nennt  $f^{(m)} = \frac{d^m f}{dx^m}: D \rightarrow \mathbb{K}$  die  **$m$ -te Ableitung** oder  **$m$ -te Ableitungsfunktion** von  $f$  auf  $D$ . Ist die  $m$ -te Ableitung sogar stetig auf  $D$ , so spricht man von einer  **$m$ -fach stetig differenzierbaren Funktion**, einer  **$C^m$ -Funktion** oder einer Funktion der **Klasse  $C^m$**  auf  $D$ .
- Ist  $D$  offen in  $\mathbb{R}$  und existiert  $f^{(m)}$  für jedes  $m \in \mathbb{N}$  auf  $D$ , so heißt  $f$  **beliebige oft differenzierbare Funktion**,  **$C^\infty$ -Funktion** oder Funktion der **Klasse  $C^\infty$**  auf  $D$ .

**Bemerkungen** (zu Ableitungen höherer Ordnung).

- (1) Durch „elementare Funktionsausdrücke“ erhält man stets  $C^\infty$ -Funktionen, deren höhere Ableitungen iterativ ausgerechnet werden können. Auch bei Potenzreihen um  $a \in \mathbb{R}$  mit Konvergenzradius  $R$  handelt es sich stets um  $C^\infty$ -Funktionen auf  $]a-R, a+R[$ .
- (2) Unter den Ableitungsregeln höherer Ordnung wird hier nur die Leibniz-Regel, eine Produktregel höherer Ordnung erwähnt. Diese besagt

$$(fg)^{(m)} = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} f^{(k)} g^{(m-k)}$$

für  $m$ -fach differenzierbare Funktionen  $f$  und  $g$ .

## 4.2 Ableitungskriterien für Extremstellen, Monotonie und Konvexität

Die nächste Serie von Definitionen benennt verschiedene spezielle Punkte  $\mathbb{R}$ -wertiger Funktionen.

**Definitionen (Extremstellen und andere ausgezeichnete Punkte).** Für eine Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  auf  $D \subset \mathbb{K}$  und einen Punkt  $x_* \in D$  werden folgende Bezeichnungen vereinbart:

- (1) Man nennt  $x_*$  eine **lokale Minimalstelle** von  $f$  (auf  $D$ ), wenn es ein  $\delta > 0$  gibt, so dass  $f(x_*) \leq f(x)$  für alle  $x \in D$  mit  $|x-x_*| < \delta$  eintritt. Gilt für alle  $x \in D$  mit  $0 < |x-x_*| < \delta$  sogar die strikte Ungleichung  $f(x_*) < f(x)$ , so nennt man  $x_*$  eine **strikte lokale Minimalstelle** von  $f$  (auf  $D$ ).
- (2) Eine (**strikte**) **lokale Maximalstelle**  $x_*$  von  $f$  (auf  $D$ ) erklärt man über die umgekehrten Ungleichungen  $f(x_*) \geq f(x)$  beziehungsweise  $f(x_*) > x$  und ansonsten völlig analog.
- (3) Man nennt  $x_*$  eine (**strikte**) **lokale Extremstelle** von  $f$ , wenn  $x_*$  entweder (strikte) lokale Minimalstelle oder (strikte) lokale Maximalstelle von  $f$  ist.



Liegt der Definitionsbereich in  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  und ist  $f$  in einem inneren Punkt  $x_*$  von  $D$  differenzierbar, so sind weitere Begriffe sinnvoll:

- (4) Man bezeichnet  $x_*$  als **kritischen Punkt** von  $f$ , wenn  $f'(x_*) = 0$  ist.
- (5) Man nennt  $x_*$  einen **Sattelpunkt** von  $f$ , wenn  $x_*$  kritischer Punkt, aber keine lokale Extremstelle von  $f$  ist.
- (6) Man nennt  $x_*$  einen **speziellen Sattelpunkt** von  $f$ , wenn  $x_*$  kritischer Punkt von  $f$  ist und entweder  $f(x_*-h) < f(x_*) < f(x_*+h)$  für alle ausreichend kleinen  $h \in \mathbb{R}_{>0}$  oder  $f(x_*-h) > f(x_*) > f(x_*+h)$  für alle ausreichend kleinen  $h \in \mathbb{R}_{>0}$  eintritt.

Der Rest dieses Abschnitts dreht sich weitgehend um Methoden zur Berechnung und Klassifikation solcher ausgezeichneten Punkte. Das Hauptaugenmerk liegt dabei auf dem Auffinden lokaler Extremstellen, und die wohl grundlegendste Beobachtung hierzu folgt direkt.

**Satz (Notwendiges Erster-Ordnung-Kriterium für Extremstellen im Innern).** *Hat  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  eine lokale Extremstelle in einem inneren Punkt  $x_*$  von  $D \subset \mathbb{R}$  und ist  $f$  in  $x_*$  differenzierbar, so gilt  $f'(x_*) = 0$ , d.h.  $x_*$  ist ein kritischer Punkt von  $f$ .*

Gemäß diesem Kriterium erhält man durch Berechnung der Nullstellen der Ableitung  $f'$  bei differenzierbarem  $f$  schon alle Kandidaten, die als lokale Extremstellen von  $f$  in Frage kommen.

*Beweis.* Ist  $x_*$  eine lokale Minimalstelle von  $f$ , so gibt es ein  $\delta > 0$ , so dass die Differenzenquotienten  $\frac{f(x_*+h)-f(x_*)}{h}$  für  $h \in ]0, \delta[$  stets  $\geq 0$  und für  $h \in ]-\delta, 0[$  stets  $\leq 0$  sind. Für  $f'(x_*) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_*+h)-f(x_*)}{h}$  ist somit nur der Wert 0 möglich. Im Fall einer lokalen Maximalstelle  $x_*$  von  $f$  argumentiert man analog.  $\square$

**Bemerkung.** Handelt es sich bei einer lokalen Minimalstelle  $x_*$  von  $f$  um eine **Knickstelle** von  $f$  oder einen **Randpunkt** des Definitionsbereichs  $D$  und existieren die einseitigen Ableitungen  $f'_+(x_*)$  und/oder  $f'_-(x_*)$ , so zeigt die Argumentation aus dem Beweis die notwendigen Kriterien  $f'_-(x_*) \leq 0$  und/oder  $f'_+(x_*) \geq 0$ .

Schlagkräftigere Kriterien für Extremstellen folgen in Kürze. Zunächst werden aber noch einige andere nützliche Sätze behandelt.

**Satz (von Rolle).** *Sei  $a < b$  in  $\mathbb{R}$ , und  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sei stetig auf  $[a, b]$  sowie differenzierbar auf  $]a, b[$ . Ist  $f(a) = f(b)$ , so enthält  $]a, b[$  einen kritischen Punkt von  $f$ .*

*Beweis.* Nach dem Extremalsatz besitzt  $f$  mindestens eine Minimalstelle und mindestens eine Maximalstelle in  $[a, b]$ . Wegen  $f(a) = f(b)$  können  $a$  und  $b$  nicht alle solchen Stellen sein, also gibt es mindestens eine Extremstelle von  $f$  in  $]a, b[$ , und nach dem vorigen Satz ist diese ein kritischer Punkt von  $f$ .  $\square$

**Satz (Mittelwertsatz der Differentialrechnung).** *Sei  $a < b$  in  $\mathbb{R}$ , und  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sei stetig auf  $[a, b]$  sowie differenzierbar auf  $]a, b[$ . Dann gibt es eine Zwischenstelle  $\xi \in ]a, b[$  mit*

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Geometrisch besagt der Mittelwertsatz, dass die mittlere Steigung von  $f$  auf  $[a, b]$ , das ist die Steigung der Sekante durch  $(a, f(a))$  und  $(b, f(b))$ , an mindestens einer Stelle in  $]a, b[$  als punktweise Steigung von  $f$  realisiert wird.

*Beweis.* Für die durch  $g(x) := f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x$  definierte Hilfsfunktion  $g$  gilt  $g(a) = g(b)$ . Nach dem Satz von Rolle gibt es daher ein  $\xi \in ]a, b[$  mit

$$0 = g'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Durch Termumformung erhält man die Behauptung.  $\square$

Während der Satz von Rolle und der Mittelwertsatz der Differentialrechnung nur für  $\mathbb{R}$ -wertige Funktionen  $f$  gelten, bleibt das nächste Resultat auch für  $\mathbb{C}$ -wertige  $f$  richtig:

**Korollar (Konstanzsatz).** Sei  $f: I \rightarrow \mathbb{K}$  stetig auf einem Intervall  $I$  und differenzierbar auf der Menge  $\overset{\circ}{I}$  der inneren Punkte von  $I$ . Genau dann ist  $f$  konstant, wenn  $f' \equiv 0$  auf  $\overset{\circ}{I}$  gilt.

*Beweis.* Die Ableitung eines konstanten  $f$  ist trivial Null. Wäre  $f' \equiv 0$ , aber  $f$  mit Werten in  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  nicht konstant, so gäbe es gemäß Mittelwertsatz ein  $\xi \in \overset{\circ}{I}$  mit  $f'(\xi) \neq 0$ . Bei Werten in  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  folgt dasselbe durch separate Betrachtung von  $\Re f$  und  $\Im f$ .  $\square$

Gemäß dem nächsten Satz lässt sich bei einer  $\mathbb{R}$ -wertigen Funktion  $f$  auch das Monotonieverhalten an der Ableitung  $f'$  ablesen.

**Satz (Monotoniesatz).** Sei  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig auf einem Intervall  $I$  und differenzierbar auf der Menge  $\overset{\circ}{I}$  der inneren Punkte von  $I$ . Dann gelten:

- (I) **Genau dann ist  $f$  monoton wachsend auf  $I$ , wenn  $f' \geq 0$  auf  $\overset{\circ}{I}$  gilt.**
- (II) **Genau dann ist  $f$  streng monoton wachsend auf  $I$ , wenn  $f' \geq 0$  auf  $\overset{\circ}{I}$  gilt und auf keinem Teilintervall von  $\overset{\circ}{I}$  mit positiver Länge  $f' \equiv 0$  eintritt.**

Selbstverständlich sind monoton fallende  $f$  analog durch  $f' \leq 0$  charakterisiert.

Beim in der Vorlesung vorgeführten Beweis des Monotoniesatzes gehen neben den Definitionen der Begriffe nur der Mittelwertsatz und der Konstanzsatz ein.

**Bemerkung.** Die für die letzten Resultate verwendeten Argumente zeigen auch, dass **Ableitungen**  $\mathbb{R}$ -wertiger Funktionen **stets** eine **Zwischenwerteigenschaft** haben, **selbst wenn** diese Ableitungen **unstetig** sind und der Zwischenwertsatz aus Abschnitt 3.3 auf sie keine Anwendung findet. Genauer gilt der folgende **Zwischenwertsatz von Darboux**: Ist  $a < b$  in  $\mathbb{R}$  und  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar auf  $[a, b] \subset D$  (was so zu verstehen ist, dass die Existenz der einseitigen Ableitungen  $f'(a) = f'_+(a)$  und  $f'(b) = f'_-(b)$  in den Randpunkten ausreicht), so gibt es zu jedem  $s \in \mathbb{R}$ , das zwischen  $f'(a)$  und  $f'(b)$  liegt, ein  $r \in [a, b]$  mit  $f'(r) = s$ . (Zum Beweis überlegt man, dass  $g(x) := f(x) - sx$  im Fall  $f'(a) \neq s \neq f'(b)$  ein nicht monotonen und daher nicht injektives  $g$  auf  $[a, b]$  gibt; nach Rolle existiert dann ein  $r \in ]a, b[$  mit  $0 = g'(r) = f'(r) - s$ .)

Nach diesen Vorbereitungen folgen die angekündigten schärferen Kriterien für Extremstellen.

**Satz (Hinreichende Kriterien für Extremstellen).** Sei  $D \subset \mathbb{R}$  und  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, die in einem inneren Punkt  $x_*$  von  $D$  stetig ist.

(I) Existiert  $f'(x_*+h)$  für  $0 < |h| \ll 1$  (für  $h = 0$  zunächst nicht unbedingt), so gelten folgende **Erster-Ordnung-Vorzeichenwechsel-Kriterien**

(a) **Vorzeichenwechsel  $-/+$  von  $f'$  bei  $x_*$**   $\implies x_*$  lokale Minimalstelle von  $f$ ,  
(d.h.  $f'(x_*-h) \leq 0 \leq f'(x_*+h)$  für  $0 < h \ll 1$ )

**Vorzeichenwechsel  $+/-$  von  $f'$  bei  $x_*$**   $\implies x_*$  lokale Maximalstelle von  $f$ .  
(d.h.  $f'(x_*-h) \geq 0 \geq f'(x_*+h)$  für  $0 < h \ll 1$ )

Gibt es zudem beliebig kleine  $h \in \mathbb{R}_{<0}$ , so dass die Ungleichung für  $f'(x_*-h)$  strikt ist, und (eventuell andere) beliebig kleine  $h \in \mathbb{R}_{>0}$ , so dass die Ungleichung für  $f'(x_*+h)$  strikt ist, so ist  $x_*$  sogar strikte lokale Minimal- bzw. Maximalstelle.

(b) Liegt in einem **kritischen Punkt  $x_*$  von  $f$  kein Vorzeichenwechsel von  $f'$  vor** (d.h.  $f'(x_*+h) > 0$  für  $0 < |h| \ll 1$  oder  $f'(x_*+h) < 0$  für  $0 < |h| \ll 1$ ), so ist  $x_*$  spezieller Sattelpunkt von  $f$ .

(II) Existieren  $f'(x_*)$  und  $f''(x_*)$ , so gelten die **Zweiter-Ordnung-Kriterien**

$f'(x_*) = 0, f''(x_*) > 0 \implies x_*$  strikte lokale Minimalstelle von  $f$ ,

$f'(x_*) = 0, f''(x_*) < 0 \implies x_*$  strikte lokale Maximalstelle von  $f$ .

*Beweis.* Die Kriterien (I) ergeben sich aus dem vorigen Satz, denn gemäß diesem ist  $f$  in der richtigen Weise monoton auf  $]x_*-\delta, x_*]$  und auf  $[x_*, x_*+\delta[$  mit  $0 < \delta \ll 1$ . Die Kriterien (II) sind Spezialfälle der Kriterien (Ia), denn aus  $f''(x_*) \geq 0 = f'(x_*)$  folgt  $\frac{f'(x_*+h)}{h} \geq 0$  für  $0 < |h| \ll 1$ .  $\square$

**Bemerkungen** (zu Kriterien für Extremstellen).

(1) Aus Teil (II) des Satzes folgen **notwendige Kriterien** zweiter Ordnung für innere lokale Extremstellen (die das schon bekannte notwendige Erster-Ordnung-Kriterium verfeinern). Konkret gelten bei zweifacher Differenzierbarkeit von  $f$  in einem inneren Punkt  $x_*$  von  $D$

$x_*$  lokale Minimalstelle von  $f \implies f'(x_*) = 0, f''(x_*) \geq 0,$

$x_*$  lokale Maximalstelle von  $f \implies f'(x_*) = 0, f''(x_*) \leq 0.$

(2) Teil (II) des Satzes kann zu hinreichenden  **$m$ -ter-Ordnung-Kriterien** verallgemeinert werden: Bei  $m$ -facher ( $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ ) Differenzierbarkeit von  $f$  in einem inneren Punkt  $x_*$  von  $D$  mit  $f'(x_*) = f''(x_*) = f'''(x_*) = \dots = f^{(m-1)}(x_*) = 0$  gelten

$m$  gerade,  $f^{(m)}(x_*) > 0 \implies x_*$  strikte lokale Minimalstelle von  $f$ ,

$m$  gerade,  $f^{(m)}(x_*) < 0 \implies x_*$  strikte lokale Maximalstelle von  $f$ ,

$m$  ungerade,  $f^{(m)}(x_*) \neq 0 \implies x_*$  spezieller Sattelpunkt von  $f$ .

Auch hieraus ergeben sich entsprechende notwendige Kriterien. **Für die Rechenpraxis** sind solche Kriterien aber **kaum nützlich**, denn die Berechnung der benötigten  $m$  Ableitungen kann schon für mäßig große  $m$  einen hohen Aufwand erfordern (und a priori lässt sich auch gar nicht unbedingt einschätzen, wie groß  $m$  sein mag).

(3) **Einfacher und besser** als die Kriterien aus Teil (II) des Satzes und der vorigen Bemerkung (2) funktionieren in den meisten Fällen die **Vorzeichenwechsel-Kriterien** aus Teil

(I) des Satzes. Zunächst einmal erfordern diese Kriterien nur die Berechnung der ersten Ableitung  $f'$ . Zudem greifen sie (oft) auch dann, wenn  $f''$  und/oder höhere Ableitungen in  $x_*$  verschwinden. Schließlich sind diese Kriterien auch in Knickstellen  $x_*$  von  $f$  anwendbar und können auf Randpunkte  $x_*$  eines Definitionsintervalls  $D$  ausgeweitet werden.

Nichtsdestotrotz können auch die Vorzeichenwechsel-Kriterien unter Umständen versagen. Ein Beispiel hierfür, bei dem  $f'$  nahe dem zu untersuchenden kritischen Punkt unendlich oft das Vorzeichen wechselt, wird in der Vorlesung diskutiert.

Zusammenfassend sei über die Berechnung und Klassifikation von Extremstellen festgehalten:

**Verfahren (Bestimmung von Extremstellen/Extremwerten).** Für eine „an den meisten Stellen“ differenzierbare Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  auf  $D \subset \mathbb{R}$  lassen sich Extremstellen und -werte wie folgt bestimmen:

*Schritt 1:* Man berechnet die Ableitung  $f'$  und ihre Nullstellen; die so erhaltenen kritischen Punkte samt eventuellen Nicht-Differenzierbarkeitsstellen und Randpunkten stellt man zu einer **Kandidatenliste für Extremstellen** zusammen.

*Schritt 2:* Interessiert man sich für **lokale Extremstellen**, so bestimmt man den Typ der Kandidaten (also, ob sie lokale Minimalstellen, lokale Maximalstellen oder Sattelpunkte sind); beispielsweise kann man dazu auf die im ersten Schritt berechnete Ableitung  $f'$  und die Vorzeichenwechsel-Kriterien zurückgreifen.

*Schritt 2':* Interessiert man sich für **absolute Extremstellen**, auch **globale Extremstellen** genannt, auf  $A \subset D$ , so gilt es zunächst deren **Existenz zu prüfen/sichern**; dazu bestimmt man Limes von  $f$  beim Grenzübergang gegen nicht zu  $A$  gehörige Randpunkte und prüft, ob eine Version des Extremalsatzes greift. Anschließend berechnet man für die zu  $A$  gehörigen Punkte  $x$  der Kandidatenliste die Funktionswerte  $f(x)$  und stellt einen **Wertevergleich** an. (Dabei muss Schritt 2 nicht unbedingt vorher durchgeführt werden; falls er aber durchgeführt wurde, kann man aufgrund der Ergebnisse eventuell schon einige Kandidaten ausschließen.)

**Beispiel** (zur Bestimmung von Extremstellen). Als Beispiel wird die durch

$$f(x) := (2x^2 - 18x + 9)e^{2/x} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}_{>0}$$

gegebene Funktion  $f$  auf  $\mathbb{R}_{>0}$  betrachtet.

*Schritt 1:* Man erhält (nach Ableiten und einer Rechnung inklusive Lösen einer quadratischen Gleichung)

$$f'(x) = 4 \frac{(x-1)(x-\frac{3}{2})(x-3)}{x^2} e^{2/x} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}_{>0}.$$

Die Kandidatenliste besteht daher aus den drei kritischen Punkten 1,  $\frac{3}{2}$  und 3 von  $f$ .

*Schritt 2:* Mit den Vorzeichenwechsel-Kriterien identifiziert man 1 und 3 als strikte lokale Minimalstellen von  $f$  sowie  $\frac{3}{2}$  als strikte lokale Maximalstelle von  $f$ .

*Schritt 2':* Wegen  $\lim_{x \searrow 0} f(x) = \infty = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  ist die Existenz eines globalen Minimums durch eine Variante des Extremalsatzes gesichert, ein globales Maximum existiert dagegen nicht. Der Vergleich der beiden Werte  $f(1) = -7e^2 = -51,7233\dots$  und  $f(3) = -27e^{2/3} = -52,5888\dots$  in den lokalen Minimalstellen zeigt, dass 3 einzige globale Minimalstelle von  $f$  ist und der Wert des globalen Minimums  $-27e^{2/3}$  beträgt.

Es folgen weitere wichtige Begriffe, die ebenfalls mit der Untersuchung  $\mathbb{R}$ -wertiger Funktionen und ihrer Extremstellen zusammenhängen.

**Definition (Konvexität, Konkavität).** Sei  $I$  ein Intervall. Dann heißt  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  **konvexe Funktion** auf  $I$ , wenn die **Konvexitätsungleichung**

$$f(\lambda y + (1-\lambda)x) \leq \lambda f(y) + (1-\lambda)f(x) \quad \text{für alle } x, y \in I, \lambda \in [0, 1]$$

gilt. Gilt für  $x \neq y$ ,  $0 < \lambda < 1$  sogar die strikte Ungleichung  $f(\lambda y + (1-\lambda)x) < \lambda f(y) + (1-\lambda)f(x)$ , so heißt  $f$  **streng konvexe Funktion** auf  $I$ . Ist  $-f$  (streng) konvex, gilt also für  $f$  statt der Konvexitätsungleichung genau die umgekehrte Ungleichung, so spricht man von der **Konkavitätsungleichung** und nennt  $f$  (streng) **konkave Funktion**.

**Bemerkungen** (zu Konvexität und Konkavität).

- (1) **Geometrisch bedeutet Konvexität** von  $f$ , dass **der Graph von  $f$  unter allen seinen Sehnen** (Verbindungsstrecken zwischen je zwei seiner Punkte) **verläuft**. Durchläuft man den Graphen von kleineren hin zu größeren Zahlen als Argumenten von  $f$ , so erscheint er damit „**linksgekrümmt**“. Analog bedeutet Konkavität, dass der Graph über seinen Sehnen verläuft und „rechtsgekrümmt“ erscheint.
- (2) Genau dann ist eine Funktion  $f$  gleichzeitig konvex und konkav auf einem Intervall, wenn sie dort affin linear ist.

Die Charakterisierungen des nächsten Satzes sind für die Untersuchung von und dem Umgang mit Konvexität oder Konkavität von zentraler Bedeutung.

**Satz (Konvexitätssatz).** Sei  $f$  stetig auf einem Intervall  $I$  und differenzierbar auf  $\overset{\circ}{I}$ . Dann sind **folgende Aussagen äquivalent** (und zwar sowohl dann, wenn alle Ergänzungen in geschweiften Klammern mit gelesen, als auch wenn diese alle ignoriert werden):

(I)  **$f$  ist {streng} konvex auf  $I$ .**

(II) **Es gilt die Stützfunktionsungleichung**

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) \quad \text{für alle } x_0 \in \overset{\circ}{I}, x \in I$$

{mit Gleichheit einzig für  $x = x_0$ }.

(III)  **$f'$  wächst auf  $\overset{\circ}{I}$  {streng} monoton.**

Falls  $f$  auf  $\overset{\circ}{I}$  zweifach differenzierbar ist, so ist **außerdem äquivalent:**

(IV) **Es gilt**

$$f'' \geq 0 \quad \text{auf } \overset{\circ}{I}$$

{und auf keinem Teilintervall von  $\overset{\circ}{I}$  mit positiver Länge tritt  $f' \equiv 0$  ein}.

Ein Beweis des Satzes wird in der Vorlesung gegeben.

**Bemerkungen** (zum Konvexitätssatz).

- (1) Die Stützfunktionsungleichung aus der Charakterisierung (II) besagt, dass der Graph von  $f$  über seinen Tangenten (aber nichtsdestotrotz unter seinen Sehnen) verläuft. Die Tangenten sind dabei durch die Tangentengleichung (\*\*) aus Abschnitt 4.1 beschrieben und werden im hiesigen Zusammenhang auch als Stützfunktionen bezeichnet.

(2) (Strenge) Konkavität kann ganz analog charakterisiert werden.

die zu Beginn des Abschnitts begonnene Liste spezieller Punkte kann nun um einen weiteren Typ ergänzt werden:

**Definition (Wendepunkte).** Eine innerer Punkt  $x_*$  von  $D \subset \mathbb{R}$  heißt **Wendepunkt** von  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ , wenn  $f'(x_*)$  existiert und es ein  $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$  gibt, so dass  $f$  auf einem der beiden Intervalle  $]x_* - \delta, x_*]$  und  $[x_*, x_* + \delta[$  streng konvex, auf dem anderen streng konkav ist.

**Bemerkung.** In der Literatur findet sich eine Vielzahl leicht unterschiedlicher Definitionen für Wendepunkte. So wird manchmal nur Konvexität/Konkavität statt *strenger* Konvexität/Konkavität gefordert, zusätzlich zur Existenz von  $f'(x_*)$  wird auch die von  $f''(x_*)$  verlangt, und/oder es werden umgekehrt sogar Knickstellen/Stellen unendlicher Steilheit mit Nicht-Existenz von  $f'(x_*)$  erlaubt.

**Korollar (Notwendige und hinreichende Ableitungskriterien für Wendepunkte).** Seien  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion auf  $D \subset \mathbb{R}$  und  $x_*$  ein innerer Punkt von  $D$ .

- (I) **Notwendiges Kriterium:** Ist  $x_*$  Wendepunkt von  $f$  und existiert  $f'$  auf  $]x_* - \delta, x_* + \delta[$ ,  $\delta > 0$ , so hat  $f'$  in  $x_*$  eine strikte lokale Extremstelle, insbesondere gilt bei Existenz von  $f''(x_*)$  also  $f''(x_*) = 0$ .
- (II) **Hinreichendes Kriterium:** Existiert  $f'(x_*)$  und hat  $f''$  bei  $x_*$  einen strikten Vorzeichenwechsel (d.h.  $f''(x_* + h)$  existiert für  $0 < |h| \ll 1$  mit entweder  $f''(x_* - h) < 0 < f''(x_* + h)$  für  $0 < h \ll 1$  oder  $f''(x_* - h) > 0 > f''(x_* + h)$  für  $0 < h \ll 1$ ), so ist  $x_*$  ein Wendepunkt von  $f$ . Insbesondere greift dies, wenn  $f''(x_*) = 0$  und  $f'''(x_*) \neq 0$  existieren.

Beide Kriterien folgen hierbei aus dem Konvexitätssatz. Die zweite Form des notwendigen Kriteriums mit  $f''(x_*)$  ergibt sich aus dem notwendigen Kriterium für Extremstellen, die des hinreichenden Kriteriums mit  $f'''(x_*)$  über die Definition dieser Ableitung.

**Für die Rechenpraxis gilt es sich von diesen Kriterien vor allem zu merken, dass man bei zweifach differenzierbarem  $f$  alle inneren Kandidaten für Wendepunkte als Nullstellen von  $f''$  erhält.**

**Verfahren (Kurvendiskussion).** Als Kurvendiskussion bezeichnet man den systematischen Einsatz der in diesem Abschnitt diskutierten Methoden und Kriterien, um Informationen über den Graphen einer  $\mathbb{R}$ -wertigen Funktion  $f$  einer reellen Variablen zu gewinnen. Vorausgesetzt, dass Ableitungen an ausreichend vielen Stellen existieren, bestimmt man dazu konkret ...

- den **Definitionsbereich** von  $f$  und **Limites** von  $f(x)$  bei  $x \rightarrow \pm\infty$  sowie bei Annäherung von  $x$  an Definitionslücken von  $f$  (eventuell auch möglichst einfache Asymptoten-Funktionen  $g$  mit  $f(x) - g(x) \rightarrow 0$  bei  $x \rightarrow \pm\infty$  und bei Definitionslücken),
- die **Nullstellen** und **Positivitäts-/Negativitäts-Bereiche** von  $f$ ,
- die **kritischen Punkte** und (maximalen) **Monotonie-Intervalle** von  $f$ ,
- die **Wendepunkte** und (maximalen) **Konvexitäts-/Konkavitäts-Intervalle** von  $f$

und

- fertigt auf Basis der gewonnenen Erkenntnisse eine **Skizze des Graphen von  $f$**  an.

Die Durchführung einer Kurvendiskussion für eine konkret gegebene Beispielfunktion  $f$  wird als Übungsaufgabe gestellt.

### 4.3 Der Schrankensatz und Anwendungen der Differentialrechnung

Der Schrankensatz bildet das zentrale Werkzeug der Analysis, um ausgehend von ihrer Ableitung  $f'$  über eine Funktion  $f$  Informationen (vor allem in Form von Abschätzungen) zu gewinnen. Der Satz kann folgendermaßen formuliert werden.

**Hauptsatz (Schrankensatz).** Sei  $f: I \rightarrow \mathbb{K}$  stetig auf einem Intervall  $I$  und differenzierbar auf der Menge  $\overset{\circ}{I}$  der inneren Punkte von  $I$ . Gilt dann  $|f'| \leq C$  auf  $\overset{\circ}{I}$  mit einer Konstante  $C \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ , so folgt

$$|f(y) - f(x)| \leq C|y - x| \quad \text{für alle } x, y \in I.$$

**Bemerkungen** (zum Schrankensatz).

- (1) Im Fall  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  gelingt ein einfacher Beweis des Schrankensatzes, indem man mit dem Mittelwertsatz  $f(y) - f(x) = f'(\xi)(y - x)$  für eine Zwischenstelle  $\xi \in \overset{\circ}{I}$  schreibt. Die Abschätzung  $|f(y) - f(x)| = |f'(\xi)||y - x| \leq C|y - x|$  ergibt dann die Behauptung.
- (2) Dieselbe Argumentation zeigt für  $\mathbb{R}$ -wertige  $f$ , die den Voraussetzungen des Satzes genügen, folgende **einseitige Abschätzungen**:

$$\begin{aligned} f' \leq C \text{ auf } \overset{\circ}{I} &\implies f(y) \leq f(x) + C(y - x) \text{ für } x < y \text{ in } I, \\ f' \geq -C \text{ auf } \overset{\circ}{I} &\implies f(y) \geq f(x) - C(y - x) \text{ für } x < y \text{ in } I. \end{aligned}$$

- (3) Der Schrankensatz besagt, dass **jede Funktion  $f$  mit beschränkter Ableitung** auf einem Intervall  $I$  dort **dehnungsbeschränkt/Lipschitz-stetig** ist, und genauer, dass jede Schranke  $C$  für  $|f'|$  auf  $I$  dort eine Dehnungsschranke/Lipschitz-Konstante für  $f$  ist. Insbesondere gilt die Abschätzung

$$|f(y) - f(x)| \leq \left( \sup_{\overset{\circ}{I}} |f'| \right) |y - x| \quad \text{für alle } x, y \in I$$

mit der **optimalen Dehnungsschranke/Lipschitz-Konstante**  $\sup_{\overset{\circ}{I}} |f'|$  für  $f$ .

- (4) Da bei einer Lipschitz-Funktion die Beträge aller Differenzenquotienten durch die Lipschitz-Konstante abgeschätzt sind, ist die Ableitung einer solchen Funktion, wenn sie existiert, stets beschränkt. Somit gilt auch eine Umkehrung zur vorigen Bemerkung, und man kann insgesamt sagen: Die **differenzierbaren Lipschitz-Funktionen** auf Intervallen sind **genau die Funktionen mit beschränkter Ableitung**.

*Beweis des Schrankensatzes (bei Werten in  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ).* Ohne Einschränkung sei  $x < y$  in  $\overset{\circ}{I}$  (sonst  $x, y$  vertauschen und/oder Punkte in  $I \setminus \overset{\circ}{I}$  als Limites von Punkten in  $\overset{\circ}{I}$  behandeln). Für beliebiges  $\varepsilon > 0$  sei dann

$$A_\varepsilon := \{t \in [x, y] : |f(t) - f(x)| \leq (C + \varepsilon)(t - x)\}, \quad s_\varepsilon := \sup A_\varepsilon$$

(wobei  $A_\varepsilon$  mindestens  $x$  enthält und daher  $s_\varepsilon \in [x, y]$  ist). Da  $A_\varepsilon$  durch schwache Ungleichungen definiert wird, ist  $s_\varepsilon \in A_\varepsilon$ , das heißt

$$|f(s_\varepsilon) - f(x)| \leq (C + \varepsilon)(s_\varepsilon - x).$$

Wäre nun  $s_\varepsilon < y$ , so ergäbe sich mit  $|f'(s_\varepsilon)| \leq C$  außerdem

$$|f(s_\varepsilon+h)-f(s_\varepsilon)| \leq (C+\varepsilon)h \quad \text{für } 0 < h \ll 1,$$

Gemäß der Dreiecksungleichung müsste dann

$$|f(s_\varepsilon+h)-f(x)| \leq |f(s_\varepsilon)-f(x)| + |f(s_\varepsilon+h)-f(s_\varepsilon)| \leq (C+\varepsilon)(s_\varepsilon+h-x) \quad \text{für } 0 < h \ll 1$$

gelten, was der Wahl von  $s_\varepsilon$  als Supremum von  $A_\varepsilon$  widerspricht. Also ist  $y = s_\varepsilon \in A_\varepsilon$ , und dies bedeutet

$$|f(y)-f(x)| \leq (C+\varepsilon)(y-x).$$

Da  $\varepsilon > 0$  beliebig ist, folgt mit  $|f(y)-f(x)| \leq C(y-x)$  die Behauptung.  $\square$

Als Konsequenz des Schrankensatzes wird in der Vorlesung hergeleitet:

**Korollar (Differenzierbarkeit an Stellen stetiger Ergänzbarkeit der Ableitung).** *Seien  $I$  ein Intervall,  $a \in I$  und  $f: I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{K}$  eine (in Randpunkten einseitig) differenzierbare Funktion auf  $I$ . Existiert  $\lim_{I \ni x \rightarrow a} f'(x) \in \mathbb{K}$ , so existiert auch  $f(a) := \lim_{I \ni x \rightarrow a} f(x) \in \mathbb{K}$  und ergänzt  $f$  zu einer (in Randpunkten einseitig) differenzierbaren Funktion mit stetiger Ableitung  $f'$  auf ganz  $I$ .*

Die Umkehroperation des Differenzierens wird für die Zwecke des nächsten Satzes wie folgt benannt. In der Analysis II wird diese Umkehroperation dann noch viel ausführlicher diskutiert und untersucht.

**Definition (Stammfunktionen).** *Sei  $I$  ein Intervall. Eine Stammfunktion zu  $f: I \rightarrow \mathbb{K}$  auf  $I$  ist eine (in Randpunkten einseitig) differenzierbare Funktion  $F: I \rightarrow \mathbb{K}$  mit  $F' = f$  auf  $I$ .*

**Bemerkung** (zur Eindeutigkeit von Stammfunktionen). Falls eine Stammfunktion  $F$  zu  $f$  auf  $I$  existiert, so ist auch jede Funktion  $F+C$  mit  $C \in \mathbb{K}$  eine Stammfunktion zu  $f$  auf  $I$ , und gemäß dem Konstanzsatz sind tatsächlich alle Stammfunktionen zu  $f$  auf  $I$  von der Form  $F+C$ . In diesem Sinn sind **Stammfunktionen (nur) bis auf (Addition von) Konstanten eindeutig**.

Konvergiert eine Folge oder Reihe differenzierbarer Funktionen, so liegt die Frage nach **Differenzierbarkeit der Grenzfunktion** nahe. Wie schon bei der in Abschnitt 3.3 behandelten Frage nach der Stetigkeit der Grenzfunktion, hängt auch diesmal die Antwort mit gleichmäßiger Konvergenz zusammen:

**Satz (Differentiation und Stammfunktionsbildung bei Funktionenfolgen/-reihen).** *Sei  $I$  ein Intervall, und seien  $f_k, f: I \rightarrow \mathbb{K}$  gegebene Funktionen.*

- (I) **Gliedweise Differentiation:** *Existiert  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = f$  bzw.  $\sum_{k=k_0}^{\infty} f_k = f$  punktweise auf  $I$ , sind die  $f_k$  auf  $I$  differenzierbar<sup>2</sup>, und konvergiert auf Ebene der **Ableitungen**  $\lim_{k \rightarrow \infty} f'_k$  bzw.  $\sum_{k=k_0}^{\infty} f'_k$  **gleichmäßig** auf  $I$ , so ist die Grenzfunktion  $f$  differenzierbar mit Ableitung*

$$f' = \lim_{k \rightarrow \infty} f'_k \quad \text{bzw.} \quad f' = \sum_{k=k_0}^{\infty} f'_k \quad \text{auf } I$$

*(und die Konvergenz  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = f$  bzw.  $\sum_{k=k_0}^{\infty} f_k = f$  ist dann tatsächlich gleichmäßig auf jedem beschränkten Teilintervall von  $I$ ).*

<sup>2</sup>In eventuell zu  $I$  gehörigen Randpunkten ist an einseitiges Differenzieren und in Folge stets an einseitige Ableitungen gedacht.



- (II) **Gliedweise Stammfunktionsbildung:** Konvergiert  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = f$  bzw.  $\sum_{k=k_0}^{\infty} f_k = f$  **gleichmäßig** auf  $I$ , sind  $F_k: I \rightarrow \mathbb{K}$  Stammfunktionen zu  $f_k$  auf  $I$ , und konvergiert auf Ebene der Stammfunktionen  $\lim_{k \rightarrow \infty} F_k(x_0)$  bzw.  $\sum_{k=k_0}^{\infty} F_k(x_0)$  an einer Stelle  $x_0 \in I$  in  $\mathbb{K}$ , so konvergiert  $\lim_{k \rightarrow \infty} F_k$  bzw.  $\sum_{k=k_0}^{\infty} F_k$  tatsächlich gleichmäßig auf jedem beschränkten Teilintervall von  $I$ , und die Grenzfunktion

$$F := \lim_{k \rightarrow \infty} F_k \quad \text{bzw.} \quad F := \sum_{k=k_0}^{\infty} F_k$$

ist eine Stammfunktion zu  $f$  auf  $I$ .

**Bemerkungen** (zu gliedweiser Differentiation und Stammfunktionsbildung).

- (1) Der Satz ist eine erneute Manifestation des Prinzips, dass die Vertauschung zweier Grenzprozesse bei gleichmäßiger Konvergenz erlaubt ist. Hier ist der eine Grenzprozess der Limes bzw. die Reihe, der andere ist in Teil (I) die Differentiation und in Teil (II) die Stammfunktionsbildung.
- (2) Die Konvergenz der Stammfunktionen in (II) lässt sich stets durch Addition geeigneter Konstanten erreichen, konkret indem man von  $F_k$  zu  $F_k - F_k(x_0)$  übergeht (wobei gemäß obiger Bemerkung mit  $F_k$  auch  $F_k - F_k(x_0)$  eine Stammfunktion zu  $f_k$  ist).
- (3) **Bei Potenzreihen** liegt — jedenfalls weg vom Rand des Konvergenzbereichs — stets gleichmäßige Konvergenz vor. Daher ist der Satz dort **stets anwendbar** und rechtfertigt die schon in Beispiel (4) des Abschnitts 4.1 angesprochene gliedweise Berechnung der Ableitung.
- (4) Anstelle gleichmäßiger Konvergenz auf ganz  $I$  reicht als Voraussetzung in (I) bzw. (II) schon gleichmäßige Konvergenz auf jedem kompakten Teilintervall von  $I$  — man spricht von kompakter Konvergenz auf  $I$ . Dies ergibt sich durch Anwendung des Satzes auf kompakte Teilintervalle (und natürlich bekommt man auch bei den Aussagen dann nur die Gleichmäßigkeit auf kompakten statt beliebigen beschränkten Teilintervallen).

Der Beweis des Satzes über gliedweise Differentiation und Stammfunktionsbildung wird in der Vorlesung ausgeführt.

**Anwendungen** (der gliedweisen Stammfunktionsberechnung).

- (1) Durch Stammfunktionsbildung bei der Binomialreihe  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-1/2}{k} x^{2k}$  erhält man die **Arcussinus-Reihe**

$$\arcsin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-3) \cdot (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2k-2) \cdot 2k} \cdot \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \quad \text{für } x \in ]-1, 1[.$$

- (2) Aus der Partialbruchzerlegung des Kotangens gewinnt man (mit in der Vorlesung erläuterten Vorgehen) das **Eulersche Sinus-Produkt**

$$\frac{1}{\pi} \sin(\pi x) = x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{k}\right) \left(1 - \frac{x}{k}\right) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

(3) Durch Einsetzen von  $x = \frac{1}{2}$  im Sinus-Produkt ergibt sich das **Wallische Produkt**

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdot \dots = \frac{\pi}{2}.$$

(Alternativ kann man der Wert des Wallischen Produkts übrigens auch mit Hilfe der Arcussinus-Reihe herleiten; dies erfordert aber noch einige weitere Überlegungen und wird hier nicht ausgeführt.)

Als Nächstes wird noch eine Anwendung der Differentialrechnung auf die Berechnung von Grenzwerten behandelt. Die Grundlage hierfür bildet folgender Satz:

**Satz (Grenzwert-Regeln von l'Hospital).** Sei  $I$  ein Intervall und  $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$  ein innerer Punkt von  $I$  oder einer der beiden Randpunkte von  $I$ . Seien außerdem  $f, g: I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$  auf  $I \setminus \{a\}$  differenzierbar, und  $g$  sowie  $g'$  besitze keine Nullstelle in  $I \setminus \{a\}$ . Ist dann  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  **unbestimmt vom Typ<sup>3</sup>  $\frac{0}{0}$  oder  $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$** , so gilt

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

falls der Grenzwert auf der rechten Seite in  $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$  existiert.

**Bemerkungen** (zu den Regeln von l'Hospital).

- (1) Die Regeln von l'Hospital gelten (ohne weitere Voraussetzungen) nur für  $\mathbb{R}$ -wertige Funktionen und **nur bei Vorliegen eines der Typen  $\frac{0}{0}$  oder  $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$** .
- (2) Versucht man einen Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  nach l'Hospital zu berechnen und stößt auf einen Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ , der erneut unbestimmt vom Typ  $\frac{0}{0}$  oder  $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$  ist, so kann man versuchen, durch eine weitere oder **mehrfach wiederholte Anwendung der Regeln** zu einem (leicht) berechenbaren Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(m)}(x)}{g^{(m)}(x)}$  zu gelangen; vergleiche auch das folgende Beispiel. Bei diesem Vorgehen ist natürlich darauf zu achten, dass vor jedem Schritt einer der zulässigen Typen vorliegt.
- (3) Die Regeln von l'Hospital erlauben oft die Berechnung von Grenzwerten, die auch mit Hilfe von Potenzreihenentwicklungen bestimmt werden können. Die l'Hospital-Regeln lassen sich dabei recht schematisch anwenden, eine Potenzreihenentwicklung ist oft intuitiver und erhellender. Insgesamt gibt es bei beiden Vorgehensweisen Vor- und Nachteile sowie Beispiele für Fälle, in denen sie besser oder schlechter funktionieren.

**Beispiel.** Durch zweifache Anwendung der l'Hospital-Regeln berechnet man beispielsweise

$$\underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos x}}_{\text{Typ } \frac{0}{0}} = \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin x}}_{\text{Typ } \frac{0}{0}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\cos x} = \frac{2}{1} = 2.$$

Der Beweis der l'Hospital-Regeln beruht auf folgender Variante des Mittelwertsatzes:

<sup>3</sup>Die Voraussetzung an den Typ des Grenzwerts bedeutet, dass entweder  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$  oder  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \in \{-\infty, \infty\} \ni \lim_{x \rightarrow a} g(x)$  gelten soll.

**Satz (Zweiter Mittelwertsatz der Differentialrechnung).** Sei  $a < b$  in  $\mathbb{R}$ , und die Funktionen  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  seien beide stetig auf  $[a, b]$  sowie differenzierbar auf  $]a, b[$ . Dann gibt es eine Zwischenstelle  $\xi \in ]a, b[$  mit

$$f'(\xi)[g(b)-g(a)] = g'(\xi)[f(b)-f(a)].$$

*Beweis.* Die durch  $h(x) := f(x)[g(b)-g(a)] - g(x)[f(b)-f(a)]$  definierte Hilfsfunktion  $h$  erfüllt  $h(a) = f(a)g(b) - f(b)g(a) = h(b)$  und besitzt nach dem Satz von Rolle einen kritischen Punkt  $\xi \in ]a, b[$ . Es gilt also  $0 = h'(\xi) = f'(\xi)[g(b)-g(a)] - g'(\xi)[f(b)-f(a)]$ .  $\square$

*Beweis der Regel von l'Hospital für den Typ  $\frac{0}{0}$ .* Da uneigentliche Grenzstellen durch Substitution in eigentliche überführt werden können, wird ohne Einschränkung  $a \in \mathbb{R}$  angenommen. Weil  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  vom Typ  $\frac{0}{0}$  ist, werden  $f$  und  $g$  durch  $f(a) := 0 =: g(a)$  stetig fortgesetzt, und für jedes  $x \in I \setminus \{a\}$  lässt sich nach dem zweiten Mittelwertsatz

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}$$

mit einer Stelle  $\xi_x$  echt zwischen  $a$  und  $x$  schreiben. Da mit  $0 < |x-a| < \delta$  auch  $0 < |\xi_x-a| < \delta$  gilt, folgt hieraus  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi \rightarrow a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ , sofern der rechte Grenzwert existiert.  $\square$

*Beweis der Regel von l'Hospital für den Typ  $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ .* Es reicht, den Fall  $I = ]a, \infty[$  mit  $a \in \mathbb{R}$  und den Typ  $\frac{\infty}{\infty}$  mit

$$L := \lim_{\xi \searrow a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \in \mathbb{R}$$

zu behandeln (denn andere Fälle können via Substitution darauf zurückgeführt werden). Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig. Dann gibt es ein  $\delta > 0$  mit

$$L-\varepsilon < \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} < L+\varepsilon \quad \text{für alle } \xi \in ]a, a+\delta[.$$

Für jedes  $x \in ]a, a+\delta[$  erlaubt der zweite Mittelwertsatz die Umschreibung

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a+\delta)}{g(x)-g(a+\delta)} \cdot \frac{g(x)-g(a+\delta)}{g(x)} + \frac{f(a+\delta)}{g(x)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} \left[ 1 - \frac{g(a+\delta)}{g(x)} \right] + \frac{f(a+\delta)}{g(x)}$$

mit einer Stelle  $\xi_x \in ]x, a+\delta[ \subset ]a, a+\delta[$ . In Anbetracht von  $\lim_{x \searrow a} g(x) = \infty$  entnimmt man jetzt einerseits

$$\limsup_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \leq (L+\varepsilon) \lim_{x \searrow a} \left[ 1 - \frac{g(a+\delta)}{g(x)} \right] + \lim_{x \searrow a} \frac{f(a+\delta)}{g(x)} = L+\varepsilon$$

und andererseits

$$\liminf_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \geq (L-\varepsilon) \lim_{x \searrow a} \left[ 1 - \frac{g(a+\delta)}{g(x)} \right] + \lim_{x \searrow a} \frac{f(a+\delta)}{g(x)} = L-\varepsilon.$$

Aufgrund der Beliebigkeit von  $\varepsilon$  muss folglich  $\lim_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$  gelten.  $\square$

## 4.4 Taylor-Entwicklung

Wie beim Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$  mit Folgen lässt sich auch bei einem kontinuierlichen Grenzübergang  $x \rightarrow a$  mit Funktionen ein Vergleich von Konvergenz-Geschwindigkeiten durchführen. Hierfür wird folgende Terminologie eingeführt (die für  $r = 1$  teils schon in Abschnitt 4.1 auftrat):

**Definition (*r*-ter-Ordnung-Übereinstimmung, *r*-ter-Ordnung-Verschwinden).** Seien  $f, g: D \rightarrow \mathbb{K}$  Funktionen auf  $D \subset \mathbb{R}$  und  $a$  ein innerer Punkt von  $D$ . Für  $r \in \mathbb{R}_{>0}$  sagt man, dass  $f$  mit  $g$  bei  $a \dots$

- **von mehr als *r*-ter Ordnung übereinstimmt**, wenn  $f(a) = g(a)$  gilt und  $f(x) - g(x)$  bei  $x \rightarrow a$  schneller als  $|x-a|^r$  gegen 0 geht (letzteres bedeutet  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - g(x)}{|x-a|^r} = 0$ ). Man notiert hierfür  $f(x) = g(x) + o(|x-a|^r)$  bei  $x \rightarrow a$  mit dem **Landau-Symbol**  $o$ .
- **von mindestens *r*-ter Ordnung übereinstimmt**, wenn  $f(a) = g(a)$  gilt und  $f(x) - g(x)$  bei  $x \rightarrow a$  mindestens wie  $|x-a|^r$  gegen 0 geht (dies heißt  $\limsup_{x \rightarrow a} \frac{|f(x) - g(x)|}{|x-a|^r} < \infty$ ). Man notiert hierfür  $f(x) = g(x) + \mathcal{O}(|x-a|^r)$  bei  $x \rightarrow a$  mit dem **Landau-Symbol**  $\mathcal{O}$ .
- **von genau *r*-ter Ordnung übereinstimmt**, wenn  $f(a) = g(a)$  gilt und  $f(x) - g(x)$  bei  $x \rightarrow a$  genau wie  $|x-a|^r$  gegen 0 geht (d.h.  $0 < \liminf_{x \rightarrow a} \frac{|f(x) - g(x)|}{|x-a|^r} \leq \limsup_{x \rightarrow a} \frac{|f(x) - g(x)|}{|x-a|^r} < \infty$ ).

Gleichbedeutend damit, dass  $f$  mit  $g$  von (mehr als/mindestens/genau)  $r$ -ter Ordnung übereinstimmt, verwendet man auch die Sprechweise, dass  $f$  durch  $g$  **von** (mehr als/mindestens/genau)  $r$ -ter Ordnung **approximiert** wird. Speziell im Fall  $g \equiv 0$  sagt man auch, dass  $f$  in seiner Nullstelle  $a$  **von** (mehr als/mindestens/genau)  $r$ -ter Ordnung **verschwindet**.

Die aus Abschnitt 4.1 bekannte Erster-Ordnung-Approximation mit linearen Funktionen wird nun verallgemeinert zu einer  $m$ -ter-Ordnung-Approximation mit Polynomen vom Grad  $\leq m$  bei beliebigem  $m \in \mathbb{N}$ .

**Definition (Taylor-Polynome).** Sei  $a$  ein innerer Punkt von  $D \subset \mathbb{R}$ , sei  $m \in \mathbb{N}_0$ , und  $f: D \rightarrow \mathbb{K}$  sei  $m$ -fach differenzierbar an der Stelle  $a$ . Dann wird das  $m$ -te **Taylor-Polynom**  $T_a^m f$  von  $f$  zur Stelle  $a$  definiert durch

$$\begin{aligned} T_a^m f(x) &:= \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(m)}(a)}{m!}(x-a)^m \quad \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Die hier auftretenden Zahlen  $\frac{f^{(k)}(a)}{k!} \in \mathbb{K}$  heißen **Taylor-Koeffizienten von  $f$  zur Stelle  $a$** .

**Hauptsatz (Satz von Taylor; qualitative Form).** Sei  $a$  ein innerer Punkt von  $D \subset \mathbb{R}$ , sei  $m \in \mathbb{N}$ , und  $f: D \rightarrow \mathbb{K}$  sei  $m$ -fach differenzierbar an der Stelle  $a$ . Dann ist  $T_a^m f$  das eindeutige Polynom vom Grad  $\leq m$ , mit dem  $f$  bei  $a$  von mehr als  $m$ -ter Ordnung übereinstimmt. Insbesondere gilt die **Taylor-Formel**

$$f(x) = T_a^m f(x) + o(|x-a|^m) \text{ bei } x \rightarrow a.$$

Ist  $f$  an der Stelle  $a$  sogar  $(m+1)$ -fach differenzierbar, so stimmt  $f$  bei  $a$  von mindestens  $(m+1)$ -ter Ordnung mit  $T_a^m f$  überein, dann gilt also stärker

$$f(x) = T_a^m f(x) + \mathcal{O}(|x-a|^{m+1}) \text{ bei } x \rightarrow a.$$

Ein Beweis des Hauptsatzes auf Basis des Schrankensatzes wird in der Vorlesung gegeben. Dabei geht die Übereinstimmung der Ableitungen  $(T_a^m f)^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$  für alle  $k \in \{0, 1, 2, \dots, m\}$  ein, die die eigentliche Motivation für die Definition der Taylor-Polynome darstellt.

Die Bestimmung der im Satz auftretenden Taylor-Polynome  $T_a^m f$  gelingt in vielen Fällen (insbesondere bei gutartiger Wahl der Stelle  $a$ ) durch elementare Berechnung des Funktionswerts und der Ableitungswerte  $f(a), f'(a), f''(a), \dots, f^{(m)}(a)$ . Ist  $f$  eine Potenzreihenfunktion oder gar ein Polynom, so lassen sich die Taylor-Polynome  $T_a^m f$  nach Übergang zum Entwicklungspunkt  $a$  trivial ablesen.

Die Bedeutung von Taylor-Polynomen wird vor allem dadurch begründet, dass  $T_a^m f(x)$  mit  $0 < |x-a| \ll 1$  und  $m \gg 1$  in vielen Fällen als Näherungswert für den u.U. schwieriger zu berechnenden Funktionswert  $f(x)$  angesehen werden kann. Die qualitative Aussage des vorigen Satzes stellt die Verlässlichkeit solcher Näherungswerte aber noch nicht sicher. Hierfür benötigt man vielmehr Formeln und Abschätzungen für den Fehler  $f(x) - T_a^m f(x)$ , wie sie erst der nächste Satz bereitstellt.

**Satz (Satz von Taylor; quantitative Form).** Sei  $a < x$  in  $D \subset \mathbb{R}$ , sei  $m \in \mathbb{N}_0$ , und  $f: D \rightarrow \mathbb{K}$  sei  $(m+1)$ -fach differenzierbar in allen Punkten des Intervalls  $[a, x] \subset D$ . Für das **Taylor-Restglied**

$$R_a^m f(x) := f(x) - T_a^m f(x)$$

gelten dann folgende **Restglied-Formeln** und **Restglied-Abschätzungen**, die **Formeln nur im reell-wertigen Fall**  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , die Abschätzungen auch für  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ :

- **Lagrange-Form**

$$R_a^m f(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} (x-a)^{m+1} \quad \text{für eine Zwischenstelle } \xi \in ]a, x[,$$

$$|R_a^m f(x)| \leq \frac{|x-a|^{m+1}}{(m+1)!} \sup_{]a, x[} |f^{(m+1)}|,$$

- **Cauchy-Form**

$$R_a^m f(x) = \frac{f^{(m+1)}(\eta)}{m!} (x-\eta)^m (x-a) \quad \text{für eine Zwischenstelle } \eta \in ]a, x[,$$

$$|R_a^m f(x)| \leq \frac{|x-a|}{m!} \sup_{\eta \in ]a, x[} |(x-\eta)^m f^{(m+1)}(\eta)|,$$

- **Schlömilch-Form** mit beliebigem Exponent  $p \in \mathbb{R}_{>0}$

$$R_a^m f(x) = \frac{f^{(m+1)}(\vartheta_p)}{m! p} (x-\vartheta_p)^{m+1-p} (x-a)^p \quad \text{für eine Zwischenstelle } \vartheta_p \in ]a, x[,$$

$$|R_a^m f(x)| \leq \frac{|x-a|^p}{m! p} \sup_{\vartheta \in ]a, x[} |(x-\vartheta)^{m+1-p} f^{(m+1)}(\vartheta)|.$$

Ist  $x < a$  statt  $x > a$ , so bleiben all diese Aussagen richtig, sobald man  $[a, x]$  durch  $[x, a]$  und  $]a, x[$  durch  $]x, a[$  ersetzt.

Beweise der Formeln können auf den Satz von Rolle, den Mittelwertsatz der Differentialrechnung oder den zweiten Mittelwertsatz der Differentialrechnung (vergleiche Abschnitte 4.2 und 4.3) aufgebaut werden. Eine solche Herangehensweise wird in der Vorlesung erläutert.

**Bemerkungen** (zu Restglied-Formeln und -Abschätzungen).

- (1) Für  $\mathbb{C}$ -wertige Funktionen  $f$  gelten zwar die Restglied-Abschätzungen  $|\mathbb{R}_a^m f(x)| \leq \dots$ , aber im Allgemeinen nicht die Restglied-Formeln  $\mathbb{R}_a^m f(x) = \dots$  des Satzes.
- (2) Die Lagrange-Form ist für  $p = n+1$  und die Cauchy-Form für  $p = 1$  in der allgemeineren Schlömilch-Form enthalten. Für die allermeisten Anwendungen reicht es, die Lagrange-Form der Restglied-Abschätzung zu kennen. Diese lässt sich auch relativ leicht merken, denn ihre rechte Seite entspricht bis auf das Supremum gerade dem  $(m+1)$ -ten Taylor-Term.
- (3) Bei der natürlichen Exponentialfunktion  $\exp$  hat das  $m$ -te Taylor-Polynom zur Stelle 0 die Form  $T_0^m \exp(x) = \sum_{k=0}^m \frac{x^k}{k!}$ , und die Lagrange-Form der Restglied-Abschätzung besagt

$$|\mathbb{R}_0^m \exp(x)| \leq \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!} \max\{e^x, 1\} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Im Fall  $x > 0$  ist diese Fehlerabschätzung bereits aus Abschnitt 2.3 bekannt, im Fall  $x < 0$  verbessert sie die frühere Version.

- (4) Im Fall  $m = 0$  reduziert sich der Satz im Wesentlichen auf schon bekannte Resultate: Die Restglied-Formeln nach Lagrange und Cauchy entsprechen dann dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung, die zugehörigen Restglied-Abschätzungen dem Schrankensatz.
- (5) Schon für  $m = 1$  bringt die Restglied-Abschätzung nach Lagrange aber neue Erkenntnisse: Sie liefert bei Linearisierung einer zweifach differenzierbaren Funktion  $f$  im Sinne der Taylor-Formel  $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \mathbb{R}_a^1 f(x)$  die **Abschätzung des Linearisierungsfehlers**

$$|\mathbb{R}_a^1 f(x)| \leq \frac{|x-a|^2}{2} \sup_{]a,x[} |f''|.$$

Im Folgenden wird ein anderer Standpunkt zur Taylor-Entwicklung eingenommen, bei dem anstelle der Taylor-Polynome mit endlich vielen Taylor-Termen eine ganze Potenzreihe mit unendlich vielen Taylor-Termen betrachtet wird.

**Definition (Taylor-Reihen).** Sei  $f: D \rightarrow \mathbb{K}$  an der inneren Stelle  $a$  von  $D \subset \mathbb{R}$  beliebig oft differenzierbar. Dann heißt die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

in der reellen Variablen  $x$  die (**formale**) **Taylor-Reihe von  $f$  zur Stelle  $a$ .**

**Bemerkungen** (zu Taylor-Reihen).

- (1) Die Partialsummen der Taylor-Reihe von  $f$  zur Stelle  $a$  sind die Taylor-Polynome  $T_a^m f$ , dementsprechend ist der Wert dieser Reihe an der Stelle  $x$  (falls in  $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$  existent) der Limes  $\lim_{m \rightarrow \infty} T_a^m f(x)$ .

- (2) **In vielen, doch nicht allen Fällen konvergiert die Taylor-Reihe** von  $f$  zu einer beliebigen Stelle  $a$  **gegen die Ausgangsfunktion  $f$** , d.h. es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = f(x).$$

Man spricht dann auch davon, dass  $f$  für die betreffenden  $x$  **durch seine Taylor-Reihe zur Stelle  $a$  dargestellt wird**. Abstrakte Kriterien für dieses Verhalten liefert der nächste Satz.

**Satz** (Kriterien für die **Darstellbarkeit einer Funktion durch ihre Taylor-Reihe**). *Sei  $f: D \rightarrow \mathbb{K}$  an der inneren Stelle  $a$  von  $D \subset \mathbb{R}$  beliebig oft differenzierbar. Dann sind folgende vier Aussagen alle **äquivalent**:*

- (I) *Es gibt ein  $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ , so dass  $f$  auf  $[a, a+\delta[$  durch seine Taylor-Reihe zur Stelle  $a$  dargestellt wird.*
- (II) *Es gibt ein  $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ , so dass  $f$  auf  $[a, a+\delta[$  durch irgendeine Potenzreihe zum Entwicklungspunkt  $a$  dargestellt wird.*
- (III) *Es gibt ein  $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ , so dass  $\lim_{m \rightarrow \infty} R_a^m f(x) = 0$  für alle  $x \in [a, a+\delta[$  gilt.*
- (IV) *Es gibt ein  $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$  und ein  $S \in \mathbb{R}_{>0}$ , so dass  $f$  auf  $[a, a+\delta[$  von der Klasse  $C^\infty$  ist und  $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m! S^m} \sup_{]a, a+\delta[} |f^{(m)}| = 0$  erfüllt.*

*Ebenso sind die analogen Aussagen mit linksseitigen Intervallen  $]a-\delta, a]$  oder beidseitigen Intervallen  $]a-\delta, a+\delta[$  untereinander äquivalent.*

**Bemerkung.** Wird  $f$  wie in (II) durch eine Potenzreihe dargestellt, so kann es sich bei dieser Reihe nur um die Taylor-Reihe handeln; dies folgt aus dem vorigen Satz und dem Identitätssatz für Potenzreihen in Abschnitt 2.6.

Die Äquivalenz der Aussagen (I) und (III) im Satz gilt trivial. Die anderen Äquivalenzen werden in der Vorlesung über eine Rechnung mit Potenzreihen und die Lagrange-Restglied-Abschätzung bewiesen.

**Definition (reell-analytische Funktionen, Klasse  $C^\omega$ ).** *Eine Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{K}$  auf offenem  $D \subset \mathbb{R}$  heißt reell-analytische Funktion oder Funktion der Klasse  $C^\omega$  auf  $D$ , wenn es zu jedem  $a \in D$  ein  $\delta > 0$  gibt, so dass  $f$  auf  $]a-\delta, a+\delta[$  als Potenzreihe darstellbar ist.*

**Bemerkungen** (zu reell-analytischen Funktionen).

- (1) Aus dem vorigen Satz folgt, dass die  $C^\omega$ -Funktionen auf offenem  $D \subset \mathbb{R}$  genau die  $C^\infty$ -Funktionen sind, die auf einem kleinen Intervall um jedes  $a \in D$  durch ihre Taylor-Reihe zur Stelle  $a$  dargestellt werden.
- (2) Für viele Grundfunktionen wurden in Abschnitt 2.6 Potenzreihen-Entwicklungen angegeben, und die Regeln dieses Abschnitts liefern analoge Entwicklungen für zusammengesetzte Terme und Bildungen aus solchen Grundfunktionen. Daher **haben die allermeisten elementaren Funktionsausdrücke die  $C^\omega$ -Eigenschaft**, und viele Taylor-Reihen stimmen mit Potenzreihen aus Abschnitt 2.6 überein.

- (3) Dennoch ist die Klasse der  $C^\omega$ -Funktionen echt kleiner als die der  $C^\infty$ -Funktionen, das heißt mit anderen Worten, **reelle Analytizität ist eine echt stärkere Forderung als Differenzierbarkeit beliebiger Ordnung**. Zu Beispielen von  $C^\infty$ -Funktionen, die nicht  $C^\omega$  sind und somit keine Taylor-Entwicklung erlauben, sei gesagt:

- Gemäß einem Satz von E. Borel ist jede formale Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$  mit beliebigen  $c_k \in \mathbb{C}$  und  $a \in \mathbb{R}$  (Reihen mit Konvergenzradius 0 sind erlaubt!) die Taylor-Reihe einer  $C^\infty$ -Funktion  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zur Stelle  $a$ . Taylor-Reihen können also Konvergenzradius 0 haben und an überhaupt keiner Stelle (außer natürlich dem Entwicklungspunkt) konvergieren.
- Durch

$$f(x) := \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{|x|}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

ist eine  $C^\infty$ -Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f^{(m)}(0) = 0$  für alle  $m \in \mathbb{N}_0$  gegeben. Die Taylor-Reihe von  $f$  zur Stelle 0 ist also die Null-Reihe, und  $f$  ist nahe 0 nicht reell-analytisch. Es handelt sich hierbei um ein **absolutes Standard-Beispiel einer  $C^\infty$ -Funktion, die nicht  $C^\omega$  ist**.

- (4) Auch bei  $C^\omega$ -Funktionen auf einem offenen Intervall  $I$  muss die Taylor-Reihe übrigens nicht auf ganz  $I$  konvergieren; dies zeigen so einfache Beispiele wie  $x \mapsto (1-x)^{-1}$  auf  $I = ]-\infty, 1[$  oder  $x \mapsto (1+x^2)^{-1}$  auf  $I = \mathbb{R}$ .

Unter der starken Zusatzvoraussetzung des nächsten Satzes ist die Analytizität einer  $\mathbb{R}$ -wertigen  $C^\infty$ -Funktion und die Möglichkeit der Taylor-Entwicklung bis zum Rand des Definitionsbereichs aber doch sichergestellt:

**Satz** (von S. Bernstein). *Sei  $[a, a+R[ \subset D \subset \mathbb{R}$  mit  $R \in \mathbb{R}_{>0} \cup \{\infty\}$ , sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  an allen Stellen aus  $[a, a+R[$  beliebig oft differenzierbar, und es gebe ein  $k_0 \in \mathbb{N}_0$  mit  $f^{(k)} \geq 0$  auf  $[a, a+R[$  für alle  $k \geq k_0$ . Dann konvergiert die Taylor-Reihe von  $f$  zur Stelle  $a$  auf ganz  $[a, a+R[$  gegen die Ausgangsfunktion  $f$ , und insbesondere ist  $f$  auf  $]a, a+R[$  reell-analytisch.*

Der Beweis des Satzes ist Thema der Übungen.



# Kapitel 5

## Integration von Funktionen einer Variablen

### 5.1 Definition und grundlegende Eigenschaften des Riemann-Integrals

In diesem Abschnitt soll für Funktionen  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  auf kompakten Intervallen  $[a, b]$  ein mathematischer Begriff geprägt werden, der folgende Konzepte präzisiert:

- (I) **Flächeninhalt unter dem Funktionsgraphen** von  $f$ ,
- (II) **mittlerer Funktionswert** von  $f$  (im Sinne einer Art arithmetischen Mittels)
- (III) zwischen den Zeitpunkten  $a$  und  $b$  **zurückgelegter Weg**, wenn  $f(t)$  die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt  $t$  angibt,
- (IV) **Gesamt,,masse“** einer physikalischen Größe (z.B. Masse, elektrische Ladung, ...), wenn  $f(x)$  deren Dichte an der Stelle  $x$  angibt.

Als Vorgehensweise bietet es sich an, den gesuchten Begriff erst für eine sehr einfache Klasse von Funktionen einzuführen und dann zu verallgemeinern. Dies wird nun durchgeführt.

**Definition (Treppenfunktionen und elementares Integral).** Sei  $a < b$  in  $\mathbb{R}$ . Dann heißt eine Funktion  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$  **Treppenfunktion**, wenn es ein  $n \in \mathbb{N}$  und Zwischenstellen  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n \in [a, b]$  mit  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$  gibt, so dass  $g$  auf jedem Intervall  $]x_{i-1}, x_i[$  mit  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  einen konstanten Wert  $c_i \in \mathbb{K}$  hat. Das **elementare Integral**  $I_a^b(g)$  einer solchen Treppenfunktion  $g$  erklärt man als

$$I_a^b(g) := \sum_{i=1}^n c_i(x_i - x_{i-1}) \in \mathbb{K}.$$

**Bemerkung** (zur Definition des elementaren Integrals). Die Werte in den Zwischenstellen  $x_i$  sind für den Wert von  $I_a^b(g)$  offensichtlich belanglos. Außerdem kann man bei fester Treppenfunktion  $g$  immer zusätzliche Zwischenstellen  $x_i$  einführen und/oder gewisse  $x_i$  weglassen (nämlich solche, für die  $c_i = g(x_i) = c_{i+1}$  gilt). Man sieht aber problemlos, dass solche Modifikationen  $I_a^b(g)$  nicht ändern, dass  $I_a^b(g)$  also wirklich nur von  $g$ , nicht von der Wahl der  $x_i$  abhängt und in diesem Sinne wohldefiniert ist.

**Definition (Riemann-Integrierbarkeit und bestimmtes Riemann-Integral).** Für  $a < b$  in  $\mathbb{R}$  sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine beschränkte reell-wertige Funktion.

- Als **Oberfunktion** zu  $f$  auf  $[a, b]$  bezeichnet man eine Treppenfunktion  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $g \geq f$  auf  $[a, b]$ . Analog nennt man eine Treppenfunktion  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $g \leq f$  auf  $[a, b]$  eine **Unterfunktion** zu  $f$  auf  $[a, b]$ .
- Das **Oberintegral** und das **Unterintegral** von  $f$  über  $[a, b]$  werden definiert als

$$\int_a^{*b} f := \inf \{ I_a^b(g) : g \text{ ist Oberfunktion zu } f \text{ auf } [a, b] \} \in \mathbb{R},$$

$$\int_a^{*b} f := \sup \{ I_a^b(g) : g \text{ ist Unterfunktion zu } f \text{ auf } [a, b] \} \in \mathbb{R}.$$

Die dabei auftretenden elementaren Integrale von Ober- und Unterfunktionen heißen **Ober- und Untersummen**, die Funktion  $f$  heißt **Integrand**,  $a$  bezeichnet man als **untere Integrationsgrenze** und  $b$  als **obere Integrationsgrenze**.

- Die Funktion  $f$  heißt **(Riemann-)integrierbar** über  $[a, b]$ , falls Gleichheit

$$\int_a^{*b} f = \int_a^{*b} f$$

eintritt. In diesem Fall nennt man den gemeinsamen Wert

$$\int_a^b f := \int_a^{*b} f = \int_a^{*b} f \in \mathbb{R}$$

das (bestimmte Riemann-) **Integral** von  $f$  über  $[a, b]$ .

- Gleichbedeutend mit  $\int_a^b f$  verwendet man die Notation  $\int_a^b f(x) dx$ , bei der statt der Funktion  $f$  der Funktionsterm  $f(x)$  als Integrand notiert wird. An Stelle von  $x$  kann eine beliebige andere Benennung der Integrationsvariablen treten.

**Bemerkungen** (zum Riemann-Integral).

- (1) Für jedes beschränkte  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  besteht zwischen dem Ober- und dem Unterintegral die triviale Ungleichung

$$\int_a^{*b} f \geq \int_a^{*b} f.$$

Gleichheit tritt per Definition genau für die integrierbaren  $f$  ein.

- (2) Treppenfunktionen sind stets integrierbar, und ihr elementares Integral stimmt mit ihrem Integral überein. Insbesondere gilt für die Integration einer Konstanten  $C \in \mathbb{R}$  die (triviale, aber in der Integrationstheorie ständig verwendete) Regel

$$\int_a^b C = C(b-a).$$

- (3) **Das Integral  $\int_a^b f$  entspricht anschaulich dem Flächeninhalt der Fläche, die zwischen dem Intervall  $[a, b]$  auf der  $x$ -Achse und dem Graphen der Funktion  $f$  liegt** (und am linken und rechten Intervallrand senkrecht abgeschnitten wird). Dabei gehen Teile der Fläche oberhalb der  $x$ -Achse mit positivem Flächeninhalt ein, Teile unterhalb der  $x$ -Achse zählen mit negativem Flächeninhalt; hat  $f$  Vorzeichenwechsel, so werden positive und negative Flächeninhalte dementsprechend verrechnet.

Neben diesem zu Kapitelanfang unter (I) genannten Konzept präzisiert das Integral auch die dort unter (III) und (IV) genannten. Das unter (II) genannte Konzept wird nicht durch das Integral  $\int_a^b f$  selbst, sondern durch das sogenannte **Mittelwertintegral**  $\frac{1}{b-a} \int_a^b f$  realisiert.

Als Nächstes werden einige für den Umgang mit Integralen grundlegende Regeln festgehalten. Die Beweise orientieren sich direkt an der vorausgehenden Definition und verlaufen problemlos; der Fall der Regel (3) wird auch in den Übungen kurz angesprochen.

**Grundeigenschaften** (des Riemann-Integrals).

- (0) Abänderung der Funktionswerte von  $f$  an endlich vielen Stellen ändert  $\int_a^b f$  nicht.

Sofern es sich bei  $f$  und  $g$  um geeignete beschränkte Funktionen handelt und die Integrale auf der rechten Seite existieren, gelten ...

- (1) die **Linearität** des Integrals

$$\int_a^b (rf+sg) = r \int_a^b f + s \int_a^b g \quad \text{für } a < b \text{ in } \mathbb{R} \text{ und } r, s \in \mathbb{R},$$

- (2) die **Additivität** des Integrals bezüglich des Integrationsintervalls

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f \quad \text{für } a < b < c \text{ in } \mathbb{R},$$

- (3) die **Regeln für Translation, Skalierung, Spiegelung** des Integranden und des Integrationsintervalls

$$\begin{aligned} \int_a^b f(rx+c) dx &= \frac{1}{r} \int_{ra+c}^{rb+c} f && \text{für } a < b \text{ in } \mathbb{R}, c \in \mathbb{R} \text{ und } r > 0, \\ \int_a^b f(rx+c) dx &= -\frac{1}{r} \int_{rb+c}^{ra+c} f && \text{für } a < b \text{ in } \mathbb{R}, c \in \mathbb{R} \text{ und } r < 0. \end{aligned}$$

Und für geeignete Riemann-integrierbare Funktionen  $f$ ,  $f_n$  und  $g$  gelten ...

- (4) die **Monotonie** des Integrals bezüglich des Integranden

$$f \leq g \text{ auf } ]a, b[ \implies \int_a^b f \leq \int_a^b g,$$

- (5) die **fundamentalen Abschätzungen**

$$(b-a) \inf_{]a, b[} f \leq \int_a^b f \leq (b-a) \sup_{]a, b[} f,$$

(6) die **Dreiecksungleichung** und der **Schrankensatz** für Integrale

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f| \leq (b-a) \sup_{]a,b[} |f|,$$

(7) der (einfachste) **Konvergenzsatz**

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f \text{ gleichmäßig auf } ]a,b[ \implies \int_a^b f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_a^b f.$$

Grundlegend ist auch die Frage, welche Funktionen integrierbar sind. Der folgende Satz identifiziert eine weite Klasse solcher Funktionen, die praktisch alle konkret auftretenden Funktionen enthält:

**Satz (über Integrierbarkeitskriterien).** Für  $a < b$  in  $\mathbb{R}$  sei  $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine beschränkte Funktion.

(I) Ist  $f = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n$  ein auf  $[a,b]$  **gleichmäßiger Limes von Treppenfunktionen**  $g_n: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ , so ist  $f$  über  $[a,b]$  Riemann-integrierbar mit

$$\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} I_a^b(g_n).$$

(II) Genau dann ist  $f$  ein auf  $[a,b]$  **gleichmäßiger Limes von Treppenfunktionen**, wenn  $f$  auf  $[a,b]$  eine sogenannte **Regelfunktion** ist, das heißt, wenn alle einseitigen Grenzwerte  $f(x+)$  mit  $x \in [a,b[$  und  $f(x-)$  mit  $x \in ]a,b]$  in  $\mathbb{R}$  existieren.

**Zu den gemäß dem Satz integrierbaren Regelfunktionen** auf einem kompakten Intervall gehören insbesondere die **monotonen Funktionen** und die **stetigen Funktionen** sowie allgemeiner die zwischen endlich vielen Sprungstellen stückweise stetigen Funktionen.

*Beweis von Teil (I) des Satzes.* Sei  $\varepsilon > 0$ . Für  $n \gg 1$  ist dann  $g_n + \varepsilon$  Oberfunktion und  $g_n - \varepsilon$  Unterfunktion zu  $f$  auf  $[a,b]$ , woraus sich die Ungleichungen

$$\int_a^b f - \varepsilon(b-a) \leq I_a^b(g_n) \leq \int_a^b f + \varepsilon(b-a)$$

ergeben. Da generell  $\int_a^b f \geq \int_a^b f$  gilt und  $\varepsilon > 0$  beliebig ist, folgen die Existenz von  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_a^b(g_n)$  und  $\int_a^b f$  sowie die Übereinstimmung dieser beiden Werte.  $\square$

Ein Beweis von Teil (II) des Satzes wird in der Vorlesung skizziert und im Folgenden der Vollständigkeit halber noch etwas genauer ausgeführt; für den weiteren Aufbau der Integralrechnung sind die betreffenden Details aber nicht relevant.

*Beweis von Teil (II) des Satzes.* Es gilt zwei Implikationen zu zeigen:

Für die erste Implikation seien  $f = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n$  gleichmäßiger Limes von Treppenfunktionen  $g_n$  und  $x \in [a,b]$  eine fixierte Stelle. Aus der Definition der Treppenfunktionen ergibt sich die Existenz gewisser  $\delta_n > 0$  und  $c_n \in \mathbb{R}$  mit  $g_n \equiv c_n$  auf  $]x, x + \delta_n[$ . Die gleichmäßige Cauchy-Eigenschaft der  $g_n$  impliziert, dass auch die  $c_n$  eine Cauchy-Folge bilden, also existiert  $c := \lim_{n \rightarrow \infty} c_n \in \mathbb{R}$ . Zu  $\varepsilon > 0$  gibt es daher ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $|c - c_n| + \sup_{]a,b]} |g_n - f| < \varepsilon$ , und für  $y \in ]x, x + \delta_n[$  folgt  $|c - f(y)| \leq |c - c_n| + |g_n(y) - f(y)| < \varepsilon$ . Damit ist die Existenz von  $f(x+) = c \in \mathbb{R}$  gezeigt. Analog sieht man die Existenz von  $f(x-) \in \mathbb{R}$  für  $x \in ]a,b]$  ein, also ist  $f$  auf  $[a,b]$  eine Regelfunktion.

Für die zweite Implikation seien  $f$  eine Regelfunktion auf  $[a, b]$  und  $\varepsilon > 0$ . Die Argumentation verläuft über:

Hilfsaussage 1. Es gibt höchstens endliche viele Stellen  $x \in ]a, b[$  mit  $|f(x+) - f(x)| + |f(x-) - f(x)| \geq \varepsilon$ .

Wäre Hilfsaussage 1 falsch, so gäbe es eine ganze Folge solcher Stellen  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  und dann auch eine Teilfolge  $(x_{k_\ell})_{\ell \in \mathbb{N}}$  mit entweder  $x_{k_\ell} \nearrow x_*$  für ein  $x_* \in ]a, b[$  oder  $x_{k_\ell} \searrow x_*$  für ein  $x_* \in [a, b[$ . Wegen der angenommenen Eigenschaft der  $x_{k_\ell}$  gäbe es weiterhin Stellen  $y_{k_\ell} \in ]a, b[$ , die  $|f(x_{k_\ell}) - f(y_{k_\ell})| > \frac{\varepsilon}{2}$  erfüllen und von der gleichen Seite wie die  $x_{k_\ell}$  gegen  $x_*$  konvergieren. Damit bestünde ein Widerspruch zur Existenz von  $f(x_*)$  beziehungsweise  $f(x_*+)$ , und Hilfsaussage 1 ist verifiziert.

Seien jetzt  $x_1, x_2, \dots, x_{\ell-1}$  mit  $x_1 < x_2 < \dots < x_{\ell-1}$  die endlich vielen Stellen der Hilfsaussage 1. Zudem sei  $x_0 := a$  und  $x_\ell := b$ . Der nächste Schritt ist:

Hilfsaussage 2. Es gibt ein  $\delta > 0$ , so dass für  $x, \tilde{x} \in [a, b]$  gilt:

$$x, \tilde{x} \in ]x_{i-1}, x_i[ \text{ für ein } i \in \{1, 2, \dots, \ell\}, |\tilde{x} - x| < \delta \implies |f(\tilde{x}) - f(x)| < \varepsilon.$$

Wäre Hilfsaussage 2 falsch, so gäbe es ein  $i \in \{1, 2, \dots, \ell\}$  und Folgen  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}, (\tilde{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $]x_{i-1}, x_i[$  mit  $|\tilde{x}_k - x_k| \leq \frac{1}{k}$  und  $|f(\tilde{x}_k) - f(x_k)| \geq \varepsilon$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Für eine Teilfolge  $(k_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$  mit  $\lim_{\ell \rightarrow \infty} x_{k_\ell} = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \tilde{x}_{k_\ell} = x_* \in [x_{i-1}, x_i]$  existierten dann auch  $\lim_{\ell \rightarrow \infty} f(x_{k_\ell})$  und  $\lim_{\ell \rightarrow \infty} f(\tilde{x}_{k_\ell})$  in  $\mathbb{R}$  mit  $|\lim_{\ell \rightarrow \infty} f(\tilde{x}_{k_\ell}) - \lim_{\ell \rightarrow \infty} f(x_{k_\ell})| \geq \varepsilon$ . Im Fall  $x_* \in \{x_{i-1}, x_i\}$  ergäbe sich sofort ein Widerspruch, da  $\lim_{\ell \rightarrow \infty} f(x_{k_\ell})$  und  $\lim_{\ell \rightarrow \infty} f(\tilde{x}_{k_\ell})$  beide mit  $f(x_{i-1}+)$  oder beide mit  $f(x_i-)$  übereinstimmen müssten. Im verbleibenden Fall  $x_* \in ]x_{i-1}, x_i[$  wären für  $\lim_{\ell \rightarrow \infty} f(x_{k_\ell})$  und  $\lim_{\ell \rightarrow \infty} f(\tilde{x}_{k_\ell})$  nur die Werte  $f(x_*-), f(x_*+), f(x_*)$  möglich, so dass sicher  $|f(x_*+) - f(x_*)| + |f(x_*-) - f(x_*)| \geq \varepsilon$  gelten müsste. Die Stellen mit dieser Eigenschaft wurden aber als  $x_1, x_2, \dots, x_{\ell-1}$  gewählt, so dass sich auch in diesem Fall ein Widerspruch ergäbe. Damit ist Hilfsaussage 2 nachgewiesen.

Ausgehend von Hilfsaussage 2 kann eine Treppenfunktion  $g$  mit  $\sup_{[a, b]} |g - f| \leq \varepsilon$  wie folgt konstruiert werden. Man zerlegt jedes Intervall  $]x_{i-1}, x_i[$  in endlich viele Teilintervalle der Länge  $< \delta$ . In jedem solchen Teilintervall  $I$  wählt man eine beliebige Stelle  $x$  und realisiert  $g$  als auf  $I$  konstante Funktion mit Wert  $f(x)$ , so dass  $|g - f| < \varepsilon$  auf dem Teilintervall  $I$  gemäß Hilfsaussage 2 gilt. Vereinbart man zusätzlich  $g(x_i) := f(x_i)$  für  $i \in \{0, 1, 2, \dots, \ell\}$ , so folgt  $\sup_{[a, b]} |g - f| \leq \varepsilon$  für die Treppenfunktion  $g$ .

Alles in allem erhält man die Darstellung  $f = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n$  als gleichmäßiger Limes, wenn man mit  $g_n$  die zur Wahl des Stammbruchs  $\varepsilon = \frac{1}{n}$  gehörige Treppenfunktion  $g$  bezeichnet.  $\square$

Teil (I) des vorigen Satzes kann zur Berechnung konkreter Integrale verwendet werden und erlaubt es dann, statt mit Ober- und Untersummen mit den etwas flexibleren Näherungssummen  $I_a^b(g_n)$  zu arbeiten. Konkrete Beispiele für solche Integralberechnungen werden in der Vorlesung und den Übungen gegeben. Die folgenden Beispiele sind dagegen von vorwiegend theoretischem Interesse und dienen dazu, die Grenzen des Satzes und des Riemannschen Integralbegriffs auszuloten:

- Die **Thomae-Funktion**  $\vartheta$ , auch **Riemann-Funktion** genannt (aber keinesfalls zu verwechseln mit der Riemannschen Zeta-Funktion), wird definiert durch

$$\vartheta(x) := \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{für vollständig gekürzte Brüche } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \text{ mit } p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Die Funktion  $\vartheta$  ist eine beschränkte **Regelfunktion** und daher über alle kompakten Intervalle  $[a, b]$  positiver Länge **Riemann-integrierbar**. Für alle diese Intervalle gilt  $\int_a^b \vartheta = 0$ , man spricht daher von einer Riemannschen Nullfunktion.

- Die **charakteristische Funktion**  $\mathbb{1}_C$  der **Cantor-Menge**  $C$  (bekannt aus den Übungen zur Analysis I) erfüllt

$$\mathbb{1}_C(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in C \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus C \end{cases}.$$

Die Funktion  $\mathbb{1}_C$  ist **keine Regelfunktion**, aber dennoch über alle kompakten Intervalle positiver Länge **Riemann-integrierbar** und Riemannsche Nullfunktion.

- Als **Dirichlet-Funktion** bezeichnet man die charakteristische Funktion  $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$  des Zahlkörpers  $\mathbb{Q}$  mit

$$\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Die Funktion  $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$  ist **über kein Intervall**  $[a, b]$  mit  $a < b$  in  $\mathbb{R}$  **Riemann-integrierbar**, denn stets gilt

$$\int_a^{*b} \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} = b - a > 0 = \int_a^{*b} f.$$

Zum Abschluss dieses Abschnitts wird der Integralbegriff auf  $\mathbb{C}$ -wertige  $f$  verallgemeinert.

**Definition (Integration komplex-wertiger Funktionen).** Sei  $a < b$  in  $\mathbb{R}$ . Eine beschränkte  $\mathbb{C}$ -wertige Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  heißt über  $[a, b]$  **(Riemann-)integrierbar**, wenn  $\Re f$  und  $\Im f$  beide Riemann-integrierbar über  $[a, b]$  sind, und das (bestimmte Riemann-)Integral von  $f$  über  $[a, b]$  wird dann erklärt als

$$\int_a^b f := \int_a^b (\Re f) + \mathbf{i} \int_a^b (\Im f) \in \mathbb{C}.$$

Praktisch alles im  $\mathbb{R}$ -wertigen Fall Behandelte überträgt sich auf Integrale  $\mathbb{C}$ -wertiger Funktionen  $f$ . Insbesondere gilt die Dreiecksungleichung  $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$ , wie man durch Fixieren eines  $\omega \in \mathbb{C}$  mit  $|\omega| = 1$  und  $\omega \int_a^b f \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  und Anwendung der reellen Version auf  $\Re(\omega f)$  einsieht.

## 5.2 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, Integrationstechniken

In diesem Abschnitt werden Resultate und Techniken behandelt, die Näherungssummen vermeiden und die explizite Berechnung von Integralen stattdessen mit Differentialrechnung in Verbindung bringen. Die folgenden Konzepte bereiten eine elegante und umfassende Formulierung der diesbezüglichen Sätze vor.

**Definitionen.** Sei  $I$  ein Intervall in  $\mathbb{R}$ , und  $f: I \rightarrow \mathbb{K}$  sei eine Funktion, die über jedes kompakte Teilintervall positiver Länge von  $I$  Riemann-integrierbar ist.

- (I) Seien  $a, b \in I$ . Im Fall  $a < b$  wurde das Riemann-Integral  $\int_a^b f$  im vorigen Abschnitt definiert. Unter dem **orientierten Riemann-Integral** versteht man die Ergänzung dieses Begriffs durch die Festlegungen  $\int_a^b f := -\int_b^a f$  für  $a > b$  und  $\int_a^b f := 0$  für  $a = b$ .
- (II) Eine Funktion  $\Phi: I \rightarrow \mathbb{K}$  heißt ein **unbestimmtes Integral** von  $f$  auf  $I$ , wenn es ein  $x_0 \in I$  und ein  $C \in \mathbb{K}$  mit

$$\Phi(x) = \int_{x_0}^x f + C \quad \text{für alle } x \in I$$

gibt. Die Konstante  $C$  bezeichnet man als **Integrationskonstante**.

**Bemerkung.** Bei **Kenntnis eines unbestimmten Integrals**  $\Phi$  von  $f$  auf  $I$  erhält man auch **alle bestimmten Integrale** von  $f$  über Teilintervalle von  $I$ , denn dann gilt

$$\int_a^b f = \int_{x_0}^b f - \int_{x_0}^a f = (\Phi(b) - C) - (\Phi(a) - C) = \Phi(b) - \Phi(a) =: \Phi \Big|_a^b$$

(wobei die abkürzende Schreibweise  $\Phi|_a^b$  rechts auch in der Form  $\Phi(x)|_{x=a}^b$  oder  $[\Phi(x)]_{x=a}^b$  verwendet wird und bei langem Funktionsterm  $\Phi(x)$  sehr praktisch ist). Die **Berechnung eines unbestimmten Integrals** von  $f$  wiederum **entspricht** gemäß dem folgenden zentralen Satz der **Berechnung einer Stammfunktion**  $F$  zu  $f$  (also einer Funktion  $F$  mit  $F' = f$ , wie in Abschnitt 4.3 definiert) und kann mehr oder weniger schematisch angegangen werden. **Dieses Vorgehen** wird nun genauer diskutiert und ist im Hinblick auf *explizite* und *exakte* Berechnungen von Integralen **sehr viel leistungsfähiger als die Betrachtung elementarer Näherungssummen**.

**Hauptsatz (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, HDI).** Sei  $I$  ein Intervall in  $\mathbb{R}$ , und  $f: I \rightarrow \mathbb{K}$  sei eine **stetige** Funktion. Dann gelten:

- (I) **Jedes unbestimmte Integral** von  $f$  auf  $I$  ist eine **Stammfunktion** zu  $f$  auf  $I$ , es gilt also

$$\boxed{\frac{d}{dx} \int_{x_0}^x f = f(x)} \quad \text{für alle } x_0, x \in I.$$

- (II) **Jede Stammfunktion**  $F$  zu  $f$  auf  $I$  ist ein **unbestimmtes Integral** von  $f$  auf  $I$  und erfüllt daher

$$\boxed{\int_a^b f = F|_a^b} \quad \text{für alle } a, b \in I.$$

*Beweis.* Zum Beweis von Teil (I) des Satzes betrachtet man für beliebig fixiertes  $x_0 \in I$  die Differenzenquotienten  $\frac{1}{h}(\int_{x_0}^{x+h} f - \int_{x_0}^x f)$  des unbestimmten Integrals. Mit dem Schrankensatz für Integrale (Eigenschaft (6) in Abschnitt 5.1) ergibt sich für diese Differenzenquotienten

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{h} \left( \int_{x_0}^{x+h} f - \int_{x_0}^x f \right) - f(x) \right| &= \left| \frac{1}{h} \left( \int_x^{x+h} f \right) - f(x) \right| \\ &= \frac{1}{|h|} \left| \int_x^{x+h} (f - f(x)) \right| \leq \sup_{\substack{]x, x+h[ \\ \text{bzw.} \\ ]x+h, x[}} |f - f(x)| \xrightarrow{h \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

(wobei das Supremum für  $h > 0$  über  $]x, x+h[$  und für  $h < 0$  über  $]x+h, x[$  zu bilden ist). Damit ist  $\frac{d}{dx} \int_{x_0}^x f = f(x)$  gezeigt.

Zum Beweis von Teil (II) bildet man, wieder bei beliebig fixiertem  $x_0 \in I$ , das unbestimmte Integral  $\Phi(x) := \int_{x_0}^x f$ . Die Stammfunktion  $F$  erfüllt dann  $F' = f = \Phi'$ , wobei die zweite Gleichheit gemäß Teil (I) gilt. Nach dem Konstanzsatz folgt  $F = \Phi + C$  auf  $I$  für ein  $C \in \mathbb{K}$ . Mit  $\Phi$  ist also auch  $F$  ein unbestimmtes Integral von  $f$ , und  $\int_a^b f = F|_a^b$  gilt gemäß Vorüberlegung.  $\square$

**Bemerkungen** (zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung).

- (1) **Der HDI zeigt, dass unbestimmte Integration von stetigen Funktionen  $f$  nichts anderes ist als Stammfunktionsbildung**, d.h. die Umkehroperation zur Differentiation. Diese Feststellung ist aber keineswegs trivial — denn Integration und Stammfunktionsbildung wurden ganz unterschiedlich definiert — und oft sehr nützlich, um Eigenschaften des einen Konzepts auf das andere zu übertragen: Zum Beispiel ist aus Abschnitt 5.1 klar, dass

für stetige  $f$  stets ein unbestimmtes Integral existiert. Dass  $f$  auch eine Stammfunktion besitzt, ergibt sich aber erst mit dem HDI. Andererseits ist jede Stammfunktion eines stetigen  $f$  trivialerweise stetig differenzierbar, für unbestimmte Integrale von  $f$  folgt stetige Differenzierbarkeit erst mit dem HDI.

- (2) Für die Differentiation eines Integrals (mit stetigem Integrand  $f: I \rightarrow \mathbb{K}$ ) nach der *unteren* Integrationsgrenze folgt aus dem HDI die Regel

$$\frac{d}{dx} \int_x^{x_0} f = -f(x) \quad \text{für } x_0, x \in I.$$

- (3) Der Konstanzsatz garantiert, dass **Stammfunktionen und unbestimmte Integrale**  $\Phi$  zu  $f$  **bis auf Addition von Konstanten eindeutig** sind, aber eben **nicht völlig eindeutig**. Man verwendet deshalb die Schreibweisen

$$\int f = \Phi + \text{const} \quad \text{auf } I, \quad \int f(x) dx = \Phi(x) + \text{const} \quad \text{für } x \in I$$

und denkt bei den Integralen ohne Integrationsgrenzen an die Menge aller Stammfunktionen zu  $f$ , beim Hinzufügen von „+const“ an die Addition einer beliebigen Konstanten aus  $\mathbb{K}$ .

Erste Beispiele für konkrete Integralberechnungen mit dem HDI, bei denen man die benötigte Stammfunktion direkt „erraten“ kann, werden in der Vorlesung gegeben.

In vielen Fällen kann man eine Stammfunktion zu einem gegebenen Integranden aber nicht mehr ohne Weiteres bestimmen. Für solche Fälle gibt es Integrationstechniken; die beiden wohl wichtigsten ergeben sich — wie in der Vorlesung erklärt wird — als direkte Folgerungen aus dem HDI sowie den Differentiationsregeln für Produkte und Verkettungen.

**Satz (Produktintegration, partielle Integration, Wälzformel).** Sei  $I$  ein Intervall in  $\mathbb{R}$ , und seien  $f, g: I \rightarrow \mathbb{K}$  stetig differenzierbare Funktionen auf  $I$  (einseitig differenzierbar in eventuell zu  $I$  gehörigen Randpunkten). Dann gelten

$$\begin{aligned} \int_a^b (fg') &= [fg]_a^b - \int_a^b (f'g) && \text{für } a, b \in I, \\ \int (fg') &= fg - \int (f'g) + \text{const} && \text{auf } I. \end{aligned}$$

**Satz (Substitutionsregel, Transformationsregel).** Seien  $I$  und  $J$  Intervalle in  $\mathbb{R}$ , seien  $f: J \rightarrow \mathbb{K}$  eine stetige und  $g: I \rightarrow J$  eine (in eventuellen Randpunkten einseitig) stetig differenzierbare Funktion. Dann gelten

$$\begin{aligned} \int_a^b f(g(x))g'(x) dx &= \int_{g(a)}^{g(b)} f(y) dy && \text{für } a, b \in I, \\ \int f(g(x))g'(x) dx &= \int^{g(x)} f(y) dy + \text{const} && \text{für } x \in I, \end{aligned}$$

wobei  $\int^{g(x)} f(y) dy$  für die Terme  $\Phi(g(x))$  steht, die sich durch Einsetzen von  $g(x)$  in ein unbestimmtes Integral  $\Phi$  von  $f$  ergeben.



**Bemerkungen** (zur Substitutionsregel).

(1) In der Rechenpraxis wird die Substitutionsregel oft so angewandt, dass man **mittels der Gleichung  $y = g(x)$  und der formalen (!) Umrechnung von Differentialen  $dy = g'(x) dx$  die „alte“ Variable  $x$  überall durch die „neue“ Variable  $y$  ersetzt**. Ist  $g$  monoton und hat  $g'$  in  $I$  keine Nullstelle, so existiert die  $C^1$ -Umkehrfunktion  $g^{-1}$ , und dann kann man mittels der nach  $x$  aufgelösten Gleichungen  $x = g^{-1}(y)$  und  $dx = \frac{1}{g'(g^{-1}(y))} dy$  tatsächlich bei beliebig gegebenem Integranden mittels  $g$  substituieren. (Für allgemeine  $g$  muss der Integrand dagegen wie auf der linken Seite der Regeln von spezieller Form sein.)

(2) Neben der beschriebenen Umrechnung des Integranden gilt es bei Substitution, ...

- bei **bestimmten Integralen** die **Grenzen**  $a$  und  $b$  durch  $g(a)$  und  $g(b)$  zu **ersetzen**,
- bei **unbestimmten Integralen** nach Abschluss der Integration die **Rücksubstitution vorzunehmen**, d.h. die „neue“ Variable  $y$  am Ende wieder durch  $g(x)$  zu ersetzen.

Beispiele für Integralberechnungen mit partieller Integration oder Substitution werden in der Vorlesung gegeben. Anders als bei solchen Beispielaufgaben ist bei echten Anwendungen der Integralrechnung aber zumeist nicht klar, welche Integrationstechnik zielführend oder besonders günstig ist. Es gibt hierfür auch keine allgemeinen Regeln oder Methoden, sondern nur solche, die spezielle Klassen von Integranden abdecken. Fällt ein Integrand nicht eine Klasse von Funktionen, deren Integration man bereits beherrscht, so kommt man im Allgemeinen nur durch Ausprobieren verschiedener Techniken oder „Erraten“ der richtigen Vorgehensweise zum Erfolg. Deshalb lässt sich sagen: Ganz im Gegensatz zum schematischen Vorgang des Differenzierens

**ist Integrieren eine Kunst!**

Eine sehr einfach zu integrierende Klasse bilden die Polynomfunktionen, denn für diese braucht man nur die Regel  $\int x^s dx = \frac{1}{s+1} x^{s+1} + \text{const}$  (hier relevant nur für  $s \in \mathbb{N}_0$ , aber natürlich gültig für alle  $s \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ) und die Linearität des Integrals. Etwas schwieriger gestaltet sich die Integration von sogenannten rationalen Funktionen, das heißt von Quotienten von Polynomen. Der nächste Satz ermöglicht aber auch für solche Funktionen ein schematisches Vorgehen.

**Satz (Partialbruchzerlegung und Integration rationaler Funktionen).**

(I) **Komplexe Partialbruchzerlegung:** Sei

$$r = \frac{p}{q}$$

eine **rationale Funktion** über  $\mathbb{C}$ , das heißt ein Quotient von Polynomen  $p$  und  $q$  mit komplexen Koeffizienten. Dann besitzt  $r(z)$  eine **eindeutige Darstellung als komplexe Linearkombination von Potenzen**

$$z^j \quad \text{mit } j \in \mathbb{N}_0, j \leq \text{Grad}(p) - \text{Grad}(q)$$

**und von Partialbrüchen**

$$\frac{1}{(z-\zeta)^k} \quad \text{zu Nullstellen } \zeta \in \mathbb{C} \text{ von } q, k \in \mathbb{N}, k \leq \text{Vielfachheit}(\zeta).$$

Auf Intervallen in  $\mathbb{R}$  ohne Nullstelle von  $q$  kann  $r(x)$  mit Hilfe der Regeln

$$\int x^j dx = \frac{1}{j+1} x^{j+1} dx + \text{const},$$

$$\int \frac{1}{(x-\zeta)^k} dx = \begin{cases} \text{Log}(x-\zeta) + \text{const} & \text{für } k = 1 \\ -\frac{1}{k-1} \frac{1}{(x-\zeta)^{k-1}} + \text{const} & \text{für } k \geq 2 \end{cases}$$

integriert werden. (Dabei steht  $\text{Log}$  für den komplexen Logarithmus des Abschnitts 2.6 mit  $\text{Log}(x-\zeta) = \log|x-\zeta| + \mathbf{i} \text{Arg}(x-\zeta)$  und  $\text{Arg}(x-\zeta) = \arctan \frac{x - \Re \zeta}{\text{Im} \zeta} - \text{sgn}(\text{Im} \zeta) \frac{\pi}{2}$  für  $\zeta \notin \mathbb{R}$ .)

(II) **Reelle Partialbruchzerlegung:** Sei

$$r = \frac{p}{q}$$

eine **rationale Funktion** über  $\mathbb{R}$ , das heißt ein Quotient von Polynomen  $p$  und  $q$  mit reellen Koeffizienten. Dann besitzt  $r(x)$  eine **eindeutige Darstellung als reelle Linearkombination von Potenzen**

$$x^j \quad \text{mit } j \in \mathbb{N}_0, j \leq \text{Grad}(p) - \text{Grad}(q)$$

und von reellen Partialbrüchen

$$\frac{1}{(x-r)^k} \quad \text{zu Nullstellen } r \in \mathbb{R} \text{ von } q, k \in \mathbb{N}, k \leq \text{Vielfachheit}(r),$$

$$\frac{1}{((x-\alpha)^2 + \beta^2)^k} \quad \text{zu Nullstellen } \alpha + \mathbf{i}\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \text{ von } q, k \in \mathbb{N}, k \leq \text{Vielfachheit}(\alpha + \mathbf{i}\beta),$$

$$\frac{x-\alpha}{((x-\alpha)^2 + \beta^2)^k} \quad \text{zu Nullstellen } \alpha + \mathbf{i}\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \text{ von } q, k \in \mathbb{N}, k \leq \text{Vielfachheit}(\alpha + \mathbf{i}\beta).$$

Auf Intervallen ohne Nullstelle von  $q$  gelingt die Integration von  $r(x)$  mit Hilfe der reellen Regeln

$$\int x^j dx = \frac{1}{j+1} x^{j+1} dx + \text{const},$$

$$\int \frac{1}{(x-r)^k} dx = \begin{cases} \log|x-r| + \text{const} & \text{für } k = 1 \\ -\frac{1}{k-1} \frac{1}{(x-r)^{k-1}} + \text{const} & \text{für } k \geq 2 \end{cases},$$

$$\int \frac{x-\alpha}{((x-\alpha)^2 + \beta^2)^k} dx = \begin{cases} \frac{1}{2} \log((x-\alpha)^2 + \beta^2) + \text{const} & \text{für } k = 1 \\ -\frac{1}{2(k-1)} \frac{1}{((x-\alpha)^2 + \beta^2)^{k-1}} + \text{const} & \text{für } k \geq 2 \end{cases},$$

$$\int \frac{1}{((x-\alpha)^2 + \beta^2)^k} dx = \begin{cases} \frac{1}{\beta} \arctan \frac{x-\alpha}{\beta} + \text{const} & \text{für } k = 1 \\ \frac{2(k-1)-1}{2(k-1)\beta^2} \int \frac{1}{((x-\alpha)^2 + \beta^2)^{k-1}} dx + \frac{1}{2(k-1)\beta^2} \frac{x-\alpha}{((x-\alpha)^2 + \beta^2)^{k-1}} & \text{für } k \geq 2 \end{cases}$$

(wobei für den letzten Fall nur eine Rekursionsformel angegeben wurde).

Eine Beweisskizze zur Existenz und Eindeutigkeit der Partialbruchzerlegung wird in der Vorlesung gegeben (auch wenn es sich eher um ein Problem der Algebra als der Analysis handelt). Die angegebenen Integrationsregeln lassen sich durch Differenzieren problemlos nachrechnen.

**Verfahren** (Herstellung der Partialbruchzerlegung). Sei eine rationale Funktion

$$r = \frac{p}{q}$$

mit Polynomen  $p$  und  $q$  über  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  gegeben. **Zur praktischen Berechnung der Partialbruchzerlegung (PBZ)** von  $r$  geht man üblicherweise in folgenden Schritten vor:

- (0) **Optional:** Man bestimmt durch **Polynomdivision** die in der PBZ auftretenden Potenzen und reduziert die Betrachtung auf einen Quotienten, dessen Zähler-Polynom der bei der Polynomdivision verbliebene Rest ist und kleineren Grad als das Nenner-Polynom  $q$  hat.
- (1) Man bestimmt die **Nullstellen des Nenner-Polynoms**  $q$  und ihre Vielfachheiten. (Bei Übereinstimmungen mit Nullstellen des Zählers empfiehlt sich auch das Kürzen der zugehörigen Linearfaktoren.)
- (2) Man macht für die PBZ von  $r$  einen **Ansatz als Linearkombination aus den im Satz beschriebenen Partialbrüchen** (und bei Vorgehen ohne Polynomdivision auch aus den Potenzen) **mit noch unbekanntem Koeffizienten**.
- (3) Man stellt ein **lineares Gleichungssystem für die unbekanntem Koeffizienten** auf. Oft kann man hierbei durch geschicktes Vorgehen erheblichen Rechenaufwand einsparen und einige einfache Gleichungen direkt ablesen, beispielsweise indem man einen Wachstumsvergleich beim Grenzübergang gegen die Polstellen und  $\infty$  und/oder einen Wertevergleich an anderen geeigneten Stellen durchführt. Auch Symmetrie-Betrachtungen können weitere Gleichungen liefern. Als letztes Mittel, das immer und schematisch zum Ziel führt, aber oft großen Rechenaufwand erfordert, kann man den Ansatz mit dem Hauptnenner multiplizieren und die Koeffizienten der resultierenden Polynome vergleichen. In jedem Fall sind mindestens so viele Gleichungen aufzustellen wie unbekanntem Koeffizienten vorliegen (und noch mehr, falls die Gleichungen nicht auf Anhieb linear unabhängig sind).
- (4) Man **löst das lineare Gleichungssystem** für die Koeffizienten und erhält die gesuchte PBZ von  $r$ .

Manchmal kann ein gegebener Integrand auch durch eine Substitution in einen rationalen Integranden überführt und dann gemäß dem obigen Vorgehen integriert werden; Beispiele hierfür werden in den Übungen behandelt.

Zum Schluss dieses Abschnitts sei noch betont, dass mit den behandelten Methoden keineswegs jeder aus Grundfunktionen zusammengesetzte Integrand integriert werden kann. Tatsächlich muss die Stammfunktion eines solchen Integranden auch gar nicht notwendig eine Darstellung als elementarer Funktionsausdruck aus Grundfunktionen besitzen: Bekannte **Beispiele solcher elementarer Funktionen ohne elementare Stammfunktion** sind

$$e^{\pm x^2}, \quad \frac{e^x}{x}, \quad \frac{\sin x}{x}, \quad \frac{\cos x}{x}, \quad \frac{1}{\log x}, \quad \frac{x}{\log x}, \quad \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$$

sowie die Integranden der sogenannten elliptischen Integrale, das sind Funktionen des Typs  $r(x, \sqrt{p(x)})$  mit rationaler Funktion  $r$  und Polynom  $p$  vom Grad 3 oder 4.

Im **Fall einer nicht-elementaren Stammfunktion** nützen der HDI und die darauf aufbauenden Integrationstechniken offensichtlich wenig, man kann dann im Allgemeinen **nur im Sinne numerischer Näherungswerte oder durch Reihenentwicklung des Integranden** und gliedweise Stammfunktionsbildung im Sinne des Abschnitts 4.3 integrieren.

### 5.3 Uneigentliche Integrale, Parameter-abhängige Integrale

Als Nächstes wird der Integralbegriff auf unbeschränkte Integrations-Intervalle und (nahe einer Integrationsgrenze) unbeschränkte Integranden erweitert.

**Definition (uneigentliche Riemann-Integrale).**

- (I) Für  $-\infty < a < b \leq \infty$  sei  $f: [a, b[ \rightarrow \mathbb{K}$  über alle kompakten Teilintervalle von  $[a, b[$  Riemann-integrierbar. Wenn der Grenzwert existiert, heißt dann

$$\int_a^b f := \lim_{\beta \nearrow b} \int_a^\beta f$$

das (an der oberen Grenze) **uneigentliche Riemann-Integral** von  $f$  über  $[a, b[$ .

- (II) Für  $-\infty \leq a < b < \infty$  sei  $f: ]a, b] \rightarrow \mathbb{K}$  über alle kompakten Teilintervalle von  $]a, b]$  Riemann-integrierbar. Wenn der Grenzwert existiert, heißt dann

$$\int_a^b f := \lim_{\alpha \searrow a} \int_\alpha^b f$$

das (an der unteren Grenze) **uneigentliche Riemann-Integral** von  $f$  über  $]a, b]$ .

- (III) Für  $-\infty \leq a < b \leq \infty$  sei  $f: ]a, b[ \rightarrow \mathbb{K}$  über alle kompakten Teilintervalle von  $]a, b[$  Riemann-integrierbar. Wenn der Grenzwert<sup>1</sup> existiert, heißt dann

$$\int_a^b f := \lim_{\substack{\alpha \searrow a \\ \beta \nearrow b}} \int_\alpha^\beta f$$

das (an beiden Grenzen) **uneigentliche Riemann-Integral** von  $f$  über  $]a, b[$ .

Wenn die jeweiligen Limes in  $\mathbb{K}$  existieren, spricht man von **Konvergenz des uneigentlichen Integrals**, andernfalls von seiner (bestimmten/unbestimmten) Divergenz.

**Bemerkungen** (zu uneigentlichen Integralen).

- (1) Die vorausgehende Definition **verallgemeinert den Integralbegriff** des Abschnitts 5.1 und die zugehörige Notation  $\int_a^b f$ 
  - zum einen **auf uneigentliche Grenzen**  $a = -\infty$  und/oder  $b = \infty$ ,
  - zum anderen **auf bei  $x \searrow a$  und/oder  $x \nearrow b$  unbeschränkte Integranden**  $f(x)$ .
- (2) Für eigentliche Grenzen  $a < b$  in  $\mathbb{R}$  und auf  $]a, b[$  beschränkte Integranden  $f: ]a, b[ \rightarrow \mathbb{K}$  stimmt das uneigentliche Integral dagegen mit dem zuvor eingeführten Integral überein (zumindest wenn man letzteres für nur auf  $]a, b[$  statt  $[a, b]$  definierte Funktionen erklärt; problemlos möglich, da der Wert an den einzelnen Stellen  $f(a)$  und  $f(b)$  belanglos ist). Diese Übereinstimmung rechtfertigt erst die unveränderte Notation  $\int_a^b f$  und folgt selbst aus Grundeigenschaft (6) in Abschnitt 5.1, denn gemäß dieser Eigenschaft hängen Integrale beschränkter Funktionen stetig von den Integrationsgrenzen ab.

<sup>1</sup>Den **simultanen Limesprozess mit den beiden Grenzen**  $\alpha$  und  $\beta$  kann man wie folgt erklären: Man vereinbart, dass der Limes existiert und Wert  $L \in \mathbb{K}$  hat, wenn zu jedem  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$  ein  $\delta \in ]0, b-a]$  existiert, so dass für alle  $\alpha \in ]a, a+\delta[$  und  $\beta \in ]b-\delta, b[$  stets  $|L - \int_\alpha^\beta f| < \varepsilon$  gilt, und entsprechend erklärt man für  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  die Existenz des Limes mit  $\infty$  oder  $-\infty$ . Äquivalent ist es, den Limes als  $\lim_{\alpha \searrow a} \int_\alpha^{x_0} f + \lim_{\beta \nearrow b} \int_{x_0}^\beta f$  mit beliebigem  $x_0 \in ]a, b[$  einzuführen. Die genaue Wahl von  $x_0$  beeinflusst Existenz und Wert dabei nicht.

- (3) Die Grundeigenschaften des Abschnitts 5.1 übertragen sich problemlos auf uneigentliche Integrale.
- (4) Für  $-\infty \leq a < b \leq \infty$  sei  $F: ]a, b[ \rightarrow \mathbb{K}$  eine auf  $]a, b[$  stetig differenzierbare Funktion. Durch Anwendung des „normalen“ HDI auf kompakte Teilintervalle  $[\alpha, \beta] \subset ]a, b[$  und Grenzübergang erhält man den **HDI für uneigentliche Integrale**

$$\int_a^b F' = F(b-) - F(a+) =: F \Big|_{a+}^{b-},$$

sofern der Ausdruck  $F(b-) - F(a+)$  in  $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$  oder  $\mathbb{C}$  erklärt ist.

Auch beim „normalen“ HDI wird jetzt klar, dass die in der früheren Version implizit vorausgesetzte Differenzierbarkeit bis in die Randpunkte  $a, b \in \mathbb{R}$  überflüssig ist. Tatsächlich folgt  $\int_a^b F' = F \Big|_a^b$  unter den Voraussetzungen, dass  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$  auf  $]a, b[$  stetig differenzierbar, doch auf  $[a, b]$  nur stetig ist.

Auch die Regeln zur Produktintegration und Substitution übertragen sich selbstverständlich auf uneigentliche Integrale und Fälle ohne Differenzierbarkeit in Randpunkten.

- (5) **Geometrisch** beschreiben uneigentliche Integrale die **Flächeninhalte unbeschränkter Flächenstücke** (die wie früher zwischen den Funktionsgraphen und der  $x$ -Achse liegen).
- (6) Ist  $\int_a^b f$  auch als uneigentliches Integral nicht sinnvoll erklärt, so existieren eventuell noch sogenannte **Hauptwerte des nicht-existenten Integrals**. Im Fall  $a = -\infty, b = \infty$  ist

$$\text{HW-} \int_{-\infty}^{\infty} f := \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f$$

ein solcher Hauptwert. Ist  $f$  dagegen bei einem inneren Punkt  $x_0$  von  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  unbeschränkt, so kann man den Cauchy-Hauptwert

$$\text{CHW-} \int_a^b f := \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left( \int_a^{x_0-\varepsilon} f + \int_{x_0+\varepsilon}^b f \right)$$

betrachten. Im Gegensatz zum an beiden Grenzen uneigentlichen Integral wird hierbei aber stets ein **gekoppelter Limesprozess mit zwei Grenzen** durchgeführt.

**Beispiele. Bekannte Beispiele uneigentlicher Integrale sind ...**

- die Integrale von Potenzfunktionen

$$\int_1^{\infty} x^s dx \quad \text{und} \quad \int_0^1 x^s dx$$

(konvergent für  $s \in \mathbb{C}$  genau wenn  $\Re s < -1$  beziehungsweise  $\Re s > -1$ ),

- das (vollständige) **Gaußsche Fehlerintegral**

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} = \sqrt{\pi},$$

- die die **Gamma-Funktion** definierenden Integrale

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx = \int_0^1 (-\log t)^{s-1} dt$$

(konvergent für  $s \in \mathbb{C}$  genau wenn  $\Re s > 1$ ; erfüllen  $\Gamma(n+1) = n!$  für  $n \in \mathbb{N}_0$ ),

- nur durch Kürzungseffekte konvergente Integrale wie das **Dirichletsche Integral**

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \pi$$

und die **Fresnel-Integrale**

$$\int_{-\infty}^\infty \cos(x^2) dx = \int_{-\infty}^\infty \sin(x^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad \int_{-\infty}^\infty e^{\pm ix^2} dx = (1 \pm i) \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Etwas genauer werden diese und weitere Beispiele in der Vorlesung erläutert.

Die **Konvergenztheorie** uneigentlicher Integrale verläuft **sehr weitgehend analog zu** der der **Reihen** (vergleiche mit den Abschnitten 2.3 und 2.4). Insbesondere unterscheidet man zwischen **absoluter Konvergenz** von  $\int_a^b f$  (diese bedeutet definitionsgemäß  $\int_a^b |f| < \infty$ ) und nicht-absoluter Konvergenz von  $\int_a^b f$  in  $\mathbb{K}$ . Weitgehend analog zu Reihen gilt auch:

**Satz (Konvergenzkriterien für uneigentliche Integrale).** Für  $a < x_0 < b$  in  $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$  sei  $f: ]a, b[ \rightarrow \mathbb{K}$  über jedes kompakte Teilintervall von  $]a, b[$  eigentlich Riemann-integrierbar. Dann gelten:

- (I) **Cauchy-Kriterium:** Genau dann konvergiert  $\int_{x_0}^b f$ , wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  gibt, so dass

$$\left| \int_{\beta}^{\tilde{b}} f \right| < \varepsilon$$

für alle  $\beta, \tilde{\beta} \in ]b-\delta, b[$  (Fall  $b < \infty$ ) beziehungsweise alle  $\beta, \tilde{\beta} \in ]\frac{1}{\delta}, \infty[$  (Fall  $b = \infty$ ) gilt.

- (II) **Beschränktheitskriterium:** Sei  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  und  $f \geq 0$  auf  $]a, b[$ . Genau dann konvergiert  $\int_a^b f$ , wenn es ein  $M \in \mathbb{R}$  gibt, so dass für alle  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  mit  $a < \alpha < \beta < b$  gilt:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f \leq M.$$

- (III) **Majorantenkriterium:** Gilt  $|f| \leq g$  auf  $]a, b[$  für eine Majorante  $g: ]a, b[ \rightarrow [0, \infty[$ , die über alle kompakten Teilintervalle von  $]a, b[$  eigentlich Riemann-integrierbar ist und  $\int_a^b g < \infty$  erfüllt, so konvergiert  $\int_a^b f$  absolut.

- (IV) **Abel-Kriterium:** Konvergiert  $\int_{x_0}^b f$  und ist  $g: [x_0, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  eine monotone Funktion mit  $\limsup_{\beta \nearrow b} |g(\beta)| < \infty$ , so konvergiert  $\int_{x_0}^b (fg)$ .

- (V) **Dirichlet-Kriterium:** Gilt  $\limsup_{\beta \nearrow b} \left| \int_{x_0}^{\beta} f \right| < \infty$  und ist  $g: [x_0, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  eine monotone Funktion mit  $\lim_{\beta \nearrow b} g(\beta) = 0$ , so konvergiert  $\int_{x_0}^b (fg)$ .

Die Kriterien (I), (II) und (III) ergeben sich dabei aus analogen Kriterien für Grenzwerte. Das **Abel-Kriterium** (IV) und das **Dirichlet-Kriterium** (V) dienen zum **Nachweis nicht-absoluter Konvergenz**; der Vollständigkeit halber wird ihr Beweis ausgeführt.

*Beweis der Konvergenzkriterien (IV) und (V).* Sei zunächst  $f$  stetig mit Stammfunktion  $F$  und  $g$  stetig differenzierbar. Dann gilt für  $x_0 < \beta < \tilde{\beta} < b$  die Produktintegrations-Formel

$$\int_{\beta}^{\tilde{\beta}} (fg) = [Fg]_{\beta}^{\tilde{\beta}} - \int_{\beta}^{\tilde{\beta}} (Fg').$$

Auf der rechten Seite verschwindet  $[Fg]_{\beta}^{\tilde{\beta}}$  im Limes  $\tilde{\beta} \geq \beta \rightarrow b$  (im Fall des Abel-Kriteriums, weil  $F(b-) \in \mathbb{K}$  und  $g(b-) \in \mathbb{R}$  existieren; im Fall des Dirichlet-Kriteriums, weil  $F$  nahe  $b$  beschränkt bleibt und  $g(b-) = 0$  gilt). Wegen Monotonie von  $g$  lässt sich außerdem  $|\int_{\beta}^{\tilde{\beta}} (Fg')| \leq |\int_{\beta}^{\tilde{\beta}} g'| \sup_{] \beta, \tilde{\beta} [} |F| = |g(\tilde{\beta}) - g(\beta)| \sup_{] \beta, \tilde{\beta} [} |F|$  abschätzen, so dass auch der zweite Term auf der rechten Seite beim Grenzübergang  $\tilde{\beta} \geq \beta \rightarrow b$  verschwindet. Nach dem Cauchy-Kriterium (I) existiert daher  $\int_{\beta}^{\tilde{\beta}} (fg)$ .

Ohne Zusatzvoraussetzungen an  $f$  und  $g$  bleibt die Abschätzung

$$\left| \int_{\beta}^{\tilde{\beta}} (fg) - [Fg]_{\beta}^{\tilde{\beta}} \right| \leq |g(\tilde{\beta}) - g(\beta)| \sup_{] \beta, \tilde{\beta} [} |F|$$

für jedes unbestimmte Integral  $F$  von  $f$  richtig, und man erhält die Existenz von  $\int_{\beta}^{\tilde{\beta}} (fg)$  analog zur vorigen Argumentation. Um die angegebene Abschätzung zu erhalten, überlegt man sich durch Rechnen mit endlichen Summen, dass diese für monotone Treppenfunktionen  $g$  gilt. Allgemeine monotone Funktionen  $g$  sind Regelfunktionen und nach Abschnitt 5.1 gleichmäßige Limites von Treppenfunktionen  $g_n$ . Durch naheliegende Modifikation der  $g_n$  oder Beweisanalyse in Abschnitt 5.1 sieht man, dass die  $g_n$  sogar monoton gewählt werden können, und überträgt obige Abschätzung von den  $g_n$  auf  $g$ .  $\square$

Für über kompakte Teilintervalle von  $]a, b[$  integrierbare  $f: ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  ergibt sich aus dem Beschränktheitskriterium (auch dies ganz analog zu Reihen): Ist  $f \geq 0$  auf  $]a, b[$ , so konvergiert  $\int_a^b f$  in  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  oder hat den Wert  $\infty$ , und für allgemeine  $f$  tritt einer der folgenden Fälle ein:

- Fall  $\int_a^b f_+ < \infty$ ,  $\int_a^b f_- < \infty$ : In diesem konvergiert  $\int_a^b f$  absolut.
- Fall  $\int_a^b f_+ = \infty$ ,  $\int_a^b f_- < \infty$ : In diesem gilt  $\int_a^b f = \infty$ .
- Fall  $\int_a^b f_+ < \infty$ ,  $\int_a^b f_- = \infty$ : In diesem gilt  $\int_a^b f = -\infty$ .
- Fall  $\int_a^b f_+ = \infty$ ,  $\int_a^b f_- = \infty$ : Hier kann  $\int_a^b f$  nicht-absolut in  $\mathbb{R}$  konvergieren, Wert  $-\infty$  oder  $\infty$  haben oder gar nicht in  $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$  existieren. Man spricht vom **Typ  $\infty - \infty$** .

Als Nächstes sollen statt eines einzelnen Integrals ganze Familien eventuell uneigentlicher Integrale betrachtet werden, die von einem (zumeist reellen) Parameter abhängen.

**Definitionen (Parameter-abhängige Integrale, gleichgradige Integrierbarkeit).** Seien  $P$  eine Menge (von Parametern),  $-\infty \leq a < b \leq \infty$  und  $f: ]a, b[ \times P \rightarrow \mathbb{K}$  eine Funktion.

- Falls  $f(\cdot, p)$  für jedes  $p \in P$  über jedes kompakte Teilintervall von  $]a, b[$  Riemann-integrierbar ist und das eventuell uneigentliche Integral

$$\int_a^b f(x, p) dx := \int_a^b f(\cdot, p)$$

für alle  $p \in P$  in  $\mathbb{K}$  existiert, spricht man von einem **Parameter-abhängigen Integral**.

- Die Familie von Integranden  $(f(\cdot, p))_{p \in P}$  eines Parameter-abhängigen Integrals heißt **bei  $b$  gleichgradig integrierbar**, wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  gibt, so dass

$$\left| \int_{\beta}^b f(x, p) dx \right| < \varepsilon$$

für alle  $p \in P$  und alle  $\beta \in ]b - \delta, b[$  (Fall  $b < \infty$ ) beziehungsweise alle  $\beta \in ]\frac{1}{\delta}, \infty[$  (Fall  $b = \infty$ ) gilt. **Gleichgradige Integrierbarkeit** von  $(f(\cdot, p))_{p \in P}$  **bei  $a$**  definiert man analog.

Im Zusammenhang mit solchen Integralen stellt sich oft die Frage, ob ein Grenzübergang mit dem Parameter mit der Integration vertauscht werden darf. Der nächste Satz zeigt, dass eine solche Vertauschung in vielen Fällen durchgeführt werden kann, aber keineswegs trivial ist und der Rechtfertigung (durch Überprüfung der entsprechenden Voraussetzungen) bedarf.

**Satz (Vertauschungsprinzipien für Parameter-abhängige Integrale).** Sei  $\int_a^b f(x, p) dx$  ein Parameter-abhängiges Integral im Sinn und mit den Bezeichnungen der vorigen Definition. Dann gelten folgende Vertauschungsprinzipien:

- (I) **Grenzübergang unter Integral:** Sei  $(f(\cdot, p))_{p \in P}$  bei  $a$  und  $b$  jeweils gleichgradig integrierbar, sei  $p_0 \in P$ , und sei ein nicht-leeres Umgebungssystem  $\mathcal{S}_{p_0} \subset \mathcal{P}(P)$  gegeben. Liegt (mit  $\mathcal{S}_{p_0}$  erklärte) Konvergenz  $\lim_{P \ni p \rightarrow p_0} f(\cdot, p) = f(\cdot, p_0)$  auf  $]a, b[$  vor und ist diese gleichmäßig auf jedem kompakten Teilintervall von  $]a, b[$ , so gilt

$$\lim_{P \ni p \rightarrow p_0} \int_a^b f(x, p) dx = \int_a^b f(x, p_0) dx.$$

- (II) **Differentiation unter Integral:** Sei  $P$  ein offenes Intervall in  $\mathbb{R}$ , die Ableitung  $\frac{d}{dp} f(x, p)$  nach dem Parameter  $p$  existiere für alle  $(x, p) \in ]a, b[ \times P$ , und  $(\frac{d}{dp} f(\cdot, p))_{p \in P}$  sei bei  $a$  und  $b$  jeweils gleichgradig integrierbar. Ist  $p \mapsto \frac{d}{dp} f(x, p)$  für jedes  $x \in ]a, b[$  stetig auf  $P$  und ist für jedes kompakte Teilintervall  $J \subset ]a, b[$  diese Stetigkeit gleichmäßig in den  $x \in J$ , so gilt

$$\frac{d}{dp} \int_a^b f(x, p) dx = \int_a^b \frac{d}{dp} f(x, p) dx \quad \text{für alle } p \in P.$$

- (III) **Vertauschung von Integrationen:** Sei  $\emptyset \neq P = [p_*, p^*] \subset \mathbb{R}$ , und  $(f(\cdot, p))_{p \in P}$  sei bei  $a$  und  $b$  jeweils gleichgradig integrierbar. Ist  $f(x, \cdot)$  für jedes  $x \in ]a, b[$  stetig auf  $P$  und ist für jedes kompakte Teilintervall  $J \subset ]a, b[$  diese Stetigkeit gleichmäßig in den  $x \in J$ , so gilt

$$\int_{p_*}^{p^*} \left( \int_a^b f(x, p) dx \right) dp = \int_a^b \left( \int_{p_*}^{p^*} f(x, p) dp \right) dx.$$

**Bemerkungen** (zu den Vertauschungsprinzipien für Parameter-abhängige Integrale).

- Das Prinzip (I) mit  $P = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ,  $\mathcal{S}_{p_0} = \{\mathbb{N}_{\geq n_0} : n_0 \in \mathbb{N}\}$  enthält den **Konvergenzsatz für Funktionenfolgen** aus Abschnitt 5.1 als Spezialfall und verallgemeinert diesen auf Fälle, in denen die Konvergenz nur auf kompakten Teilintervallen, nicht auf dem Gesamtintervall  $]a, b[$  gleichmäßig ist. Eine analoge Aussage gilt für Funktionenreihen, allgemeiner ist das Prinzip aber **auch auf kontinuierliche Grenzübergänge** mit einem reellen Parameter  $p$  **anwendbar** und zeigt dann unter geeigneten Voraussetzungen **Stetigkeit Parameter-abhängiger Integrale**  $\int_a^b f(x, p) dx$  **im Parameter**  $p$ .
- Im Fall  $P \subset \mathbb{R}$  sind die Voraussetzungen der Prinzipien (I) und (III) typischerweise erfüllt, wenn  $f$  stetige Funktion beider Variablen  $(x, p)$  ist — in einem Sinn, der erst in Abschnitt 6.1 genauer erklärt wird.



- Für die **Vertauschung (II) von Differentiation** (nach einem Parameter) **und Integration** benötigt man ähnliche **Voraussetzungen** wie bei den anderen Prinzipien, jedoch in diesem Fall **für die Ableitung**  $\frac{d}{dp}f(x, p)$ .

*Beweis von Teil (I) des Satzes.* Sei  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$  beliebig fixiert. Wegen der vorausgesetzten gleichgradigen Integrierbarkeit gibt es dann ein  $\delta \in ]0, \frac{b-a}{2}]$  mit  $|\int_a^{a+\delta} f(\cdot, p)| + |\int_{b-\delta}^b f(\cdot, p)| < \frac{1}{3}\varepsilon$  und für alle  $p \in P$ . Wegen gleichmäßiger Konvergenz auf dem kompakten Teilintervall  $[a+\delta, b-\delta]$  gibt es weiterhin eine Umgebung  $U \in \mathcal{S}_{p_0}$  von  $p_0$  mit  $(b-a) \sup_{[a+\delta, b-\delta]} |f(\cdot, p) - f(\cdot, p_0)| < \frac{1}{3}\varepsilon$  für alle  $p \in U$ . Durch Zerlegung des Integrationsbereichs und Anwendung von Dreiecksungleichungen folgt

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(\cdot, p) - \int_a^b f(\cdot, p_0) \right| &\leq \left| \int_a^{a+\delta} f(\cdot, p) \right| + \left| \int_{b-\delta}^b f(\cdot, p) \right| + \int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(\cdot, p) - f(\cdot, p_0)| \\ &\quad + \left| \int_a^{a+\delta} f(\cdot, p_0) \right| + \left| \int_{b-\delta}^b f(\cdot, p_0) \right| \\ &< \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon = \varepsilon \end{aligned}$$

für alle  $p \in U$ . Damit ist die Behauptung  $\lim_{P \ni p \rightarrow p_0} \int_a^b f(\cdot, p) = \int_a^b f(\cdot, p_0)$  nachgewiesen.  $\square$

Der Beweis von Teil (II) des Satzes verwendet ähnliche Argumente auf der Ebene von Ableitungen. Die präzise Umsetzung ist etwas technisch; daher wird sie in der Vorlesung nicht im Detail behandelt, hier aber ausgeführt.

*Beweis von Teil (II) des Satzes.* Ohne Einschränkung sei  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ .

Man weist die Behauptung zunächst für kompakte Teilintervalle nach, zeigt also

$$\frac{d}{dp} \int_\alpha^\beta f(x, p) dx = \int_\alpha^\beta \frac{d}{dp} f(x, p) dx$$

für alle  $\alpha$  und  $\beta$  mit  $a < \alpha < \beta < b$  und alle  $p \in P$ . Dazu schreibt man für  $p \in P$  und  $h \in \mathbb{R}_{\neq 0}$  mit  $p+h \in P$  gemäß dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung  $\frac{f(x, p+h) - f(x, p)}{h} = \frac{d}{dp} f(x, \xi_x)$  mit Stellen  $\xi_x$  echt zwischen  $p$  und  $p+h$ . Es folgt

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{h} \left( \int_\alpha^\beta f(x, p+h) dx - \int_\alpha^\beta f(x, p) dx \right) - \int_\alpha^\beta \frac{d}{dp} f(x, p) dx \right| &= \left| \int_\alpha^\beta \left( \frac{d}{dp} f(x, \xi_x) - \frac{d}{dp} f(x, p) \right) dx \right| \\ &\leq (\beta - \alpha) \sup_{\substack{x \in ]\alpha, \beta[ \\ \xi \in ]p-h, p+h[}} \left| \frac{d}{dp} f(x, \xi) - \frac{d}{dp} f(x, p) \right| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0, \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die Stetigkeit von  $\frac{d}{dp} f(x, p)$  in  $p$  und deren Gleichmäßigkeit in den relevanten  $x$  benutzt wurde. Damit ist die Behauptung für kompakte Teilintervalle gezeigt.

Um den allgemeinen Fall zu behandeln, sei  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$  fixiert. Wegen der vorausgesetzten gleichgradigen Integrierbarkeit, gibt es dann ein  $\delta \in ]0, \frac{b-a}{2}[$ , so dass für  $\alpha \in [a, a + \delta[$  und  $\beta \in ]b - \delta, b]$  stets

$$\left| \int_\alpha^{a+\delta} \frac{d}{dp} f(x, p) dx \right| + \left| \int_{b-\delta}^\beta \frac{d}{dp} f(x, p) dx \right| < \frac{1}{2}\varepsilon$$

gilt. Mit der bereits gezeigten Aussage und dem Schrankensatz folgt hieraus (wobei wieder  $p \in P$  und  $h \in \mathbb{R}_{\neq 0}$  mit  $p+h \in P$  sei)

$$\left| \int_\alpha^{a+\delta} f(x, p+h) dx - \int_\alpha^{a+\delta} f(x, p) dx \right| + \left| \int_{b-\delta}^\beta f(x, p+h) dx - \int_{b-\delta}^\beta f(x, p) dx \right| \leq \frac{1}{2}\varepsilon h$$

zunächst nur für  $\alpha > a$  und  $\beta < b$ , nach Grenzübergang können die Grenzfälle  $\alpha = a$  und  $\beta = b$  aber wieder hinzugenommen werden. Damit ist nun klar, dass

$$\left| \frac{1}{h} \left( \int_a^b f(x, p+h) dx - \int_a^b f(x, p) dx \right) - \int_a^b \frac{d}{dp} f(x, p) dx \right|$$

durch den gleichen Term mit  $a+\delta$  anstelle von  $a$  und  $b-\delta$  anstelle von  $b$  bis auf  $\varepsilon$  abgeschätzt werden kann. Da für letzteren Term schon die Konvergenz gegen Null bei  $h \rightarrow 0$  gezeigt wurde und  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$  beliebig ist, verschwindet auch der Ausgangsterm mit  $a$  und  $b$  im Limes  $h \rightarrow 0$ . Damit ist die behauptete Ableitungseigenschaft gezeigt.  $\square$

*Beweis von Teil (III) des Satzes.* Für fixiertes  $p_0 \in P$  setzt man

$$F(x, p) := \int_{p_0}^p f(x, q) \, dq \quad \text{für alle } (x, p) \in ]a, b[ \times [p_*, p^*].$$

Gemäß dem HDI gilt dann  $\frac{d}{dp}F(x, p) = f(x, p)$ , und deshalb liegen alle Voraussetzungen vor, um das Parameter-abhängige Integral mit Integranden  $F(\cdot, p)$  gemäß Teil (II) des Satzes zu differenzieren. Es folgt

$$\frac{d}{dp} \int_a^b F(x, p) \, dx = \int_a^b f(x, p) \, dx \quad \text{für alle } p \in ]p_*, p^*[,$$

also ist  $p \mapsto \int_a^b F(x, p) \, dx$  Stammfunktion zu  $p \mapsto \int_a^b f(x, p) \, dx$ . Mit dem HDI erhält man nun

$$\begin{aligned} \int_{p_*}^{p^*} \int_a^b f(x, p) \, dx \, dp &= \int_a^b F(x, p^*) \, dx - \int_a^b F(x, p_*) \, dx \\ &= \int_a^b \int_{p_0}^{p^*} f(x, p) \, dp \, dx - \int_a^b \int_{p_0}^{p_*} f(x, p) \, dp \, dx = \int_a^b \int_{p_*}^{p^*} f(x, p) \, dp \, dx. \end{aligned}$$

Somit ist die Behauptung verifiziert.  $\square$

**Beispiele** (zu Berechnungen von/mit Parameter-abhängigen Integralen).

(1) Beim uneigentlichen Integral

$$\int_0^1 \frac{x^s - 1}{\log x} \, dx \quad \text{mit Parameter } s \in \mathbb{R}$$

sieht man mit Potenzfunktionen als Majoranten und Minoranten, das (absolute) Konvergenz genau für  $s > -1$  besteht. Da das Auffinden einer Stammfunktion (für  $s \neq 0$ ) problematisch scheint, bietet sich zur Berechnung des Wertes die Differentiation unter dem Integral

$$\frac{d}{ds} \int_0^1 \frac{x^s - 1}{\log x} \, dx = \int_0^1 \frac{d}{ds} \frac{x^s - 1}{\log x} \, dx = \int_0^1 x^s \, dx = \frac{1}{s+1}$$

an. Diese Rechnung ist für  $s > -1$  gerechtfertigt, da die unter dem Integral gebildete Ableitung  $x^s$  für  $s > s_0 > -1$  die Majorante  $x^{s_0}$  besitzt (denn  $|x^s| = x^s \leq x^{s_0}$  für  $0 < x < 1$ ) und die benötigte gleichmäßige Stetigkeit in  $s$  aufweist (denn  $|x^{\tilde{s}} - x^s| \leq \max\{x^s, x^{\tilde{s}}\} |\log x| |\tilde{s} - s| \leq \max\{\alpha^{s_0}, 1\} |\log \alpha| |\tilde{s} - s|$  für  $0 < \alpha \leq x < 1$ ). Durch Stammfunktionsbildung folgt

$$\int_0^1 \frac{x^s - 1}{\log x} \, dx = \log(s+1) + C \quad \text{für alle } s \in \mathbb{R}_{>-1}$$

mit einer Integrations-Konstante  $C \in \mathbb{R}$ , und durch Betrachtung des trivialen Falls  $s = 0$  identifiziert man  $C = 0$ . Damit ist das eingangs angegebene Integral berechnet.

(2) Auch die Werte des Gaußschen Fehlerintegrals, des Dirichletschen Integrals und der Fresnel-Integrale können durch (teils trickreiche) Rechnungen mit Parameter-abhängigen Integralen bestimmt werden. Dies wird (zumindest teilweise) in den Übungen diskutiert.

## 5.4 Integral-Mittelwerte und -Ungleichungen

In diesem Abschnitt werden Resultate zusammengetragen, die Integral-Mittelwerte betreffen.

**Satz (Mittelwertsätze der Integralrechnung).**

- (I) **(Erster) Mittelwertsatz:** Für  $a < b$  in  $\mathbb{R}$  sei  $f: ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  eine **stetige** Funktion. Konvergiert  $\int_a^b f$  in  $\mathbb{R}$ , so gibt es eine Zwischenstelle  $\xi \in ]a, b[$  mit

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f.$$

- (II) **Zweiter/verallgemeinerter Mittelwertsatz:** Seien  $-\infty \leq a < b \leq \infty$ ,  $f: ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  eine **stetige** Funktion und  $\gamma: ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  eine **nicht-negative** Funktion, die über alle kompakten Teilintervalle von  $]a, b[$  Riemann-integrierbar ist. Konvergieren  $\int_a^b (f\gamma)$  und  $\int_a^b \gamma$  in  $\mathbb{R}$ , so gibt es eine Zwischenstelle  $\xi \in ]a, b[$  mit

$$f(\xi) \int_a^b \gamma = \int_a^b (f\gamma).$$

Der erste Mittelwertsatz ist dabei im zweiten als Spezialfall  $\gamma \equiv 1$  enthalten. Die Benennung beider Sätze als Mittelwertsätze erfolgt wegen des Auftretens des Integral-Mittelwerts  $\frac{1}{b-a} \int_a^b f$  von  $f$  und des gewichteten Integral-Mittelwerts  $(\int_a^b \gamma)^{-1} \int_a^b (f\gamma)$  von  $f$  zur Gewichtsfunktion  $\gamma$  (letzterer tritt im Fall  $\int_a^b \gamma > 0$  nach Umformung auf).

Beweisen kann man die Mittelwertsätze durch eine einfache Anwendung des Zwischenwertsatzes; man vergleiche mit der Vorlesung.

**Bemerkung.** Ein weiteres Resultat, das manchmal als **dritter Mittelwertsatz** der Integralrechnung bezeichnet wird, besagt: Ist  $f: ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  über jedes kompakte Teilintervall von  $]a, b[$  Riemann-integrierbar, ist  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  monoton, und konvergiert  $\int_a^b f$  absolut, so konvergiert auch  $\int_a^b (fg)$  absolut, und es gibt eine Zwischenstelle  $\eta \in [a, b]$  mit

$$\int_a^b (fg) = g(a) \int_a^\eta f + g(b) \int_\eta^b f.$$

Im Gegensatz zu den vorigen Sätzen kann die Zwischenstelle  $\eta$  hier aber nicht unbedingt im Intervall-Inneren  $]a, b[$  gewählt werden.

Der Beweis des dritten Mittelwertsatzes ähnelt dem der Abel- und Dirichlet-Konvergenzkriterien. Bei stetigem  $f$  und stetig differenzierbarem  $g$  kann man über partielle Integration und eine Anwendung der zweiten Mittelwertsatzes argumentieren. Um den allgemeinen Fall zu erhalten, geht man aber besser so vor, dass man zunächst monotone Treppenfunktionen  $g$  über Rechnen mit endlichen Summen und den Zwischenwertsatz abhandelt; für beliebige monotone  $g$  folgt die Behauptung dann durch gleichmäßige Approximation.

**Bemerkung. Alle von Summen und Reihen bekannten Ungleichungen haben Analoga in der Integralrechnung:** Unter anderem gelten für  $-\infty \leq a < b \leq \infty$  (sobald die auftretenden Integrale existieren und endlich sind) ...

- die **Hölder-Ungleichung**

$$\left| \int_a^b (uv) \right| \leq \left( \int_a^b |u|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_a^b |v|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

für Funktionen  $u, v: ]a, b[ \rightarrow \mathbb{K}$  und konjugierte Exponenten  $p, q \in ]1, \infty[$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ,

- die **Mittelwert-Ungleichungen** zwischen dem geometrischen Integral-Mittelwert und den Potenz-Integral-Mittelwerten

$$\exp\left(\int_a^b (\gamma \log f)\right) \leq \left(\int_a^b (\gamma f^r)\right)^{\frac{1}{r}} \leq \left(\int_a^b (\gamma f^s)\right)^{\frac{1}{s}},$$

für eine nicht-negative (hierbei gemittelte) Funktion  $f: ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ , eine nicht-negative Gewichtsfunktion  $\gamma$  mit  $\int_a^b \gamma = 1$  und positive Exponenten  $r < s$  in  $\mathbb{R}_{>0}$ .

Den Zusammenhang zwischen diesen Ungleichungen und den entsprechenden Ungleichungen für endliche Summen und Mittelwerte endlicher Tupel erkennt man, indem man sie auf Treppenfunktionen  $u, v$  und  $f$  spezialisiert (bei  $\gamma$  ist dies nicht nötig). Beispielsweise geht, wenn für  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  konstante Werte  $f \equiv c_i$  auf  $]x_{i-1}, x_i[$  vorliegen und  $\gamma_i := \int_{x_{i-1}}^{x_i} \gamma$  abgekürzt wird, das linke Integral bei den Mittelwert-Ungleichungen in das bekannte gewichtete geometrische Mittel  $\exp \sum_{i=1}^n \gamma_i \log c_i = \prod_{i=1}^n c_i^{\gamma_i}$  von  $c_1, c_2, \dots, c_n$  über.

Zum Beweis der Hölder-Ungleichung, ohne Einschränkung nur im eigentlichen Fall, fixiert man  $\varepsilon > 0$  und findet gemäß Definition des Integrals Oberfunktionen  $\hat{u}$  zu  $|u|^p$  und  $\hat{v}$  zu  $|v|^q$  mit  $I_a^b(\hat{u}) < \int_a^b |u|^p + \varepsilon$  und  $I_a^b(\hat{v}) < \int_a^b |v|^q + \varepsilon$ . Für eine geeignete Zerlegung  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  gelten  $\hat{u} \equiv u_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  und  $\hat{v} \equiv v_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  auf  $]x_{i-1}, x_i[$ . Mit der Oberfunktion  $\hat{u}^{1/p} \hat{v}^{1/q}$  zu  $|uv|$  und der Hölder-Ungleichung für Summen erhält man

$$\begin{aligned} \int_a^b |uv| &\leq \sum_{i=1}^n [u_i(x_i - x_{i-1})]^{\frac{1}{p}} [v_i(x_i - x_{i-1})]^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n u_i(x_i - x_{i-1})\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n v_i(x_i - x_{i-1})\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\int_a^b |u|^p + \varepsilon\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |v|^q + \varepsilon\right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Wegen Beliebigkeit von  $\varepsilon > 0$  folgt  $\int_a^b |uv| \leq \left(\int_a^b |u|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |v|^q\right)^{\frac{1}{q}}$ , und die Behauptung ergibt sich per Dreiecksungleichung.

Bei den Mittelwert-Ungleichungen kann man die rechte Ungleichung durch Anwendung der Hölder-Ungleichung (mit  $u = \gamma^{r/s} f^r$ ,  $v = \gamma^{1-r/s}$ ,  $p = \frac{s}{r}$ ) erhalten. Ein Beweis der linken Ungleichung wird technisch etwas komplizierter (zumindest, wenn man keine zusätzliche Voraussetzung wie etwa die, dass  $f$  und  $\gamma$  Regelfunktionen sind, machen möchte). Eine Möglichkeit sei hier angedeutet: Ohne Einschränkung seien die betrachteten Integrale eigentlich und  $f$  beschränkt. Man betrachtet für  $n \in \mathbb{N}$  die äquidistanten Stellen  $x_{i,n} := a + \frac{i}{n}(b-a)$ , beliebige Zwischenstellen  $\xi_{i,n} \in ]x_{i-1,n}, x_{i,n}[$  und die Gewichte  $\gamma_{i,n} := \int_{x_{i-1,n}}^{x_{i,n}} \gamma$  mit  $\sum_{i=1}^n \gamma_{i,n} = 1$ . Als Spezialfall der Ungleichungen zwischen Mittelwerten endlicher vieler Zahlen erhält man dann

$$\exp \sum_{i=1}^n \gamma_{i,n} \log f(\xi_{i,n}) \leq \left(\sum_{i=1}^n \gamma_{i,n} f(\xi_{i,n})^r\right)^{\frac{1}{r}}$$

(wobei die linke Summe nichts anderes ist als das geometrische Mittel  $\prod_{i=1}^n f(\xi_{i,n})^{\gamma_{i,n}}$ ). Jetzt verwendet man ein bisher noch nicht behandeltes Prinzip, nämlich die Konvergenz beliebiger Zwischen-Summen gegen das Integral bei gegen Null gehender Feinheit der Intervall-Zerlegung. Dieses Prinzip gibt die Konvergenzen  $\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \gamma(\xi_{i,n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b \gamma = \sum_{i=1}^n \gamma_{i,n}$  und  $\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \gamma(\xi_{i,n}) \log f(\xi_{i,n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b (\gamma \log f)$ , aus denen man auf  $\sum_{i=1}^n \gamma_{i,n} \log f(\xi_{i,n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b (\gamma \log f)$  schließt (Beschränktheit von  $f$  beim letzten Schluss verwendet). Also konvergieren die endlichen geometrischen Mittel gegen das geometrische Integral-Mittel auf der linken Seite der Behauptung. Analog erhält man Konvergenz bei den Potenz-Mittelwerten zum Exponenten  $r$ , daher folgt die behauptete Ungleichung.

Allgemeinere Versionen aller Ungleichungen ergeben sich in der höheren Analysis (mit anderer Integrationstheorie).

## 5.5 Integrale und Reihen

Ein grundlegender und anschaulich plausibler Zusammenhang zwischen Reihen und uneigentlichen Integralen wird hergestellt durch:

**Satz (Integral-Kriterium für die Konvergenz von Reihen Integralen).** Seien  $m \in \mathbb{Z}$  und eine nicht-negative, monoton fallende Funktion  $f: [m, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  gegeben. Dann gilt

$$\sum_{k=m}^{\infty} f(k+1) \leq \int_m^{\infty} f \leq \sum_{k=m}^{\infty} f(k).$$

Insbesondere bedeutet dies

$$\int_m^\infty f < \infty \iff \sum_{k=m}^\infty f(k) < \infty,$$

also konvergiert  $\int_m^\infty f$  genau dann, wenn  $\sum_{k=m}^\infty f(k)$  konvergiert.

Zum Beweis des Satzes beobachtet man  $\sum_{k=m}^{\lfloor \beta \rfloor - 1} f(k+1) \leq \int_m^\beta f \leq \sum_{k=m}^{\lfloor \beta \rfloor} f(k)$  für  $\beta \in ]m, \infty[$  und macht den Grenzübergang  $\beta \rightarrow \infty$ .

**Bemerkungen** (zum Integral-/Reihen-Kriterium).

- (1) Man kann das Kriterium als Erklärung für viele Übereinstimmungen im Konvergenzverhalten von Reihen und Integralen ansehen, zum Beispiel dafür, dass die Reihe  $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^s}$  und das uneigentliche Integral  $\int_1^\infty \frac{1}{x^s} dx$  beide genau für  $s > 1$  konvergieren.
- (2) Das Kriterium gilt **nicht ohne Monotonie** von  $f$ ; dies zeigen Beispiele wie  $f(x) = |\sin(\pi x)|$ . Bei (notwendigerweise nicht-monotonen) Funktionen  $f$  mit unendlich vielen Vorzeichenwechseln wie  $f(x) = \sin(2\pi x)$  kann sogar  $\sum_{k=m}^\infty \int_k^{k+1} f$  konvergieren, ohne dass  $\int_m^\infty f$  konvergiert.

Der nächste Satz stellt einen noch deutlich engeren Zusammenhang zwischen (Partial-)Summen (von Reihen) und Integralen her.

**Satz (Euler-MacLaurin-Summenformel).** Für  $m < n$  in  $\mathbb{Z}$  und  $q \in \mathbb{N}$  sei  $f: [m, n] \rightarrow \mathbb{K}$  eine Funktion der Klasse  $C^q$  (in den Randpunkten  $m$  und  $n$  reicht Existenz und stetige Annahme der einseitigen Ableitungen bis zur Ordnung  $q-1$ ). Dann gilt

$$\frac{f(m)}{2} + \frac{f(n)}{2} + \sum_{k=m+1}^{n-1} f(k) = \int_m^n f + \sum_{j=1}^{\lfloor q/2 \rfloor} \frac{b_{2j}}{(2j)!} f^{(2j-1)} \Big|_m^n + \frac{(-1)^{q-1}}{q!} \int_m^n B_q(x - [x]) f^{(q)}(x) dx,$$

wobei  $b_i$  die  $i$ -te Bernoulli-Zahl,  $B_q$  das  $q$ -te Bernoulli-Polynom bezeichnet; siehe Abschnitt 1.4.

**Bemerkungen** (zur Euler-MacLaurin-Formel).

- (1) Die Summe auf der linken Seite der Euler-MacLaurin-Formel kann man als **Näherungssumme an das Integral**  $\int_m^n f$  auf der rechten Seite interpretieren. Tatsächlich ergibt sich die Summe gemäß der **Trapezregel**, bei der man für jedes  $k \in \{m, m+1, m+2, \dots, n-1\}$  das Teilintegral  $\int_k^{k+1} f$  durch den orientierten Flächeninhalt  $\frac{f(k)}{2} + \frac{f(k+1)}{2}$  des Trapezes mit Eckpunkten  $(k, 0)$ ,  $(k+1, 0)$ ,  $(k+1, f(k+1))$ ,  $(k, f(k))$  annähert. Die zusätzlichen Terme auf der rechten Seite kann man als **Korrekturterme** verstehen, die den bei dieser Näherung gemachten Fehler sehr präzise beschreiben. Der Parameter  $q \in \mathbb{N}$  ist dabei frei wählbar; größere  $q$  geben (tendenziell) eine genauere Beschreibung des Fehlers durch die Summe mit den Bernoulli-Zahlen und einen kleineren Wert des Integrals mit dem Bernoulli-Polynom.
- (2) Aus der Summenformel lassen sich ganz verschiedene Sachverhalte ablesen. Wendet man sie für  $m = 0$  und  $f(x) = x^q$  an, so verschwindet das Restintegral, und es ergibt sich die allgemeine Potenzsummen-Formel des Abschnitts 1.4. Eine andere interessante Anwendung, die auf der Wahl  $f(x) = \log x$  beruht, wird im Folgenden behandelt.

Zum Herleitung der Summenformel kann man das folgende Lemma verwenden, das man problemlos durch  $q$ -fache partielle Integration erhält.

**Lemma.** Sei  $(p_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$  eine Familie von Polynomen mit  $p'_i = ip_{i-1}$  für alle  $i \in \mathbb{N}$  und  $p_0 \equiv 1$ . Dann gilt für  $q \in \mathbb{N}$  und eine  $C^q$ -Funktion  $f: I \rightarrow \mathbb{K}$  auf einem Intervall  $I$  die Identität

$$\int f = \sum_{i=1}^q \frac{(-1)^{i-1}}{i!} p_i f^{(i)} + \frac{(-1)^q}{q!} \int (p_q f^{(q)}).$$

Zum Beweis der Summenformel wendet man dieses Lemma mit (verschobenen) Bernoulli-Polynomen  $p_i(x) = B_i(x-k)$  auf die bestimmte Integration von  $k$  bis  $k+1$  an. Unter Rückgriff auf Eigenschaften der Bernoulli-Zahlen und -Polynome ( $B_1(0) = -\frac{1}{2}$ ,  $B_1(1) = \frac{1}{2}$ ,  $B_i(0) = B_i(1) = b_i$  für  $i \geq 2$  und  $b_j = 0$  für ungerade  $j \geq 3$ ) und nach Summation über  $k \in \{m, m+1, m+2, \dots, n-1\}$  ergibt sich die Summenformel. Genauer wird dies in der Vorlesung erläutert.

Jetzt folgt die oben angekündigte Anwendung.

**Satz (Stirlingsche Formel für das Wachstum der Fakultäten).** Bei  $\mathbb{N} \ni n \rightarrow \infty$  verhalten sich die **Fakultäten  $n!$  asymptotisch gleich zu  $\frac{n^n}{e^n} \sqrt{n}$** , das heißt, der Limes

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\frac{n^n}{e^n} \sqrt{n}} =: C \in \mathbb{R}_{>0}$$

existiert in  $\mathbb{R}_{>0}$ . Die hierdurch definierte Stirlingsche Konstante  $C$  hat den Wert  $\sqrt{2\pi}$ , und für jedes  $n \in \mathbb{N}$  gilt die Stirlingsche Formel mit Fehlerterm

$$n! = \sqrt{2\pi} \frac{n^n}{e^n} \sqrt{n} \exp\left(\frac{\vartheta_n}{12n}\right) \quad \text{für ein } \vartheta_n \in [0, 1].$$

**Bemerkung** (zur Stirlingschen Formel). In den Übungen zur Analysis I wurde durch Induktion nach  $n \in \mathbb{N}$  die (gar nicht so schlechte) Abschätzung  $e \frac{n^n}{e^n} \leq n! \leq e \frac{n^n}{e^n} n$  bewiesen. Die Stirlingsche Formel verbessert und präzisiert diese Abschätzung wesentlich.

Ein Beweis der Stirlingschen Formel gelingt durch Anwendung der Euler-MacLaurin-Formel mit  $m = 1$ ,  $f(x) = \log x$  und  $q = 3$ . Genauer erhält man hieraus zunächst die Existenz des Limes und damit der Konstanten  $C$ , zur expliziten Bestimmung von  $C$  geht dann ein Hilfsresultat (z.B. Wert des Wallis-Produkts) ein, die Größe des Fehlerterms kann man wieder aus der Euler-MacLaurin-Formel (und Eigenschaften von  $B_3$ ) ablesen. Details zu dieser Argumentation werden in der Vorlesung ausgeführt.

Schließlich bietet sich im vorliegenden Kontext noch ein Nachtrag zur in Abschnitt 4.4 behandelten Theorie der Taylor-Entwicklung an.

**Satz (Satz von Taylor; quantitative Form mit Integral-Restglied).** Seien  $a, x \in \mathbb{R}$ , sei  $m \in \mathbb{N}$ , und sei  $f: [a, x] \rightarrow \mathbb{K}$  beziehungsweise  $f: [x, a] \rightarrow \mathbb{K}$  eine Funktion der Klasse  $C^{m+1}$  (in den Randpunkten  $a$  und  $x$  reicht Existenz und stetige Annahme der einseitigen Ableitungen bis zur Ordnung  $m$ ). Dann hat das Restglied  $R_a^m f(x)$  in der Taylor-Formel  $f(x) = T_a^m f(x) + R_a^m f(x)$  die Integral-Darstellung

$$R_a^m f(x) = \frac{1}{m!} \int_a^x (x-y)^m f^{(m+1)}(y) dy = \frac{(x-a)^{m+1}}{m!} \int_0^1 (1-t)^m f^{(m+1)}(a+t(x-a)) dt,$$

wobei die beiden angegebenen Integrale durch Substitution  $y = a+t(x-a)$  ineinander übergehen.

Zum Beweis wendet man das Lemma dieses Abschnitts mit den Polynomen  $p_i(y) = (y-x)^i$ , mit  $q = m$  und  $f'$  anstelle von  $f$  auf die bestimmte Integration von  $a$  bis  $x$  an (ohne Einschränkung nur für  $x > a$ ). Die behauptete Restglied-Formel folgt problemlos.

**Bemerkung** (zur Integral-Form des Taylor-Restglieds). Aus der vorausgehenden Formel lassen sich die aus Abschnitt 4.4 bekannten Restglied-Formeln und -Abschätzungen mit dem verallgemeinerten Mittelwertsatz beziehungsweise Schrankensatz für Integrale recht einfach folgern. Die präzisere Darstellung des Restglieds in der Integral-Form ist aber gelegentlich nützlich.

## 5.6 Ausblick: Allgemeinere Integralbegriffe

Zum Abschluss des Kapitels über Integralrechnung wird ein kurzer, oberflächlicher und unvollständiger Ausblick auf Verallgemeinerungen der behandelten Riemannschen Integrationstheorie gegeben. Genauer zu den erwähnten (oder diesen überlegenen) Konzepten folgt erst in der höheren Analysis.

**Ausblick** (zu weitgehenden Verallgemeinerungen des Integralbegriffs).

- (1) Für  $a < b$  in  $\mathbb{R}$  und eine beliebige **monotone** Funktion  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  wird das **Riemann-Stieltjes-Integral** zu  $g$  wie folgt eingeführt: Man definiert das elementare Integral

$$I_a^b(f dg) := \sum_{i=1}^n c_i [g(x_i) - g(x_{i-1})]$$

für Zerlegungen  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$  von  $[a, b]$  und zunächst nur für solche Treppenfunktionen  $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $h \equiv c_i$  auf  $]x_{i-1}, x_i[$ , die in allen Unstetigkeitsstellen von  $g$  stetig sind<sup>2</sup>. Wie in Abschnitt 5.1 erklärt man dann das Ober-/Unterintegral von  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  durch Infimum-/Supremumbildung über die elementaren Integrale  $I_a^b(h dg)$  solcher Ober-/Unterfunktionen  $h$ , die in den Unstetigkeitsstellen von  $g$  stetig sind. Stimmen Ober- und Unterintegral überein, so nennt man  $f$  Riemann-Stieltjes-integrierbar und den gemeinsame Wert das Riemann-Stieltjes-Integral  $\int_a^b f(x) dg(x) = \int_a^b f dg$  von  $f$  (bezüglich  $g$ ). Wie in Abschnitt 5.1 führt man auch hier das Integral  $\mathbb{C}$ -wertiger Funktionen  $f$  auf den reellen Fall zurück. Der so eingeführte Integralbegriff ...

- reduziert sich im Fall  $g(x) = x$  auf das „normale“ Riemann-Integral;
- lässt sich für (stückweise)  $C^1$ -Funktionen  $g$  (mit endlich vielen Knick-, aber keinen Unstetigkeitsstellen) auf das „normale“ Riemann-Integral zurückführen, denn dann gilt

$$\int_a^b f dg = \int_a^b (fg');$$

<sup>2</sup>Die Stetigkeitsforderung an Treppenfunktionen  $h$  erklärt sich daraus, dass das Riemann-Stieltjes-Integral zu Punktauswertungen in den Unstetigkeitsstellen von  $g$  führt und führen soll. Arbeitet man (ohne Einschränkung) mit rechtsseitig stetigem  $g$ , so kann man nur linksseitige Stetigkeit von  $h$  in den Unstetigkeitsstellen fordern (wie sie bei Treppenfunktion  $h$  mit  $h \equiv c_i$  auf halboffenen Intervallen  $]x_{i-1}, x_i]$  automatisch vorliegt) und den Integralbegriff dadurch etwas verallgemeinern. Analog kann man bei linksseitig stetigem  $g$  mit rechtsseitig stetigem  $h$  arbeiten. Ein noch etwas allgemeineres Riemann-Stieltjes-Integral erhält man, wenn man jede Stetigkeitsforderung an  $g$  und  $h$  fallen lässt und dafür die Summanden  $c_i [g(x_i) - g(x_{i-1})]$  in der Definition des elementaren Integrals durch die Terme

$$h(x_i)[g(x_i) - g(x_i-)] + c_i [g(x_i-) - g(x_{i-1}+)] + h(x_{i-1})[g(x_{i-1}+) - g(x_{i-1})]$$

ersetzt, die auch die Einzel-Werte  $h(x_i)$  berücksichtigen.

- liefert für monotone Funktionen  $g$  mit **Sprungstellen** wie  $g_{x_0}(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq x_0 \\ 1 & \text{für } x > x_0 \end{cases}$  mit  $x_0 \in \mathbb{R}$  einen **ganz anderen Integralbegriff**, bei dem für  $a \leq x_0 < b$  genau die an der Stelle  $x_0$  stetigen Funktionen  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$  integrierbar sind mit

$$\int_a^b f \, dg_{x_0} = f(x_0);$$

man spricht bei Integralen, die sich derart auf eine Punktauswertung reduzieren, auch von **Dirac-Integralen**.

Bei den genannten Punkten handelt es sich aber nur um spezielle Fälle, denn  $g$  kann ja eine beliebige monotone Funktion, sogar eine so verquere wie die Cantor-Funktion, sein.

- (2) Das **Lebesgue-Integral** wird in der höheren Analysis im Rahmen einer allgemeinen Maß- und Integrationstheorie eingeführt und verallgemeinert das Riemann-Integral. Es stellt sich heraus, dass (eigentlich) Riemann-integrierbare Funktionen auch (eigentlich) Lebesgue-integrierbar sind und das Lebesgue-Integral solcher Funktionen denselben Wert hat wie ihr Riemann-Integral. Tatsächlich sind aber noch viele weitere Funktionen wie zum Beispiel die Dirichletsche Funktion  $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$  Lebesgue-integrierbar, was für die Rechenpraxis irrelevant ist, sich später aber als extrem vorteilhaft für die Theorie erweisen wird. Der Hauptgrund für die Verbesserung liegt darin, dass schon das Lebesguesche Elementar-Integral viel allgemeiner ist als das Riemannsche, und tatsächlich ist  $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$  in der Lebesgueschen Theorie eine Funktion, die *elementar* integrierbar ist (übrigens mit Integral Null über jedes Intervall).

Weitere Konzepte, die sich im Rahmen der Lebesgueschen Integrationstheorie sehr allgemein und natürlich ergeben, sind das **Lebesgue-Stieltjes-Integral** (das das Riemann-Stieltjes-Integral verallgemeinert und systematisiert), die **Integration von Funktionen in zwei oder mehr Variablen** und das **allgemeine Maßintegral**.

Genauer hierzu ist, wie bereits angekündigt, ein Hauptthema der höheren Analysis.



## Kapitel 6

# Metrische und topologische Konzepte, allgemeine stetige Funktionen

Bisher wurden in der Vorlesung (fast ausschließlich) Funktionen auf Definitionsbereichen in  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  sowie mit Werten in  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  untersucht. Im Folgenden soll sich dies ändern, und es sollen — zumindest vorübergehend — recht allgemeine Definitions- und Wertebereiche  $\mathcal{X}$  zugelassen werden. Die nächsten Abschnitte beschäftigen sich daher mit „Räumen“  $\mathcal{X}$ , die hierfür in Frage kommen.

### 6.1 Metrische und normierte Räume

Der Abschnitt beginnt mit **zwei fundamentalen Definitionen**, die in fast jedem Teilgebiet der Mathematik eine Rolle spielen:

**Definition (Metriken, metrische Räume).** Seien  $\mathcal{X}$  eine Menge und  $d: \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Abbildung. Dann heißen  $d$  eine **Metrik** auf  $\mathcal{X}$  und das Paar  $(\mathcal{X}, d)$  ein **metrischer Raum**, wenn folgende drei Axiome erfüllt sind:

- (I) **(Strikte) Positivität:**  $d(x, y) \geq 0$  für alle  $x, y \in \mathcal{X}$  mit Gleichheit genau im Fall  $x = y$ ;
- (II) **Symmetrie:**  $d(x, y) = d(y, x)$  für alle  $x, y \in \mathcal{X}$ ;
- (III) **Dreiecksungleichung:**  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  für alle  $x, y, z \in \mathcal{X}$ .

**Definition (Normen, normierte Räume).** Seien  $\mathcal{X}$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und  $\|\cdot\|: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Abbildung. Dann heißen  $\|\cdot\|$  eine **Norm** auf  $\mathcal{X}$  und das Paar  $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$  ein **normierter Raum** über  $\mathbb{K}$ , wenn folgende drei Axiome erfüllt sind:

- (I) **(Strikte) Positivität:**  $\|x\| \geq 0$  für alle  $x \in \mathcal{X}$  mit Gleichheit genau im Fall  $x = 0_{\mathcal{X}}$ ;
- (II) **Dreiecksungleichung:**  $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$  für alle  $x, y \in \mathcal{X}$ ;
- (III) **(Absolut-)Homogenität:**  $\|sx\| = |s| \|x\|$  für alle  $x \in \mathcal{X}$  und  $s \in \mathbb{K}$ .

Zahlreiche Erläuterungen und Beispiele hierzu folgen.

**Bemerkungen** (zu metrischen und normierten Räumen).

- (0) Statt des Paares  $(\mathcal{X}, d)$  beziehungsweise  $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$  bezeichnet man sehr oft auch  $\mathcal{X}$  allein als metrischen beziehungsweise normierten Raum. Diese weniger genaue Sprechweise ist dadurch gerechtfertigt, dass sich die Wahl der Metrik beziehungsweise Norm meist aus dem Kontext erschließt und/oder es eine Standard-Wahl  $d_{\mathcal{X}}$  beziehungsweise  $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$  gibt.
- (1) Bei einer **Metrik**  $d$  stellt man sich  $d(x, y)$  als **Abstand zweier Punkte**  $x$  und  $y$  vor, bei einer **Norm**  $\|\cdot\|$  interpretiert man  $\|x\|$  als **Länge des Vektors**  $x$ .
- (2) **Jede Norm**  $\|\cdot\|$  auf  $\mathcal{X}$  **induziert eine Metrik**  $d$  auf  $\mathcal{X}$  und auf jeder beliebigen Teilmenge von  $\mathcal{X}$  durch die Festlegung des Abstands zweier Punkte als Länge des Verbindungsvektors, das heißt durch

$$d(x, y) := \|y - x\| \quad \text{für } x, y \in \mathcal{X}.$$

In diesem Sinne **ist jeder normierte Raum und jede Teilmenge eines normierten Raums ein metrischer Raum**.

- (3) Umgekehrt wird *nicht* jede Metrik auf einem  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $\mathcal{X}$  von einer Norm induziert. Tatsächlich sind die Metriken  $d$ , die von einer Norm herrühren, genau die, die mit der linearen Struktur von  $\mathcal{X}$  in dem Sinne verträglich sind, dass

$$d(sx, sy) = |s|d(x, y) \quad \text{und} \quad d(x+z, y+z) = d(x, y) \quad \text{für alle } x, y, z \in \mathcal{X} \text{ und } s \in \mathbb{K}$$

gelten. Ist eine solche Metrik  $d$  gegeben, so erhält man die sie induzierende Norm  $\|\cdot\|$  natürlich aus  $\|x\| = d(x, 0_{\mathcal{X}})$  für  $x \in \mathcal{X}$ .

**Beispiele** (von Normen und normierten Räumen). Es folgen **wichtige Standard-Beispiele** von Normen und **normierten Räumen**. Beliebige Teilmengen der genannten Räume liefern gemäß Bemerkung 2 **auch Beispiele für metrische Räume**.

- (0) Die wohl einfachste Norm ist die Betragsfunktion auf  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ .
- (1) Übliche **Normen auf  $\mathbb{R}^N$  und  $\mathbb{C}^N$**  mit  $N \in \mathbb{N}$  sind die  **$p$ -Normen**  $|\cdot|_p$ , die durch

$$|x|_p := \left( \sum_{i=1}^N |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{für } x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{K}^N \text{ und } p \in [1, \infty[$$

sowie

$$|x|_{\infty} := \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_N|\} \quad \text{für } x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{K}^N$$

definiert werden. Mit Hilfe dieser Normen kann die **Hölder-Ungleichung für Summen** in der Form

$$\left| \sum_{i=1}^N x_i y_i \right| \leq |x|_p |y|_q \quad \text{für konjugierte Exponenten } p, q \in [1, \infty] \text{ mit } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

ausgedrückt werden (wobei natürlich  $[1, \infty] = \mathbb{R}_{\geq 1} \cup \{\infty\}$ ,  $\frac{1}{\infty} = 0$ ,  $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{K}^N$  und  $y = (y_1, \dots, y_N) \in \mathbb{K}^N$  zu verstehen ist). Die Hölder-Ungleichung kann man übrigens auch verwenden, um die Dreiecksungleichung für  $|\cdot|_p$  (dies ist hier das einzige nicht-triviale Norm-Axiom) zu verifizieren: Für  $x, y \in \mathbb{K}^N$ ,  $x+y \neq 0$  und  $p \in ]1, \infty[$  schätzt man dazu

$|x+y|_p^p \leq \sum_{i=1}^N |x_i+y_i|^{p-1}|x_i| + \sum_{i=1}^N |x_i+y_i|^{p-1}|y_i| \leq |x+y|_p^{p-1}|x|_p + |x+y|_p^{p-1}|y|_p$  ab (wobei im zweiten Schritt die Hölder-Ungleichung mit den Exponenten  $p/(p-1)$  und  $p$  verwendet wurde) und erhält die Behauptung nach Division durch  $|x+y|_p^{p-1}$ . Im Fall  $p \in \{1, \infty\}$  gilt die Dreiecksungleichung trivial.

**Falls nichts anderes gesagt wird, verwendet man auf  $\mathbb{R}^N$  oder  $\mathbb{C}^N$  stets die 2-Norm.** Man schreibt auch nur  $|\cdot|$  für  $|\cdot|_2$  und nennt  $|\cdot|$  die **Euklidische Norm** auf  $\mathbb{K}^N$  sowie  $|x| = |x|_2$  den **Betrag des Vektors**  $x \in \mathbb{K}^N$ , denn  $|x|$  entspricht nach dem Satz des Pythagoras der **elementargeometrischen Länge** von  $x$ .

(2) Der **Raum der  $p$ -summierbaren Folgen** über  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  wird für  $p \in [1, \infty[$  definiert als

$$\ell^p = \ell^p(\mathbb{K}) := \left\{ (x_i)_{i \in \mathbb{N}} : (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \text{ ist Folge in } \mathbb{K} \text{ mit } \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty \right\}.$$

Dieser **unendlich-dimensionale (!) Folgenraum** wird zu einem normierten Raum mit der  **$\ell^p$ -Norm**

$$\|x\|_{\ell^p} := \left( \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{für } x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \ell^p.$$

Für  $p = \infty$  kann man als Analoga den Raum  $\ell^\infty = \ell^\infty(\mathbb{K})$  aller beschränkten Folgen in  $\mathbb{K}$  und den Raum  $c_0 = c_0(\mathbb{K})$  aller Nullfolgen in  $\mathbb{K}$  betrachten, die beide durch die  $\ell^\infty$ -Norm  $\|x\|_{\ell^\infty} := \sup\{|x_i| : i \in \mathbb{N}\}$  normiert werden. Mit diesen Notationen gilt die **Hölder-Ungleichung für Reihen**

$$\left| \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i \right| \leq \|x\|_{\ell^p} \|y\|_{\ell^q} \quad \text{für } x \in \ell^p, y \in \ell^q \text{ und } p, q \in [1, \infty] \text{ mit } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

(3) Für  $a < b$  in  $\mathbb{R}$  sei  $R([a, b], \mathbb{K})$  der Raum der Regelfunktionen  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ , die  $f(a) = f(a+)$ ,  $f(b) = f(b-)$  sowie  $f(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}$  für alle  $x \in ]a, b[$  erfüllen<sup>1</sup>, und  $C^0([a, b], \mathbb{K})$  sei der Raum der stetigen Funktionen  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ . Beide diese **Funktionsräume**  $R([a, b], \mathbb{K})$  und  $C^0([a, b], \mathbb{K})$  werden mit jeder der  **$L^p$ - (Integral-) Normen**

$$\|f\|_{L^p(a,b)} := \left( \int_a^b |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \in [1, \infty[,$$

zu normierten Räumen. Eine weitere (tatsächlich sehr natürliche) Norm auf  $R([a, b], \mathbb{K})$  und  $C^0([a, b], \mathbb{K})$  ist die  **$L^\infty$ - (Supremums-) Norm**  $\|f\|_{L^\infty(a,b)} := \sup_{]a,b[} |f|$ , und diese letzte Norm macht auch allgemeiner auf dem Raum  $B(]a, b[, \mathbb{K})$  aller beschränkten Funktionen  $]a, b[ \rightarrow \mathbb{K}$  Sinn. Die **Hölder-Ungleichung für Integrale** gilt in der Form

$$\left| \int_a^b (fg) \right| \leq \|f\|_{L^p(a,b)} \|g\|_{L^q(a,b)} \quad \text{für } f, g \in R([a, b], \mathbb{K}) \text{ und } p, q \in [1, \infty] \text{ mit } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

<sup>1</sup>Auf dem Raum aller Regelfunktionen oder dem Raum aller Riemann-integrierbaren Funktionen gibt die Definition von  $\|f\|_{L^p(a,b)}$  nur eine sogenannte Halbnorm, bei der  $\|f\|_{L^p(a,b)} = 0$  noch für andere Funktionen neben der Nullfunktion gilt (beispielsweise für Funktionen, die nur an endlich vielen Stellen von Null verschieden sind), aber ansonsten alle Norm-Axiome erfüllt sind. Dies ist der Grund für die Forderung der obigen Zusatzbedingungen, mit deren Hilfe man aus  $\|f\|_{L^p(a,b)} = 0$  tatsächlich auf  $f(x) = 0$  für alle  $x \in [a, b]$  schließen kann, so dass  $\|\cdot\|_{L^p(a,b)}$  eine echte Norm auf  $R([a, b], \mathbb{K})$  wird.

Viele Konzepte der Analysis machen auch in/auf metrischen oder normierten Räumen Sinn. Die Definitionen verlaufen dabei oft analog zu den in/auf  $\mathbb{K}$  bekannten und werden daher im Rahmen der folgenden Auflistung nur kurz diskutiert.

**Bemerkungen und Definitionen (zu/von Konzepten in metrischen Räumen).** Die folgende Konzepte machen in jedem metrischen Raum  $\mathcal{X}$  mit Metrik  $d_{\mathcal{X}}$ , insbesondere in jedem normierten Raum, Sinn:

- (1) Die **offene Kugel** und die **abgeschlossene Kugel** in  $\mathcal{X}$  mit „Mittelpunkt“  $x_0 \in \mathcal{X}$  und Radius  $r \in \mathbb{R}_{>0}$  werden definiert als

$$B_r(x_0) := \{x \in \mathcal{X} : d_{\mathcal{X}}(x, x_0) < r\} \quad \text{und} \quad \bar{B}_r(x_0) := \{x \in \mathcal{X} : d_{\mathcal{X}}(x, x_0) \leq r\}.$$

Die **Sphäre** in  $\mathcal{X}$  mit „Mittelpunkt“  $x_0 \in \mathcal{X}$  und Radius  $r \in \mathbb{R}_{>0}$  ist

$$S_r(x_0) := \bar{B}_r(x_0) \setminus B_r(x_0) = \{x \in \mathcal{X} : d_{\mathcal{X}}(x, x_0) = r\}.$$

Im Fall  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^2$  beziehungsweise  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^3$  mit der Euklidischen Norm handelt es sich bei  $B_r(x_0)$  und  $\bar{B}_r(x_0)$  tatsächlich um Kreisscheiben beziehungsweise Kugeln mit Mittelpunkt  $x_0$  und Radius  $r$  im elementargeometrischen Sinn, bei  $S_r(x_0)$  handelt es sich um die zugehörigen Kreislinien beziehungsweise Kugeloberflächen. Verwendet man auf  $\mathbb{R}^2$  eine  $p$ -Normen mit  $p \neq 2$ , so kann man sich die Kugeln  $B_r(x_0)$  als „ausgedellte“ (für  $2 < p < \infty$ ) oder „eingedellte“ (für  $1 < p < 2$ ) Kreisscheiben vorstellen, die schließlich in Quadrate mit achsenparallelen (für  $p = \infty$ ) oder diagonalen (für  $p = 1$ ) Seiten übergehen.

In einem allgemeinen metrischen Raum haben die Kugeln (noch viel) wenig(er) mit elementargeometrischen Kugeln gemein. Im Extremfall besteht  $\mathcal{X} = \{x_0\}$  aus nur einem Punkt, oder  $\mathcal{X}$  enthält einen sogenannten **isolierten Punkt**  $x_0$  (d.h. einen Punkt  $x_0$  mit  $\inf_{x \in \mathcal{X} \setminus \{x_0\}} d_{\mathcal{X}}(x, x_0) > 0$ ); dann ist tatsächlich  $B_r(x_0) = \{x_0\}$ ,  $S_r(x_0) = \emptyset$  für  $0 < r \ll 1$ .

- (2) Neben den Abständen  $d_{\mathcal{X}}(x, y)$  zweier Punkte  $x, y \in \mathcal{X}$  erklärt man auch ...

- den **Abstand**

$$\text{dist}(x, A) := \inf\{d_{\mathcal{X}}(x, y) : y \in A\} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

**eines Punktes**  $x \in \mathcal{X}$  **zu einer** nicht-leeren **Teilmenge**  $A$  von  $\mathcal{X}$ ;

- den **Abstand**

$$\text{dist}(A, B) := \inf\{d_{\mathcal{X}}(x, y) : x \in A, y \in B\} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

**zweier** nicht-leerer **Teilmengen**  $A$  und  $B$  von  $\mathcal{X}$ ;

- den **Durchmesser**

$$\text{diam } A := \sup\{d_{\mathcal{X}}(x, y) : x, y \in A\} \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$$

**einer Teilmenge** von  $\mathcal{X}$  (mit der Konvention  $\text{diam } \emptyset = 0$ ).

- (3) Die **Konvergenz von Folgen**  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{X}$  „in der Metrik“ wird durch die allgemeine Grenzwert-Definition des Abschnitts 3.1 erklärt, wobei man  $\mathcal{S}_x := \{B_{\varepsilon}(x) : \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\}$  als

Umgebungssysteme von  $x \in \mathcal{X}$  verwendet. Mit  $\varepsilon$  und  $\delta$  lässt sich die Konvergenz gegen einen Limes  $x \in \mathcal{X}$  dann durch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \text{ in } \mathcal{X} \iff \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}: \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}: d_{\mathcal{X}}(x_n, x) < \varepsilon$$

charakterisieren, sie kann aber auch durch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \text{ in } \mathcal{X} \iff \lim_{n \rightarrow \infty} d_{\mathcal{X}}(x_n, x) = 0$$

auf Folgenkonvergenz in  $\mathbb{R}$  zurückgeführt werden.

Auch im metrischen Kontext sind **konvergente Folgen**  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  übrigens **stets beschränkt** in dem Sinn, dass sie  $\sup_{n \in \mathbb{N}} d_{\mathcal{X}}(x_n, x_0) < \infty$  für jeden (Basis-)Punkt  $x_0 \in \mathcal{X}$  erfüllen.

Ähnlich kann man **Häufungswerte** von Folgen in  $\mathcal{X}$  verstehen.

- (4) **Grenzwerte von Funktionen**  $f: D \rightarrow \mathcal{Y}$  auf  $D \subset \mathcal{X}$  und mit Werten in einem weiteren metrischen Raum  $(\mathcal{Y}, d_{\mathcal{Y}})$  werden ebenfalls durch die Definition des Abschnitts 3.1 abgedeckt, wobei man sowohl in  $\mathcal{X}$  als auch in  $\mathcal{Y}$  standardmäßig Umgebungssysteme aus Kugeln verwendet. In der  $\varepsilon$ - $\delta$ -Formulierung lautet die ausgeschriebene Grenzwert-Definition zur Grenzstelle  $x_0 \in \mathcal{X}$  und zum (potentiellen) Grenzwert  $y_0 \in \mathcal{Y}$  dann

$$\begin{aligned} \lim_{D \ni x \rightarrow x_0} f(x) = y_0 \\ \iff \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}: \exists \delta \in \mathbb{R}_{>0}: \forall x \in D \setminus \{x_0\}: [d_{\mathcal{X}}(x, x_0) < \delta \implies d_{\mathcal{Y}}(f(x), y_0) < \varepsilon]. \end{aligned}$$

Der so definierte Grenzwert  $y_0$  ist eindeutig, sobald  $x_0$  kein isolierter Punkt von  $\mathcal{X}$  ist.

Auch der **Grenzübergang gegen den unendlich fernen Punkt**  $\infty_{\mathcal{X}}$  des metrischen Raums  $\mathcal{X}$  kann über das Umgebungssystem  $\mathcal{S}_{\infty_{\mathcal{X}}} := \{D \setminus \bar{B}_{1/\delta}(x_0) : \delta \in \mathbb{R}_{>0}\}$  von  $\infty_{\mathcal{X}}$  mit beliebig fixiertem  $x_0 \in \mathcal{X}$  erklärt werden. Man erhält für  $y_0 \in \mathcal{Y}$  die Charakterisierung

$$\lim_{D \ni x \rightarrow \infty_{\mathcal{X}}} f(x) = y_0 \iff \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}: \exists \delta \in \mathbb{R}_{>0}: \forall x \in D: [d_{\mathcal{X}}(x, x_0) > 1/\delta \implies d_{\mathcal{Y}}(f(x), y_0) < \varepsilon]$$

und kann sich im Nachhinein überlegen, dass Konvergenz und Limes tatsächlich nicht von der Wahl von  $x_0$  abhängen.

Zudem kann man natürlich auch Häufungswerte von Funktionen  $D \rightarrow \mathcal{Y}$  auf  $D \subset \mathcal{X}$  erklären.

- (5) **Stetigkeit von Funktionen**  $f: D \rightarrow \mathcal{Y}$  auf  $D \subset \mathcal{X}$  und mit Werten in einem weiteren metrischen Raum  $(\mathcal{Y}, d_{\mathcal{Y}})$  bedeutet nichts anderes als  $\lim_{D \ni x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  für alle  $a \in D$ , wobei die Grenzwerte im gerade diskutierten Sinn zu verstehen sind. Die Stetigkeit von  $f$  auf  $D$  wird charakterisiert durch die  $\varepsilon$ - $\delta$ -Bedingung

$$\forall a \in D: \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}: \exists \delta \in \mathbb{R}_{>0}: \forall x \in D: [d_{\mathcal{X}}(x, a) < \delta \implies d_{\mathcal{Y}}(f(x), f(a)) < \varepsilon].$$

- (6) Auch die Konzepte der **Hölder- und Lipschitz-Stetigkeit** machen für  $f: D \rightarrow \mathcal{Y}$  auf  $D \subset \mathcal{X}$  und einen weiteren metrischen Raum  $(\mathcal{Y}, d_{\mathcal{Y}})$  Sinn. Hölder-Stetigkeit von  $f$  zum Exponent  $s \in ]0, 1]$  auf  $D$  bedeutet

$$d_{\mathcal{Y}}(f(\tilde{x}), f(x)) \leq C d_{\mathcal{X}}(\tilde{x}, x)^s \quad \text{für alle } x, \tilde{x} \in D$$

mit einer festen Hölder-Konstante  $C \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Im Fall  $s = 1$  spricht man von Lipschitz-Stetigkeit und der Lipschitz-Konstante.

**Bemerkungen und Definitionen (zu/von Konzepten in normierten Räumen).** Folgende Konzepte machen für jeden normierten Raum  $\mathcal{X}$  über  $\mathbb{K}$  mit Norm  $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$  Sinn:

- (1) Für jedes  $x \in \mathcal{X} \setminus \{0_{\mathcal{X}}\}$  gibt es genau eine positive reelle Zahl  $r \in \mathbb{R}_{>0}$  mit  $\|rx\|_{\mathcal{X}} = 1$  und zwar  $r = \frac{1}{\|x\|_{\mathcal{X}}}$ . Man nennt  $rx = \frac{x}{\|x\|_{\mathcal{X}}}$  die **Normierung des Vektors**  $x$ .
- (2) Generell gelten die (verallgemeinerte) **Dreiecksungleichung**

$$\left\| \sum_{i=1}^n s_i x_i \right\|_{\mathcal{X}} \leq \sum_{i=1}^n |s_i| \|x_i\|_{\mathcal{X}} \quad \text{für } s_1, s_2, \dots, s_n \in \mathbb{K} \text{ und } x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathcal{X}$$

und die **umgekehrte Dreiecksungleichung**

$$\left| \|y\|_{\mathcal{X}} - \|x\|_{\mathcal{X}} \right| \leq \|y-x\|_{\mathcal{X}} \quad \text{für } x, y \in \mathcal{X}.$$

Daher ist **jede Norm**  $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  **Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante 1**.

- (3) Für konvergente Folgen  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  im normierten Raum  $\mathcal{X}$  und eine konvergente Folge  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{C}$  mit Grenzwerten  $x := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \mathcal{X}$ ,  $y := \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \in \mathcal{X}$  und  $s := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \in \mathbb{C}$  gelten die **Summen- und Faktorregeln**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = x + y \quad \text{in } \mathcal{X} \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n x_n) = s x \quad \text{in } \mathcal{X}.$$

- (4) **Zwei Normen**  $\|\cdot\|_1$  und  $\|\cdot\|_2$  **auf demselben  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $\mathcal{X}$**  kann man manchmal im Sinne des folgenden Konzepts **vergleichen**: Man nennt  $\|\cdot\|_1$  schwächer als  $\|\cdot\|_2$  (und dementsprechend  $\|\cdot\|_2$  stärker als  $\|\cdot\|_1$ ), wenn es eine Konstante  $C \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  mit  $\|x\|_1 \leq C\|x\|_2$  für alle  $x \in \mathcal{X}$  gibt. Ist  $\|\cdot\|_1$  sowohl schwächer als auch stärker als  $\|\cdot\|_2$ , gibt es also Konstanten  $C, c \in \mathbb{R}_{>0}$  mit  $c\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq C\|x\|_2$  für alle  $x \in \mathcal{X}$ , so spricht man von **äquivalenten Normen**  $\|\cdot\|_1$  und  $\|\cdot\|_2$  auf  $\mathcal{X}$ . Diese Terminologie ist sinnvoll — einerseits, weil Äquivalenz tatsächlich eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Normen auf  $\mathcal{X}$  ist, andererseits, weil **äquivalente Normen zu denselben Konzepten von Konvergenz, Grenzwerten und Stetigkeit führen**. (Kugeln und Hölder-/Lipschitz-Konstanten zu äquivalenten Normen können sich allerdings zu einem gewissen Grad unterscheiden.)
- (5) Im **endlich-dimensionalen Fall** zeigt der nächste Satz, dass man sich um die genaue Wahl der Norm nicht zu viele Gedanken machen muss:

**Satz (Äquivalenz aller Normen auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum).**

*Auf einem endlich-dimensionalen  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $\mathcal{X}$  (beispielsweise auf  $\mathbb{K}^N$ ) sind alle Normen äquivalent, und die Konvergenz einer Folge in  $\mathcal{X}$  in irgendeiner Norm auf  $\mathcal{X}$  ist äquivalent zu ihrer komponentenweisen Konvergenz bezüglich einer beliebigen Basis von  $\mathcal{X}$ .*

Dabei bedeutet komponentenweise Konvergenz einer Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{X}$  gegen einen Grenzwert  $x \in \mathcal{X}$  bezüglich einer  $\mathbb{K}$ -Basis  $e_1, e_2, \dots, e_N$  von  $\mathcal{X}$ , dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)_i = x_i$  für alle  $i \in \{1, 2, \dots, N\}$  gilt, wenn bei der Darstellung  $x_n = \sum_{i=1}^N (x_n)_i e_i$  und  $x = \sum_{i=1}^N x_i e_i$  in dieser Basis die (bekanntlich eindeutigen) Koeffizienten  $(x_n)_i \in \mathbb{K}$  und  $x_i \in \mathbb{K}$  auftreten.

Ein Beweis des Äquivalenz-Satzes wird in der Vorlesung geführt. Er verwendet neben elementaren Eigenschaften von Normen nur den Satz von Bolzano-Weierstraß.

- (6) Im **unendlich-dimensionalen Fall** dagegen gibt es stets inäquivalente Normen: Für die Folgenräume zu Exponenten  $1 \leq p < q \leq \infty$  gilt beispielsweise

$$\ell^p \subset \ell^q \quad \text{und} \quad \|\cdot\|_{\ell^q} \leq \|\cdot\|_{\ell^p} \text{ auf } \ell^p,$$

eine umgekehrte Abschätzung des Typs  $\|\cdot\|_{\ell^p} \leq C\|\cdot\|_{\ell^q}$  gilt aber *nicht*.

Schließlich wird noch ein Konzept der (bi)linearen Algebra angesprochen, das in enger Verbindung zu Normen steht.

**Definition (Skalarprodukte, Skalarprodukträume).** Sei  $\mathcal{X}$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum, und sei  $\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{K}$  eine Abbildung. Dann heißt  $\mathcal{X}$  ein (**reelles/komplexes**) **Skalarprodukt** auf  $\mathcal{X}$  und das Paar  $(\mathcal{X}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein **Skalarproduktraum** über  $\mathbb{K}$ , wenn die folgenden drei Axiome erfüllt sind, die sich im reellen und komplexen Fall leicht unterscheiden:

- (I) (**Positive**) **Definitheit:**  $\langle x, x \rangle \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  für alle  $x \in \mathcal{X}$  mit  $\langle x, x \rangle = 0$  genau wenn  $x = 0_{\mathcal{X}}$ ;
- (II) **Hermiteischheit:**  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$  für alle  $x, y \in \mathcal{X}$   
(reduziert sich im Fall  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  zu **Symmetrie:**  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$  für alle  $x, y \in \mathcal{X}$ );
- (III) **Bilinearität im Fall  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ :**  $\langle x, \cdot \rangle, \langle \cdot, y \rangle: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  mit festen  $x, y \in \mathcal{X}$  sind  $\mathbb{R}$ -linear;  
**Sesquilinearität im Fall  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ :**  $\langle \cdot, y \rangle: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{C}$  mit festem  $y \in \mathcal{X}$  ist  $\mathbb{C}$ -linear und  $\langle x, \cdot \rangle: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{C}$  mit festem  $x \in \mathcal{X}$  ist  $\mathbb{R}$ -linear.

Das lateinische ‚sesqui‘ bedeutet hierbei ‚anderthalb‘ und bezieht sich darauf, dass man aus dem hinteren Argument eines komplexen Skalarprodukts nur reelle, aber nicht allgemeine komplexe Faktoren herausziehen darf. In diesem hinteren Argument liegt also nur „Halb“-Linearität vor. Aus der  $\mathbb{C}$ -Linearität im ersten Argument und der Hermiteischheit folgt aber sofort, dass das Herausziehen solcher Faktoren doch möglich ist, wenn man sie gleichzeitig konjugiert, dass also  $\langle x, sy \rangle = \bar{s} \langle x, y \rangle$  für alle  $x, y \in \mathcal{X}$  und  $s \in \mathbb{C}$  gilt.

**Bemerkungen und Beispiele** (zu Skalarprodukten).

- (0) Statt  $\langle x, y \rangle$  schreibt man für das Skalarprodukt von  $x, y \in \mathcal{X}$  auch  $\langle x, y \rangle_{\mathcal{X}}$ ,  $x \cdot y$  oder  $x \cdot_{\mathcal{X}} y$ .

- (1) **Jedes Skalarprodukt auf  $\mathcal{X}$  induziert eine Norm  $\|\cdot\|$  auf  $\mathcal{X}$  durch die Festlegung**

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle} \quad \text{für } x \in \mathcal{X},$$

und in diesem Sinn **ist jeder Skalarproduktraum ein normierter Raum**. Der Beweis, dass die obige Festlegung tatsächlich die Axiome einer Norm und vor allem die Dreiecksungleichung erfüllt, wird in der linearen Algebra geführt. Er hängt mit der in jedem Skalarproduktraum  $\mathcal{X}$  gültigen **Cauchy-Schwarz-Ungleichung**

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\| \quad \text{für alle } x, y \in \mathcal{X}$$

(mit Gleichheit genau für linear abhängige Vektoren  $x$  und  $y$ ) zusammen.

- (2) Umgekehrt wird *nicht* jede Norm von einem Skalarprodukt induziert, sondern genau die Normen  $\|\cdot\|$  auf  $\mathcal{X}$ , die die Parallelogramm-Gleichung

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad \text{für alle } x, y \in \mathcal{X}$$

erfüllen, rühren von einem Skalarprodukt her.

- (3) Das wohl **grundlegendste Beispiel** eines Skalarprodukts ist das **Euklidische Skalarprodukt auf  $\mathbb{K}^N$** , das durch

$$\langle x, y \rangle_{\mathbb{K}^N} := \sum_{i=1}^N x_i \bar{y}_i \quad \text{für } x, y \in \mathbb{K}^N$$

gegeben ist (wobei die Konjugation von  $y_i$  für  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  natürlich entfallen kann). Dieses Skalarprodukt induziert die Euklidische Norm, mit anderen Worten die 2-Norm, auf  $\mathbb{K}^N$ .

Weitere **typische Beispiele** sind das  **$\ell^2$ -Skalarprodukt** auf dem Folgenraum  $\ell^2$ , gegeben durch

$$\langle x, y \rangle_{\ell^2} := \sum_{i=1}^{\infty} x_i \bar{y}_i \quad \text{für } x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}, y = (y_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \ell^2,$$

und das  **$L^2$ -Skalarprodukt** auf  $\mathbb{R}([a, b], \mathbb{K})$  und dem Teilraum  $C^0([a, b], \mathbb{K})$ , gegeben durch

$$\langle f, g \rangle_{L^2(a,b)} := \int_a^b (f \bar{g}) \quad \text{für } f, g \in \mathbb{R}([a, b], \mathbb{K}).$$

Diese Skalarprodukte induzieren natürlich die  $\ell^2$ -Norm beziehungsweise die  $L^2$ -Norm.

Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung entspricht bei allen hier genannten Beispielen übrigens dem Spezialfall  $p = q = 2$  der jeweiligen Hölder-Ungleichung.

- (4) In jedem Skalarproduktraum  $\mathcal{X}$  kann man den Winkel zwischen Vektoren  $x, y \in \mathcal{X} \setminus \{0_{\mathcal{X}}\}$  als  $\arccos \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|} \in [0, \pi]$  erklären (wobei  $\|\cdot\|$  für die vom Skalarprodukt induzierte Norm steht und der Ausdruck aufgrund der Cauchy-Schwarz-Ungleichung wohldefiniert ist). Insbesondere nennt man Vektoren  $x, y \in \mathcal{X}$  (**zueinander**) **orthogonal**, wenn  $\langle x, y \rangle = 0$  gilt.

Genauer werden Skalarprodukte und verwandte Konzepte in der linearen Algebra untersucht.

Schließlich wird noch ein vorerst letztes von  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{C}$  bekanntes Konzept ausgeweitet:

#### Definition (vollständige Räume).

- Eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in einem metrischen Raum  $(\mathcal{X}, d_{\mathcal{X}})$  heißt **Cauchy-Folge**, wenn es zu jedem  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  gibt, so dass  $d_{\mathcal{X}}(x_m, x_n) < \varepsilon$  für alle  $m, n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$  gilt.
- Ein **metrischer Raum**  $\mathcal{X}$  heißt **vollständig**, wenn jede Cauchy-Folge in  $\mathcal{X}$  gegen einen Grenzwert in  $\mathcal{X}$  konvergiert.
- Einen vollständigen normierten Raum nennt man **Banach-Raum**, einen vollständigen Skalarproduktraum **Hilbert-Raum**.

#### Bemerkungen und Beispiele (zu Vollständigkeit).

- (1) **Vollständigkeit ist für die Analysis essentiell.** Auf unvollständigen Räumen kann man kaum Analysis betreiben.
- (2) Ähnlich zur in Abschnitt 2.2 erwähnten Konstruktion von  $\mathbb{R}$  aus  $\mathbb{Q}$  kann man auch für jeden normierten oder metrischen Raum  $\mathcal{X}$  durch eine Konstruktion des Typs<sup>2</sup> „Cauchy-Folgen modulo Nullfolgen“ die sogenannte **Vervollständigung**  $\widehat{\mathcal{X}}$  bilden. Auf diese Weise kann man jeden normierten Raum  $\mathcal{X}$  mit einer Teilmenge eines Banach-Raums  $\widehat{\mathcal{X}}$ , jeden metrischen Raum  $\mathcal{X}$  mit einer Teilmenge eines vollständigen metrischen Raums  $\widehat{\mathcal{X}}$  identifizieren.

<sup>2</sup>Bei normiertem  $\mathcal{X}$  kann diese Konstruktion, ziemlich wörtlich, als Faktorbildung mit  $\mathbb{K}$ -Vektorräumen implementiert werden. In allgemeinem metrischen  $\mathcal{X}$  gibt es keine Null und keine Nullfolgen, aber es lässt sich eine analoge Faktorisierung nach einer Äquivalenzrelation durchführen.



(3) Die schon diskutierten **Standard-Beispiele normierter Räume sind** (abgesehen von technischen Problemen bei manchen Funktionenräumen) alle **vollständig**:

- Der endlich-dimensionale Raum  $\mathbb{K}^N$  ist mit jeder  $p$ -Norm,  $p \in [1, \infty]$ , (und auch mit jeder anderen Norm) ein Banach-Raum, mit der 2-Norm sogar ein Hilbert-Raum.
- Für jedes  $p \in [1, \infty]$  ist der Folgenraum  $\ell^p(\mathbb{K})$  mit der  $\ell^p$ -Norm ein Banach-Raum, für  $p = 2$  sogar ein Hilbert-Raum. Auch der Raum  $c_0(\mathbb{K})$  der Nullfolgen ist mit der  $\ell^\infty$ -Norm ein Banach-Raum.
- Für  $a < b$  in  $\mathbb{R}$  sind die Räume  $B([a, b], \mathbb{K})$  (beschränkte Funktionen),  $R([a, b], \mathbb{K})$  (gute Regelfunktionen) und  $C^0([a, b], \mathbb{K})$  (stetige Funktionen) Banach-Räume mit der  $L^\infty$ -Norm. Mit den  $L^p$ -Normen zu  $p \in [1, \infty[$  dagegen sind  $R([a, b], \mathbb{K})$  und  $C^0([a, b], \mathbb{K})$  nicht vollständig (und auch der Raum aller eigentlich Riemann-integrierbaren Funktionen ist mit der entsprechenden Halbnorm nicht vollständig). Bei diesem Mangel an Vollständigkeit handelt es sich tatsächlich um einen Defekt der *Riemannsches* Integrationstheorie, denn Vervollständigung führt auf Räume *Lebesgue*-integrierbarer Funktionen.

Der Nachweis der Vollständigkeit basiert in allen genannten Fällen auf der Vollständigkeit des zugrunde liegenden Körpers  $\mathbb{K}$  und gelingt ohne größere Probleme; einzelne Fälle werden in den Übungen diskutiert.

In vollständigen metrischen Räumen gilt der Kontraktionssatz aus Abschnitt 2.2 fast wörtlich. Dies wird als erster allgemeiner Sachverhalt auf Basis von Vollständigkeit festgehalten:

**Satz (Banachscher Fixpunktsatz, Kontraktionssatz).** *Sei  $\mathcal{X}$  ein vollständiger metrischer Raum. Ist  $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  strikte Kontraktion von  $\mathcal{X}$  (d.h. Lipschitz-stetige Abbildung von  $\mathcal{X}$  in sich mit Lipschitz-Konstante echt kleiner als 1), so gibt es genau einen Fixpunkt  $x_*$  von  $f$  in  $\mathcal{X}$ , und für beliebiges  $x_0 \in \mathcal{X}$  konvergiert die durch  $x_{n+1} := f(x_n)$  für  $n \in \mathbb{N}_0$  definierte Iterationsfolge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  gegen  $x_*$ .*

Zum Beweis überträgt man die Argumentation aus Abschnitt 2.2 auf die allgemeinere Situation, wozu lediglich die Beträge von Differenzen durch Abstände im Sinn der Metrik von  $\mathcal{X}$  zu ersetzen sind. Auch die Abschnitt 2.2 angegebenen Fehlerabschätzungen gelten in jedem vollständigen metrischen Raum völlig analog.

## 6.2 Topologische Grundbegriffe

Das mathematische Gebiet ‚**Topologie**‘ beschäftigt sich mit qualitativen Untersuchungen der Lage und der Eigenschaften von Punkten und Mengen in gewissen „topologischen“ Räumen. Charakteristisch für die Topologie ist, dass es sich hierbei um *qualitative* Untersuchungen handelt; *quantitative* Größen wie Längen, Abstände oder Winkel sind in der Topologie unwichtig, deren Untersuchung ist eher Gegenstand des Nachbargebiets ‚Geometrie‘.

Eine präzise Definition der der Topologie zugänglichen Räume folgt:

**Definition (Topologien, topologische Räume).** *Seien  $\mathcal{X}$  eine Menge und  $\mathcal{T}$  eine Teilmenge der Potenzmenge  $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ . Dann heißen  $\mathcal{T}$  eine **Topologie** auf  $\mathcal{X}$  und das Paar  $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$  ein **topologischer Raum**, wenn folgende drei Axiome erfüllt sind:*

- (I) *Es gelten  $\emptyset \in \mathcal{T}$  und  $\mathcal{X} \in \mathcal{T}$ ;*

- (II)  $\mathcal{T}$  ist **abgeschlossen unter endlichen Durchschnitten**, das heißt, für  $O_1, O_2 \in \mathcal{T}$  ist stets  $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T}$ ;
- (III)  $\mathcal{T}$  ist **abgeschlossen unter beliebigen Vereinigungen**, das heißt, für jede Familie  $(O_i)_{i \in I}$  von Mengen  $O_i \in \mathcal{T}$  (mit beliebiger Indermenge  $I$ ) ist  $\bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{T}$ .

Die Mengen  $O \in \mathcal{T}$  nennt man *offene Teilmengen von  $\mathcal{X}$*  oder **(in  $\mathcal{X}$ ) offene Mengen**. Die Teilmengen  $A$  von  $\mathcal{X}$  mit offenem Komplement  $\mathcal{X} \setminus A \in \mathcal{T}$  nennt man *abgeschlossene Teilmengen von  $\mathcal{X}$*  oder **(in  $\mathcal{X}$ ) abgeschlossene Mengen**.

**Bemerkungen** (zu topologischen Räumen).

- (0) Das Axiom (II) bedeutet natürlich auch, dass für beliebiges  $n \in \mathbb{N}$  und  $O_1, O_2, \dots, O_n \in \mathcal{T}$  stets  $\bigcap_{i=1}^n O_i \in \mathcal{T}$  gilt.
- (1) Per Definition sind sowohl  $\emptyset$  als auch  $\mathcal{X}$  stets offen *und* abgeschlossen in  $\mathcal{X}$ .
- (2) ‚abgeschlossen‘ ist *nicht* das Gegenteil von ‚offen‘. Tatsächlich gibt es für übliche topologische Räume  $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$  **viele Mengen in  $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ , die weder offen noch abgeschlossen sind**.
- (3) Das System  $\{A \in \mathcal{P}(\mathcal{X}) : \mathcal{X} \setminus A \in \mathcal{T}\}$  der abgeschlossenen Teilmengen von  $\mathcal{X}$  hat zu (II) und (III) komplementäre Eigenschaften: Dieses System ist abgeschlossen unter beliebigen Durchschnitten und endlichen Vereinigungen.
- (4) **In einem topologischen Raum  $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$  lassen sich zu jedem Punkt  $x \in \mathcal{X}$  Umgebungs-systeme**

$$\mathcal{S}_x := \{O \in \mathcal{T} : x \in O\} \quad \text{und} \quad \tilde{\mathcal{S}}_x := \{U \in \mathcal{P}(\mathcal{X}) : \exists O \in \mathcal{T} : x \in O \subset U\}$$

**erklären**. Die  $O \in \mathcal{S}_x$  heißen dabei **offene Umgebungen**, die  $U \in \tilde{\mathcal{S}}_x$  (**allgemeine**) **Umgebungen** von  $x$ . Gemäß der allgemeinen Grenzwert-Definition aus Abschnitt 3.1 sind mit den Umgebung(ssystem)en auch folgende **Konzepte in einem allgemeinen topologischen Raum  $\mathcal{X}$**  sinnvoll:

- **Konvergenz von Folgen** in  $\mathcal{X}$  (wobei Eindeutigkeit von Grenzwerten unter der schwachen Voraussetzungen sichergestellt ist, dass  $\mathcal{X}$  die sogenannte Hausdorff-Eigenschaft hat, d.h. es zu  $x, \tilde{x} \in \mathcal{X}$  mit  $\tilde{x} \neq x$  stets  $O \in \mathcal{S}_x, \tilde{O} \in \mathcal{S}_{\tilde{x}}$  mit  $O \cap \tilde{O} = \emptyset$  gibt);
- **Grenzwerte von Funktionen**  $f: D \rightarrow \mathcal{Y}$  auf  $D \subset \mathcal{X}$  mit Werten in einem weiteren topologischen Raum  $\mathcal{Y}$  (wobei Eindeutigkeit des Grenzwerts  $\lim_{D \ni x \rightarrow x_0} f(x) \in \mathcal{Y}$  sichergestellt ist, wenn  $x_0$  nicht-isolierter Punkt von  $D$  ist, d.h.  $\forall O \in \mathcal{S}_{x_0} : O \cap D \neq \{x_0\}$ , und  $\mathcal{Y}$  die Hausdorff-Eigenschaft hat);
- **Stetigkeit von Funktionen**  $f: D \rightarrow \mathcal{Y}$  auf  $D \subset \mathcal{X}$  mit Werten in einem weiteren topologischen Raum  $\mathcal{Y}$  bedeutet  $\lim_{D \ni x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  für alle  $a \in D$  (wird später noch genauer betrachtet).

Ob man mit den Systemen  $\mathcal{S}_x$  oder den Systemen  $\tilde{\mathcal{S}}_x$  arbeitet, ist für alle hier genannten Konzepte irrelevant und verändert diese nicht.

- (5) Jede Menge  $\mathcal{X}$  kann mit der trivialen Topologie  $\mathcal{T}_t = \{\emptyset, \mathcal{X}\}$  oder der diskreten Topologie  $\mathcal{T}_d = \mathcal{P}(\mathcal{X})$  versehen werden. Diese sehr einfachen Wahlen von Topologien spielen in der Analysis aber nur eine untergeordnete Rolle, das tatsächliche Interesse gilt vor allem den als Nächstes eingeführten „metrischen“ Topologien, die einem Mittelweg zwischen  $\mathcal{T}_t$  und  $\mathcal{T}_d$  entsprechen:

- (6) **Jeder metrische Raum**  $\mathcal{X}$  — insbesondere  $\mathbb{K}^N$ , jeder Skalarproduktraum, jeder normierte Raum — **wird zu einem topologischen Raum** (in dem die Hausdorff-Eigenschaft erfüllt ist), wenn man  $\mathcal{X}$  mit der **Standard-Topologie**

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &:= \left\{ \bigcup_{i \in I} B_{r_i}(x_i) : I \text{ beliebige Indexmenge, } \forall i \in I: x_i \in \mathcal{X}, r_i \in \mathbb{R}_{>0} \right\} \\ &= \{O \in \mathcal{P}(\mathcal{X}) : \forall x \in O: \exists r \in \mathbb{R}_{>0}: B_r(x) \subset O\} \end{aligned}$$

versieht, wobei auch  $I = \emptyset$  erlaubt ist und es sich bei  $B_{r_i}(x_i)$  und  $B_r(x)$  um die mit der Metrik von  $\mathcal{X}$  definierten offenen Kugeln handelt. Für das Folgende gilt es sich hiervon vor allem die folgende **Charakterisierung offener Mengen über Kugeln im metrischen Raum**  $\mathcal{X}$  zu merken: Für  $O \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$  gilt

$$O \text{ offen in } \mathcal{X} \iff \forall x \in O: \exists r \in \mathbb{R}_{>0}: B_r(x) \subset O.$$

Dass die beiden angegebenen Charakterisierungen von  $\mathcal{T}$  übereinstimmen, lässt sich übrigens leicht verifizieren: Ist eine Menge der Form  $O = \bigcup_{i \in I} B_{r_i}(x_i)$  gegeben, so gibt es zu jedem  $x \in O$  ein  $i \in I$  mit  $x \in B_{r_i}(x_i)$ , und für  $r := r_i - |x - x_i|$  ist  $B_r(x) \subset B_{r_i}(x_i) \subset O$ . Hat umgekehrt  $O$  die Eigenschaft, dass zu jedem  $x \in O$  ein  $r_x \in \mathbb{R}_{>0}$  mit  $B_{r_x}(x) \subset O$  existiert, so folgt die Darstellung  $O = \bigcup_{x \in O} B_{r_x}(x)$ , bei der  $O$  auch die Rolle der Indexmenge übernimmt. Mit beiden Charakterisierungen zur Hand ist dann auch schnell klar, dass es sich bei  $\mathcal{T}$  tatsächlich um eine Topologie handelt: Das Axiom (I) ist sowieso trivial erfüllt, das Axiom (II) ergibt sich recht einfach aus der zweiten Charakterisierung (Minimum von endlich vielen Radien nehmen), das Axiom (III) sieht man der ersten Charakterisierung direkt an.

Bei obiger Wahl der Topologie  $\mathcal{T}$  auf einem metrischen Raum  $\mathcal{X}$  stimmen die gerade besprochenen topologischen Konzepte von Konvergenz, Grenzwert und Stetigkeit mit den entsprechenden metrischen Konzepten des Abschnitts 6.1 überein; dies folgt direkt aus der Tatsache, dass jede Umgebung von  $x \in \mathcal{X}$  eine Kugel um  $x$  enthält und man sich deshalb auf Kugeln als „fundamentale Umgebungen“ beschränken kann.

In topologischen Räumen lassen sich sehr allgemeine und grundlegende Begriffe bilden:

**Definition (topologische Punktlagen, Inneres, Abschluss, Rand).** Sei  $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum. Für einen Punkt  $x \in \mathcal{X}$  und eine Teilmenge  $A$  von  $\mathcal{X}$  wird vereinbart:

- $x$  **innerer Punkt** von  $A \iff \exists O \in \mathcal{S}_x: O \subset A$ ,
- $x$  **äußerer Punkt** von  $A \iff \exists O \in \mathcal{S}_x: A \cap O = \emptyset$  (entspricht innerem Punkt von  $X \setminus A$ ),
- $x$  **Berührungspunkt** von  $A \iff \forall O \in \mathcal{S}_x: O \cap A \neq \emptyset$ ,
- $x$  **Randpunkt** von  $A \iff \forall O \in \mathcal{S}_x: O \cap A \neq \emptyset \neq O \setminus A$ ,
- $x$  **Häufungspunkt** von  $A \iff \forall O \in \mathcal{S}_x: (O \cap A \text{ enthält } \infty \text{ viele Elemente})$ ,
- $x$  **isolierter Punkt** von  $A \iff \exists O \in \mathcal{S}_x: O \cap A = \{x\}$ .

Hierbei bezeichnet  $\mathcal{S}_x$  das oben eingeführte System der offenen Umgebungen von  $x$  (anstelle dessen man aber äquivalent  $\tilde{\mathcal{S}}_x$  oder in einem metrischem Raum  $\mathcal{X}$  auch  $\{B_r(x) : r \in \mathbb{R}_{>0}\}$  verwenden kann). Man definiert außerdem ...

- das **Innere**  $\overset{\circ}{A}$  von  $A$  (in  $X$ ) als Menge aller inneren Punkte von  $A$ ,
- den **Abschluss**  $\bar{A}$  von  $A$  (in  $\mathcal{X}$ ) als Menge aller Berührungspunkte von  $A$ ,
- den **Rand**  $\partial A$  von  $A$  (in  $\mathcal{X}$ ) als Menge aller Randpunkte von  $A$ .

**Bemerkungen** (zu Innerem, Abschluss und Rand).

- (1) Bei festem  $A \subset \mathcal{X}$  teilt die Definition die Punkte in  $\mathcal{X}$  in die drei disjunkten Klassen der inneren Punkte von  $A$ , der Randpunkte von  $A$  und der äußeren Punkte von  $A$  auf. Berührungspunkte von  $A$  sind dabei alle inneren Punkte und alle Randpunkte von  $A$ , es gilt also

$$\overline{A} = \overset{\circ}{A} \cup \partial A.$$

Auch Häufungspunkte und isolierte Punkte von  $A$  sind stets Berührungspunkte von  $A$  und liefern neben der inneren Punkte und Randpunkte noch eine andere Unterteilung der Berührungspunkte in zwei disjunkte Klassen — jedenfalls bei metrischem  $\mathcal{X}$  und allgemeiner bei jedem  $\mathcal{X}$  mit der Hausdorff-Eigenschaft. (Nur im pathologischen Fall eines Raums  $\mathcal{X}$  ohne Hausdorff-Eigenschaft kann es manchmal Berührungspunkte geben, die weder Häufungspunkte noch isolierte Punkte sind.)

- (2) Per Definition gilt stets

$$\overset{\circ}{A} \subset A \subset \overline{A},$$

und daraus folgen die allgemeingültigen Identitäten  $\overset{\circ}{A} = A \setminus \partial A$  und  $\overline{A} = A \cup \partial A$ .

- (3) Weitere wichtige Folgerungen sind die **Charakterisierungen der offenen und der abgeschlossenen Mengen**

$$A \text{ offen} \iff \overset{\circ}{A} = A \iff \overset{\circ}{A} \supset A,$$

$$A \text{ abgeschlossen} \iff \overline{A} = A \iff \overline{A} \subset A.$$

- (4) Verwandte Konzepte, die ebenfalls für jeden topologischen Raum  $\mathcal{X}$  und beliebige Teilmengen  $A$  von  $\mathcal{X}$  Sinn machen, sind der Folgen-Abschluss und Folgen-Abgeschlossenheit: Der **Folgen-Abschluss** von  $A$  in  $\mathcal{X}$  wird definiert als Menge aller in  $\mathcal{X}$  existenten Limites  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  von Folgen  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $A$ , und man nennt  $A$  **Folgen-abgeschlossen** in  $\mathcal{X}$ , wenn  $A$  mit seinem Folgen-Abschluss in  $\mathcal{X}$  übereinstimmt. „Normalerweise“ fallen diese Begriffe mit den zuvor betrachteten Begriffen zusammen, denn im Rahmen der Übungen wird gezeigt:

**Satz.** Seien  $\mathcal{X}$  ein metrischer Raum und  $A$  eine Teilmenge von  $\mathcal{X}$ . Dann stimmt der Folgen-Abschluss von  $A$  in  $\mathcal{X}$  mit  $\overline{A}$  überein, und  $A$  ist genau dann Folgen-abgeschlossen in  $\mathcal{X}$ , wenn  $A$  abgeschlossen in  $\mathcal{X}$  ist.

Das Zusammenfallen der Konzepte rechtfertigt tatsächlich den häufig verwendeten Schluss

$$x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x \text{ in } \mathcal{X} \text{ und } x_n \in A \text{ für } n \gg 1 \implies x \in \overline{A}$$

(und sogar den Schluss auf  $x \in A$  bei abgeschlossenem  $A$ ). Abgesehen von Anwendungen dieser Schlussweise wird der Folgen-Abschluss aber vorerst keine Rolle mehr spielen.

- (5) In der Vorlesung wird außerdem der folgende, oft nützliche Sachverhalt bewiesen:

**Satz.** Für einen **vollständigen** metrischen Raum  $\mathcal{X}$  und eine Teilmenge  $A$  von  $\mathcal{X}$  gilt

$$A \text{ abgeschlossen in } \mathcal{X} \iff A \text{ vollständig},$$

wobei mit Vollständigkeit von  $A$  die Vollständigkeit von  $A$  als eigener metrischer Raum mit der Einschränkung der Metrik von  $\mathcal{X}$  auf  $A$  gemeint ist.

**Beispiele** (zu den topologischen Begriffen).

- (0) Naheliegende Beispiele von offenen und abgeschlossenen Mengen sind offene und abgeschlossene Intervalle in  $\mathbb{R}$  sowie offene und abgeschlossene Kugeln in beliebigen metrischen Räumen (jeweils mit Standard-Topologie).
- (1) Das Rechteck  $R := ]-1, 2] \times [1, 3[$  ist in  $\mathbb{R}^2$  (mit Standard-Topologie) weder offen noch abgeschlossen mit Innerem  $\overset{\circ}{R} = ]-1, 2[ \times ]1, 3[$ , Abschluss  $\overline{R} = [-1, 2] \times [1, 3]$ , Rand  $\partial R = (\{-1, 2\} \times [1, 3]) \cup (]-1, 2] \times \{1, 3\})$ . Die Häufungspunkte von  $R$  sind in diesem Fall genau die Berührungspunkte, also alle Punkte in  $\overline{R}$ , isolierte Punkte besitzt  $R$  nicht.
- (2) Die Menge  $S := \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$  der Stammbrüche ist in  $\mathbb{R}$  (mit Standard-Topologie) weder offen noch abgeschlossen mit Innerem  $\overset{\circ}{S} = \emptyset$ , Abschluss  $\overline{S} = S \cup \{0\}$ , Rand  $\partial S = S \cup \{0\}$ . Dabei ist 0 einziger Häufungspunkt von  $S$ , alle Stammbrüche sind isolierte Punkte von  $S$ .
- (3) Die Liniensegment  $L := \{]-7, -3[ \} \times \{0\}$  ist weder offen noch abgeschlossen in  $\mathbb{R}^2$  (mit Standard-Topologie) und hat dort leeres Inneres. Allerdings ist  $L$  offen in  $\mathbb{R} \times \{0\}$  und abgeschlossen in  $]-7, -3[ \times \mathbb{R}$  (mit den Standard-Topologien auf diesen Teilmengen).

Das letzte Beispiel zeigt hierbei eindeutig, dass **topologische Konzepte** im Allgemeinen nicht nur von den betrachteten Mengen und Punkten, sondern auch **vom umgebenden topologischen Raum abhängen**. Dies gilt es immer im Kopf zu behalten, eventuelle Unklarheiten sind zu vermeiden, indem man Präzisierungen wie „in  $\mathcal{X}$ “ hinzusetzt.

Es folgen weitere topologische Begriffe:

**Definition (dichte, nirgends dichte und diskrete Mengen).** Sei  $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum. Eine Teilmenge  $A$  von  $\mathcal{X}$  heißt ...

- **dicht** in  $\mathcal{X}$ , wenn  $\overline{A} = \mathcal{X}$  gilt;
- **nirgends dicht** in  $\mathcal{X}$ , wenn  $\overset{\circ}{\overline{A}} = \emptyset$  gilt (Abschluss besitzt keine inneren Punkte);
- **diskret**<sup>3</sup> in  $\mathcal{X}$ , wenn alle Punkte in  $\overline{A}$  isolierte Punkte von  $\overline{A}$  sind.

**Beispiele** (von dichten, nirgends dichten und diskreten Mengen).

- (1)  $\mathbb{Q}^N$  und  $\mathbb{R}^N \setminus \mathbb{Q}^N$  sind beide dicht in  $\mathbb{R}^N$  (mit Standard-Topologie). Es handelt sich hierbei um die absoluten Standard-Beispiele dichter Mengen.
- (2)  $\mathbb{Z}^N$  ist nirgends dicht und diskret in  $\mathbb{R}^N$  (mit Standard-Topologie).
- (3) Die Menge  $S$  der Stammbrüche aus obigem Beispiel (2) ist nirgends dicht, aber nicht diskret in  $\mathbb{R}^N$ , und  $\mathbb{R}^N$  wiederum ist abgeschlossen und nirgends dicht, aber nicht diskret in  $\mathbb{C}^N$ . Die Cantor-Menge ist ein weiteres Beispiel einer abgeschlossenen und nirgends dichten Menge in  $\mathbb{R}$ , ist aber ebenfalls nicht diskret.

**Bemerkung.** Im Normalfall — nämlich immer dann, wenn der umgebende Raum  $\mathcal{X}$  keine isolierten Punkte besitzt — ist jede in  $\mathcal{X}$  diskrete Menge auch nirgends dicht in  $\mathcal{X}$ .

<sup>3</sup>Mit anderen Worten ist  $A$  genau dann diskret in  $\mathcal{X}$ , wenn die Einschränkung der Topologie (im unten diskutierten Sinn) auf  $\overline{A}$  die diskrete Topologie ergibt. In einem Hausdorff-Raum  $\mathcal{X}$  ist dies auch gleichbedeutend damit, dass es in  $\mathcal{X}$  keinen Häufungspunkt von  $A$  gibt.

Schließlich werden einige, oben teils implizit verwendete Konzepte genauer ins Auge gefasst:

**Definition & Bemerkung (Topologie auf Teilmengen).** Seien  $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum und  $M$  eine beliebige Teilmenge von  $\mathcal{X}$ . Man nennt eine Teilmenge  $A$  von  $M$  (**relativ**) **offen/abgeschlossen** in  $M$ , wenn es eine in  $\mathcal{X}$  offene/abgeschlossene Menge  $B$  mit  $B \cap M = A$  gibt. Tatsächlich handelt es sich hierbei um nichts anderes als die schon bekannten Begriffe offener und abgeschlossener Mengen, wenn  $M$  mit der sogenannten **Spurtopologie** oder **Relativtopologie**  $\mathcal{T}_M := \{O \cap M : O \in \mathcal{T}\}$  versehen und damit als eigener topologischer Raum betrachtet wird. Das System  $\mathcal{T}_M$  der **in  $M$  (relativ) offenen Mengen** ist hierbei vom System  $\{O \in \mathcal{P}(M) : O \in \mathcal{T}\}$  der **in  $\mathcal{X}$  offenen Teilmengen von  $M$**  zu unterscheiden; die beiden Systeme stimmen nur dann überein, wenn  $M$  selbst offen in  $\mathcal{X}$  ist. Betrachtet man einen metrischen Raum  $\mathcal{X}$  mit der Standard-Topologie  $\mathcal{T}$ , so ist  $\mathcal{T}_M$  nichts anderes als die Standard-Topologie des metrischen Raums  $M$  mit der darauf eingeschränkten Metrik; daher ergibt sich die Relativtopologie in fast allen konkreten Fällen automatisch.

**Bemerkungen (zu stetigen Funktionen zwischen topologischen Räumen).** Seien  $\mathcal{X}$  und  $\mathcal{Y}$  topologische Räume sowie  $f: D \rightarrow \mathcal{Y}$  eine Funktion auf  $D \subset \mathcal{X}$ .

- (1) Wie bereits erwähnt, können Grenzwerte und verwandte Konzepte auch für derart allgemeine Funktionen  $f$  über die Umgebungssysteme  $\mathcal{S}_x$  (oder  $\tilde{\mathcal{S}}_x$ ) erklärt werden. Konkret heißt  $y_0 \in \mathcal{Y}$  ein **Häufungswert** von  $f(x)$  beim Grenzübergang  $D \ni x \rightarrow x_0$  gegen  $x_0 \in \mathcal{X}$ , wenn für alle offenen Umgebungen  $V \in \mathcal{S}_{y_0}$  von  $y_0$  in  $\mathcal{Y}$  und alle offenen Umgebungen  $U \in \mathcal{S}_{x_0}$  von  $x_0$  in  $\mathcal{X}$  stets  $f(U \cap D \setminus \{x_0\}) \cap V \neq \emptyset$  gilt (was natürlich nur für nicht-isolierte Punkte  $x_0$  von  $\bar{D}$  Sinn macht und normalerweise nur für solche verwendet wird). Analog erhält man für  $x_0 \in \mathcal{X}$ ,  $y_0 \in \mathcal{Y}$  die **Charakterisierung des Grenzwerts**

$$\lim_{D \ni x \rightarrow x_0} f(x) = y_0 \iff \forall V \in \mathcal{S}_{y_0} : \exists U \in \mathcal{S}_{x_0} : f(U \cap D \setminus \{x_0\}) \subset V$$

und für  $x_0 \in D$  die **Charakterisierung der Stetigkeit**

$$f \text{ stetig in } x_0 \iff \forall V \in \mathcal{S}_{f(x_0)} : \exists U \in \mathcal{S}_{x_0} : f(U \cap D) \subset V.$$

Stetigkeit von  $f$  auf ganz  $D$  heißt natürlich gerade, dass letzteres für alle  $x_0 \in D$  gilt.

- (2) **Folgen-Stetigkeit** von  $f$  auf  $D$  bedeutet wie in Abschnitt 3.2, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a) \quad \text{für jede gegen } a \in D \text{ konvergente Folge } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ in } D$$

gilt. Gemäß dem Folgenkriterium für allgemeine Grenzwerte aus Abschnitt 3.1 fällt Folgen-Stetigkeit „normalerweise“ mit dem in (1) betrachteten Stetigkeitsbegriff zusammen:

**Satz.** Für einen metrischen Raum  $\mathcal{X}$  und  $\mathcal{Y}$ ,  $f$ ,  $D$  wie oben ist  $f$  genau dann Folgen-stetig auf  $D$ , wenn  $f$  stetig auf  $D$  ist.

- (3) Als einfache Konsequenz der Charakterisierung aus (1) ergibt sich auch:

**Satz (Abbildungseigenschaften stetiger Funktionen).** Für  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{Y}$ ,  $f$ ,  $D$  wie oben gilt:

$$\begin{aligned} f \text{ stetig auf } D &\iff f^{-1}(O) \text{ offen in } D \text{ für alle in } \mathcal{Y} \text{ offenen Mengen } O \\ &\iff f^{-1}(A) \text{ abgeschlossen in } D \text{ für alle in } \mathcal{Y} \text{ abgeschlossenen Mengen } A. \end{aligned}$$

- (4) Die vielleicht wichtigsten Konsequenzen des Satzes in (3) sind folgende Prinzipien:
- **Durch** endliche viele **strikte Ungleichungen** mit stetigen  $f_i, g_i: D \rightarrow \mathbb{R}$  **definierte Mengen**  $\{x \in D : f_1(x) < g_1(x), f_2(x) < g_2(x), \dots, f_n(x) < g_n(x)\}$  **sind stets offen**. Dieses Prinzip gilt auch, wenn „<“ an einigen oder allen Stellen durch „>“ oder „ $\neq$ “ ersetzt wird.
  - **Durch schwache Ungleichungen** mit stetigen  $f_i, g_i: D \rightarrow \mathbb{R}$  **definierte Mengen**  $\{x \in D : f_i(x) \leq g_i(x) \text{ für alle } i \in I\}$  mit beliebiger Indexmenge  $I$  **sind stets abgeschlossen**. Dieses Prinzip gilt auch, wenn „ $\leq$ “ teils/insgesamt durch „ $\geq$ “ oder „ $=$ “ ersetzt wird.
- (5) Ist für alle in  $D$  offenen  $O$  das Bild  $f(O)$  offen in  $\mathcal{Y}$ , so bezeichnet man  $f$  als **offene Abbildung**. Ist für alle in  $D$  abgeschlossenen  $A$  dagegen  $f(A)$  abgeschlossen in  $\mathcal{Y}$ , so heißt  $f$  **abgeschlossene Abbildung**. Anders als die Charakterisierungen aus (3) arbeiten diese Definitionen aber mit Bildern, nicht mit Urbildern; dies macht einen wesentlichen Unterschied, und im Allgemeinen<sup>4</sup> besteht zwischen offenen/abgeschlossenen und stetigen Abbildungen kein einfacher Zusammenhang. Für bijektive  $f$  allerdings sind Offenheit und Abgeschlossenheit von  $f$  gemäß (3) jeweils äquivalent zur Stetigkeit der Umkehrabbildung  $f^{-1}$ .
- Übrigens bezeichnet man eine stetige Bijektion mit stetiger Umkehrabbildung (oder äquivalent, eine stetige offene Bijektion) auch als **Homöomorphismus**. Eine solche Abbildung erhält alle topologischen Eigenschaften, und ihre bloße Existenz bedeutet, dass der Definitions- und Zielbereich einander in topologischer Hinsicht gleichen.
- (6) Zum **Nachweis der Stetigkeit konkret gegebener Funktionen** kann man analog zum Fall einer Variablen vorgehen. Im Wesentlichen reicht es zu wissen, dass Grundfunktionen einer Variablen stetig sind, dass Stetigkeit bei Rechenoperationen und Verkettung erhalten bleibt, und dass  $f: D \rightarrow \mathbb{K}^M$  auf  $D \subset \mathbb{K}^N$  genau dann stetig ist, wenn alle Komponentenfunktionen  $f_1, f_2, \dots, f_M$  auf  $D$  stetig sind.

Zum Abschluss dieses Abschnitts werden als letzte topologische Konzepte Zusammenhangsbegriffe definiert:

**Definitionen (Zusammenhang, Wegzusammenhang, Zusammenhangskomponenten).**  
Seien  $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum und  $A$  eine Teilmenge von  $\mathcal{X}$ .

- (I) Man nennt  $A$  **zusammenhängend**, wenn für jede disjunkte Zerlegung  $A = O_1 \cup O_2$ ,  $O_1 \cap O_2 = \emptyset$  von  $A$  in offene Teilmengen  $O_1$  und  $O_2$  von  $A$  stets  $O_1 = \emptyset$  oder  $O_2 = \emptyset$  gilt.
- (II) Als **Pfad, Weg** oder **Kurve** in  $A$  bezeichnet man eine **stetige Abbildung**  $c: I \rightarrow A$  **eines Intervalls**  $I$  nach  $A$ . Ist  $I = [a, b]$  kompaktes Intervall mit Randpunkten  $a < b$  in  $\mathbb{R}$ , so heißen  $c(a)$  und  $c(b)$  die **Endpunkte** von  $c$ .
- (III) Man nennt  $A$  **wegzusammenhängend**, wenn es zu je zwei Punkten  $x, y \in A$  stets eine Kurve in  $A$  mit Endpunkten  $x$  und  $y$  gibt.
- (IV) Die **(Weg-)Zusammenhangskomponenten** von  $A$  sind die (bezüglich Mengeninklusion) maximalen (weg)zusammenhängenden Teilmengen von  $A$ .

<sup>4</sup>Speziell für Abbildungen  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gilt der bemerkenswerte Sachverhalt, dass zugleich offene und abgeschlossene Abbildungen immer stetig sind; der Beweis ist elementar, aber nicht ganz einfach. Inwiefern analoge Aussagen für allgemeinere Räume gelten, ist dem Vorlesenden nicht bekannt.

**Bemerkungen** (zu den Zusammenhangsbegriffen).

- (1) (Weg-)Zusammenhang und (Weg-)Zusammenhangskomponenten von  $A$  hängen nur von  $A$  und der Spurtopologie  $\mathcal{T}_A$  auf  $A$  ab, aber ansonsten nicht vom umgebenden Raum  $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$ ; in diesem Sinn handelt es sich um **innere Eigenschaften** der betrachteten Menge  $A$ .
- (2) **Bei zusammenhängendem  $A$  sind  $\emptyset$  und  $A$  die einzigen Teilmengen von  $A$ , die gleichzeitig offen und abgeschlossen in  $A$  sind.** Auf dieser Tatsache basiert eine elegante Methode, um eine Eigenschaft für alle Punkte einer zusammenhängenden Menge  $A$  nachzuweisen: Man zeigt, dass die Punkte mit der betreffenden Eigenschaft eine nicht-leere, sowohl offene als auch abgeschlossene Teilmenge bilden, denn dann ist diese Teilmenge zwingend ganz  $A$ .  
Ist  $A$  nicht zusammenhängend, so gibt es mehr Teilmengen von  $A$ , die zugleich offen und abgeschlossen sind: Besteht  $A$  beispielsweise aus endlich vielen Zusammenhangskomponenten, so ist jede dieser Komponenten offen und abgeschlossen in  $A$ .
- (3) Aus den Ordnungseigenschaften von  $\mathbb{R}$  und dem Zwischenwertsatz folgt, dass die Eigenschaften Zusammenhang und Wegzusammenhang **für Teilmengen von  $\mathbb{R}$**  (mit Standard-Topologie) äquivalent und beide genau für Intervalle erfüllt sind. **Mit anderen Worten ist ein Intervall nichts anderes als eine zusammenhängende Teilmenge von  $\mathbb{R}$ .**
- (4) In einem allgemeinen topologischen Raum ist jede wegzusammenhängende Menge auch zusammenhängend. Dass diese Begriffe schon in  $\mathbb{R}^2$  aber nicht mehr äquivalent ist, zeigt das Standard-Beispiel der zusammenhängenden, aber nicht wegzusammenhängenden Menge  $\{(x, \sin \frac{1}{x}) : x \in \mathbb{R}_{>0}\} \cup \{(0, 0)\}$  in  $\mathbb{R}^2$ .
- (5) Für offene Teilmengen von  $\mathbb{K}^N$  sind die Eigenschaften Zusammenhang und Wegzusammenhang aber doch wieder äquivalent, und solche Mengen besitzen höchstens abzählbar viele (Weg-)Zusammenhangskomponenten, die wieder offen in  $\mathbb{K}^N$  sind.
- (6) Die Cantor-Menge  $C$  dagegen ist ein Beispiel einer (abgeschlossenen, nicht offenen) Teilmenge von  $\mathbb{R}$  mit überabzählbar vielen (Weg-)Zusammenhangskomponenten, nämlich allen ein-elementigen Teilmengen  $\{x\}$  mit  $x \in C$ .
- (7) Für eine (weg)zusammenhängende Menge  $A$  in einem beliebigen topologischen Raum und eine stetige Abbildung  $f: A \rightarrow \mathcal{Y}$  in einen weiteren topologischen Raum  $\mathcal{Y}$  ist stets auch das Bild  $f(A)$  (weg)zusammenhängend. Dieses Prinzip der **Erhaltung des (Weg-)Zusammenhangs bei stetigem Bild** verallgemeinert den Zwischenwertsatz sehr weitgehend.

### 6.3 Kompaktheit und Gleichmäßigkeit

Der letzte Abschnitt dieses Kapitels behandelt eine weitere wichtige topologische Begriffsbildung:

**Definition (Kompaktheitsbegriffe).** Seien  $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum und  $A$  eine Teilmenge von  $\mathcal{X}$ .

- Eine Familie  $(O_i)_{i \in I}$  von Teilmengen  $O_i$  von  $\mathcal{X}$  (mit nicht-leerer, ansonsten beliebiger Indexmenge  $I$ ) bezeichnet man als **Überdeckung** von  $A$ , wenn  $A \subset \bigcup_{i \in I} O_i$  gilt. Sind bei einer Überdeckung  $(O_i)_{i \in I}$  von  $A$  alle  $O_i$  mit  $i \in I$  offen in  $\mathcal{X}$ , so spricht man von einer **offenen Überdeckung** von  $A$ .



- Die Teilmenge  $A$  heißt (**Überdeckungs-**)**kompakt**, wenn es zu jeder offenen Überdeckung  $(O_i)_{i \in I}$  von  $A$  ein  $n \in \mathbb{N}$  und Indizes  $i_1, i_2, \dots, i_n \in I$  mit  $A \subset O_{i_1} \cup O_{i_2} \cup \dots \cup O_{i_n}$  gibt. In Worten beschreibt man diesen Sachverhalt auch so, dass jede offene Überdeckung  $(O_i)_{i \in I}$  von  $A$  eine endliche Teilüberdeckung  $(O_{i_j})_{j=1,2,\dots,n}$  enthält.
- Die Teilmenge  $A$  heißt **Folgen-kompakt**, wenn jede Folge in  $A$  eine gegen einen Grenzwert in  $A$  konvergente Teilfolge besitzt.
- Die Teilmenge  $A$  heißt **relativ kompakt** respektive **relativ Folgen-kompakt** in  $\mathcal{X}$ , wenn ihr in  $\mathcal{X}$  gebildeter Abschluss  $\overline{A}$  kompakt respektive Folgen-kompakt ist.

**Bemerkungen** (zu Kompaktheit).

- (0) Wie durch Formulierung und Klammern in der Definition angedeutet, ist **Kompaktheit ohne weiteren Zusatz** stets als **Überdeckungs-Kompaktheit** zu interpretieren.
- (1) Überdeckungs- und Folgen-Kompaktheit von  $A$  sind **innere Eigenschaften** von  $A$  in dem Sinn, dass sie nur von  $A$  selbst (oder, präziser formuliert, vom topologischen Raum  $(A, \mathcal{T}_A)$  mit der Spurtopologie  $\mathcal{T}_A$ ) abhängen, doch nicht vom umgebenden topologischen Raum. Im Fall der Überdeckungs-Kompaktheit sieht man dies der Definition nicht sofort an (denn im Allgemeinen  $O_i \not\subset A$ ), man überlegt sich aber problemlos, dass man sich auf die Betrachtung von Überdeckungen  $(O_i \cap A)_{i \in I}$  aus relativ offenen Teilmengen  $O_i \cap A$  von  $A$  zurückziehen kann. Bei Folgen-Kompaktheit dagegen ist wirklich offensichtlich, dass der umgebende Raum keine Rolle spielt, denn in der Definition treten ja nur Folgen *in*  $A$  auf.
- (2) Es folgen **wichtige Grundeigenschaften von kompakten Mengen**, die jeweils in einer rein Mengen-basierten und einer Folgen-Version gelten:
- (a) In einem beliebigen topologischen Raum gilt:  
**Jede Vereinigung von zwei kompakten Teilmengen ist kompakt.**  
 Jede Vereinigung von zwei Folgen-kompakten Teilmengen ist Folgen-kompakt.  
 Vereinigungen von  $n$  (Folgen-)kompakten Mengen mit beliebigem  $n \in \mathbb{N}$  sind natürlich auch (Folgen-)kompakt.
- (b) In einem beliebigen topologischen Raum gilt:  
**Jede abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge ist kompakt.**  
 Jede Folgen-abgeschlossene Teilmenge einer Folgen-kompakten Menge ist Folgen-kompakt.
- (c) Ist  $\mathcal{X}$  metrischer Raum (oder topologischer Raum mit Hausdorff-Eigenschaft), so gelten:  
**Jede kompakte Teilmenge von  $\mathcal{X}$  ist abgeschlossen in  $\mathcal{X}$ .**  
 Jede Folgen-kompakte Teilmenge von  $\mathcal{X}$  ist Folgen-abgeschlossen in  $\mathcal{X}$ .  
 In Ergänzung zu diesen Eigenschaften sei angemerkt, dass in einem metrischen Raum  $\mathcal{X}$  jede kompakte oder Folgen-kompakte Teilmenge  $K$  (als eigener metrischer Raum mit der Einschränkung der Metrik) **vollständig ist** (selbst wenn  $\mathcal{X}$  selbst nicht vollständig ist). Abstrakt lässt sich dies dadurch begründen, dass  $K$  nach (1) und (2c) (Folgen-)kompakt und (Folgen-)abgeschlossen in der Vervollständigung  $\widehat{\mathcal{X}}$  von  $\mathcal{X}$  ist, und im vollständigen metrischen Raum  $\widehat{\mathcal{X}}$  ist (Folgen-)Abgeschlossenheit von  $K$  gemäß Abschnitt 6.2 nichts anderes als Vollständigkeit von  $K$ .
- (d) Sind  $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$  metrische oder topologische Räume, und wird  $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$  mit der Produkt-Metrik  $d_{\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2}((x_1, x_2), (y_1, y_2)) := d_{\mathcal{X}_1}(x_1, y_1) + d_{\mathcal{X}_2}(x_2, y_2)$  bzw. der Produkt-Topologie  $\mathcal{T}_{\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2} := \{\bigcup_{i \in I} (U_i \times V_i) : U_i \in \mathcal{T}_{\mathcal{X}_1}, V_i \in \mathcal{T}_{\mathcal{X}_2} \text{ für alle } i \in I\}$  versehen, so gelten:  
**Für kompakte Teilmengen  $K_1$  von  $\mathcal{X}_1$  und  $K_2$  von  $\mathcal{X}_2$  ist  $K_1 \times K_2$  kompakt.**  
 Für Folgen-kompakte Teilmengen  $K_1$  von  $\mathcal{X}_1$  und  $K_2$  von  $\mathcal{X}_2$  ist  $K_1 \times K_2$  Folgen-kompakt.  
 Natürlich folgt aus diesen Eigenschaften, dass auch kartesische Produkte  $K_1 \times K_2 \times \dots \times K_n$  mit  $n \in \mathbb{N}$  kompakten Faktoren  $K_1, K_2, \dots, K_n$  noch kompakt sind. Darüber hinaus garantiert ein fortgeschrittener **Satz von Tychonov** dasselbe auch für unendliche kartesische Produkte mit einer geeigneten Produkt-Topologie (wobei die Faktoren mit einer beliebigen unendlichen Indexmenge indiziert werden können).

Die Beweise dieser Grundeigenschaften werden teils in der Vorlesung, teils in den Übungen behandelt. Hier wird nur das wohl schwierigste Argument ausgeführt:

*Beweis der Eigenschaft (2d) in der Mengen-basierten Version mit Überdeckungs-Kompaktheit.* Da offene Mengen in  $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$  per Definition der Produkt-Topologie Vereinigungen von Mengen in Produkt-Gestalt sind, reicht es — wie in den Übungen auch noch genauer erklärt wird — offene Überdeckungen von  $K_1 \times K_2$  durch Mengen von Produkt-Gestalt zu betrachten. Genauer sei  $(U_i \times V_i)_{i \in I}$  eine offene Überdeckung von  $K_1 \times K_2$  mit beliebiger Indexmenge  $I \neq \emptyset$ , offenen Teilmengen  $U_i$  von  $\mathcal{X}_1$  und offenen Teilmengen  $V_i$  von  $\mathcal{X}_2$ . Für jedes  $x \in K_1$  ist dann  $(V_i)_{i \in I(x)}$  mit der reduzierten Indexmenge  $I(x) := \{i \in I : x \in U_i\}$  eine offene Überdeckung von  $K_2$ . Gemäß der Überdeckungs-Kompaktheit von  $K_2$  gibt es nun ein  $n(x) \in \mathbb{N}$  und Indizes  $i_1(x), i_2(x), \dots, i_{n(x)}(x) \in I(x)$  mit  $K_2 \subset V_{i_1(x)} \cup V_{i_2(x)} \cup \dots \cup V_{i_{n(x)}(x)}$ . Mit  $U_{i_1(x)}, U_{i_2(x)}, \dots, U_{i_{n(x)}(x)}$  ist auch der endliche Durchschnitt  $W_x := U_{i_1(x)} \cap U_{i_2(x)} \cap \dots \cap U_{i_{n(x)}(x)}$  offene Umgebung von  $x$  in  $\mathcal{X}_1$ , und insgesamt ist daher  $(W_x)_{x \in K_1}$  offene Überdeckung von  $K_1$ . Gemäß der Kompaktheit von  $K_1$  gibt es ein  $m \in \mathbb{N}$  und  $x_1, x_2, \dots, x_m \in K_1$  mit  $K \subset W_{x_1} \cup W_{x_2} \cup \dots \cup W_{x_m}$ . Insgesamt ergibt sich

$$\begin{aligned} K_1 \times K_2 &\subset \bigcup_{k=1}^m (W_{x_k} \times K_2) \subset \bigcup_{k=1}^m (W_{x_k} \times (V_{i_1(x_k)} \cup V_{i_2(x_k)} \cup \dots \cup V_{i_{n(x_k)}(x_k)})) \\ &= \bigcup_{k=1}^m ((W_{x_k} \times V_{i_1(x_k)}) \cup (W_{x_k} \times V_{i_2(x_k)}) \cup \dots \cup (W_{x_k} \times V_{i_{n(x_k)}(x_k)})) \\ &\subset \bigcup_{k=1}^m ((U_{i_1(x_k)} \times V_{i_1(x_k)}) \cup (U_{i_2(x_k)} \times V_{i_2(x_k)}) \cup \dots \cup (U_{i_{n(x_k)}(x_k)} \times V_{i_{n(x_k)}(x_k)})), \end{aligned}$$

und damit ist für Überdeckungen von  $K_1 \times K_2$  des „Produkt-Typs“ die Existenz einer endlichen Teilüberdeckung gezeigt. Wegen der zu Beginn des Beweises erwähnten Möglichkeit der Reduktion auf diesen Typ folgt hieraus Kompaktheit von  $K_1 \times K_2$ .  $\square$

Beispiele von kompakten Mengen sind zunächst einmal endliche Mengen (in einem beliebigen topologischen Raum), denn für solche sind die Definitionen der Überdeckungs- und der Folgen-Kompaktheit beide trivial erfüllt. Tatsächlich sind aber noch viele weitere Mengen kompakt, und zumindest in  $\mathbb{K}^N$  lässt sich über Kompaktheit auch tatsächlich mit einem einfach zu prüfenden (aber gar nicht so einfach zu beweisenden) Kriterium entscheiden:

### Hauptsatz (Charakterisierung der kompakten Mengen).

(I) Für einen metrischen Raum  $\mathcal{X}$  und eine Teilmenge  $A$  von  $\mathcal{X}$  gilt:

$$A \text{ kompakt} \iff A \text{ Folgen-kompakt} \implies A \text{ abgeschlossen und beschränkt in } \mathcal{X}.$$

(II) In  $\mathcal{X} = \mathbb{K}^N$  und jedem endlich-dimensionalen normierten Raum  $\mathcal{X}$  gelten auch die noch wichtigeren Umkehrungen, nämlich:

- **Satz von Heine-Borel:** Jede abgeschlossene und beschränkte Teilmenge von  $\mathcal{X}$  ist kompakt.
- **Satz von Bolzano-Weierstraß:** Jede abgeschlossene und beschränkte Teilmenge von  $\mathcal{X}$  ist Folgen-kompakt, mit anderen Worten besitzt also jede Folge in einer abgeschlossenen und beschränkten Teilmenge  $A$  von  $\mathcal{X}$  eine in  $A$  konvergente Teilfolge.

*Insgesamt sind (Folgen-)kompakte Mengen in  $\mathbb{K}^N$  und endlich-dimensionalen normierten Räumen also vollständig charakterisiert als abgeschlossene und beschränkte Mengen.*

Insbesondere zeigt der Hauptsatz, dass kompakte Intervalle  $[a, b]$  mit  $a < b$  in  $\mathbb{R}$  auch kompakte Mengen sind, was die schon in der Analysis I erfolgt Benennung dieser Intervalle im Nachhinein erklärt.

Der auch in der Vorlesung behandelte Beweis des Hauptsatzes wird nun im Detail ausgeführt:

*Beweis des Hauptsatzes.* Zum Nachweis von Teil (I) sei  $\mathcal{X}$  ein metrischer Raum. Gemäß obiger Bemerkung (2c) ist dann jede (Folgen-)kompakte Menge abgeschlossen. Außerdem ist klar, dass jede Folgen-kompakte Menge  $A$  beschränkt sein muss, denn wäre  $A$  unbeschränkt, so gäbe es eine Folge  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $A$  mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} d_{\mathcal{X}}(x_k, a) = \infty$  für (ein und dann automatisch) alle  $a \in A$ , also eine Folge ohne konvergente Teilfolge. Somit bleibt nur die Äquivalenz von Kompaktheit und Folgen-Kompaktheit zu zeigen, die nun in mehreren Schritten nachgewiesen wird:

Um  $\implies$  mit einem Widerspruchsargument zu zeigen, wird  $A$  als kompakt, aber nicht Folgen-kompakt angenommen. Dann gibt es eine Folge  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  in  $A$ , die keine in  $A$  konvergente Teilfolge besitzt. Es folgt, dass die Menge der Folgenglieder  $F := \{x_i : i \in \mathbb{N}\} \subset A$  eine unendliche Menge ohne Häufungspunkt in  $A$  ist (denn Endlichkeit von  $F$  würde bedeuten, dass unendlich viele Folgenglieder übereinstimmen und eine konvergente Teilfolge bilden; und die Existenz eines Häufungspunkts  $a \in A$  von  $F$  würde bedeuten, dass man durch sukzessive Wahl von  $i_1 < i_2 < i_3 < \dots$  mit  $x_{i_1} \in B_1(a)$ ,  $x_{i_2} \in B_{1/2}(a)$ ,  $x_{i_3} \in B_{1/3}(a)$ ,  $\dots$  eine gegen  $a$  konvergente Teilfolge bilden kann). Da Häufungspunkte ausgeschlossen sind, ist jeder Berührungspunkt von  $F$  in  $A$  ein isolierter Punkt von  $F$ ; insbesondere besitzt also jedes  $x_i$  mit  $i \in \mathbb{N}$  eine offene Umgebung  $U_i$  mit  $U_i \cap F = \{x_i\}$ , und außerdem ist  $F$  abgeschlossen in  $A$ . Nach (2b) ist mit  $A$  auch die abgeschlossene Teilmenge  $F$  kompakt, und aus der offenen Überdeckung  $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$  von  $F$  gewinnt man eine endliche Teilüberdeckung  $F \subset U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \dots \cup U_{i_n}$  mit  $n \in \mathbb{N}$ . Nach Konstruktion der  $U_i$  folgt  $F \subset \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}\}$ , was im Widerspruch zur Unendlichkeit von  $F$  steht.

Für den Beweis der verbleibenden Implikation nützt folgendes Lemma (das nicht nur hier, sondern auch in anderen Zusammenhängen nützlich ist):

**Lemma (Lebesgue-Zahl einer Überdeckung).** *Sei  $(O_i)_{i \in I}$  eine offene Überdeckung einer Folgen-kompakten Menge  $A$  in einem metrischen Raum  $\mathcal{X}$ . Dann gibt es ein  $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ , das als Lebesgue-Zahl der Überdeckung bezeichnet wird und durch folgende Eigenschaft charakterisiert ist: Für jede Teilmenge  $P$  von  $A$  mit Durchmesser  $\text{diam } P \leq \delta$  gibt es ein  $i \in I$  mit  $P \subset O_i$ .*

*Beweis des Lemmas.* Wäre das Lemma falsch, so könnte man zu beliebig kleinem  $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$  „Gegenbeispiele“ von Mengen  $P$  ohne die geforderte Eigenschaft finden. Insbesondere gäbe es eine Folge  $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$  von Teilmengen von  $A$  mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} \text{diam } P_k = 0$ , aber  $P_k \not\subset O_i$  für alle  $i \in I$  und  $k \in \mathbb{N}$ . Insbesondere wären alle  $P_k$  nicht-leer, und für jedes  $k \in \mathbb{N}$  könnte man ein  $x_k \in P_k \subset A$  wählen. Gemäß der Folgen-Kompaktheit von  $A$  existierte  $x_* := \lim_{\ell \rightarrow \infty} x_{k_\ell} \in A$  für eine geeignete Teilfolge. Da  $(O_i)_{i \in I}$  offene Überdeckung von  $A$  ist, gäbe es ein  $i_* \in I$  mit  $x_* \in O_{i_*}$  und ein  $r_* \in \mathbb{R}_{>0}$  mit  $B_{r_*}(x_*) \subset O_{i_*}$ . Für  $\ell \gg 1$  würden nun aber  $d_{\mathcal{X}}(x_{k_\ell}, x_*) < \frac{1}{2}r_*$ ,  $\text{diam } P_{k_\ell} < \frac{1}{2}r_*$  und damit auch  $P_{k_\ell} \subset B_{r_*}(x_*) \subset O_{i_*}$  eintreten. Dies steht im Widerspruch zur eingangs geforderten Eigenschaft der  $P_k$ , daher ist der Beweis des Lemmas komplett.  $\square$

Nun kann die für Teil (I) des Hauptsatzes noch benötigte Implikation  $\longleftarrow$  angegangen werden. Dazu wird zuerst gezeigt, dass es zu nicht-leerem, Folgen-kompaktem  $A$  und beliebigem  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$  stets ein  $n \in \mathbb{N}$  und  $x_1, x_2, \dots, x_n \in A$  mit  $A \subset B_\varepsilon(x_1) \cup B_\varepsilon(x_2) \cup \dots \cup B_\varepsilon(x_n)$  gibt. Wäre dies nämlich nicht der Fall so könnte man sukzessive  $x_1 \in A$ ,  $x_2 \in A \setminus B_\varepsilon(x_1)$ ,  $x_3 \in A \setminus (B_\varepsilon(x_1) \cup B_\varepsilon(x_2))$ ,  $x_4 \in A \setminus (B_\varepsilon(x_1) \cup B_\varepsilon(x_2) \cup B_\varepsilon(x_3))$ ,  $\dots$  wählen und auf diese Weise eine ganze Folge  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $A$  mit  $d_{\mathcal{X}}(x_k, x_\ell) \geq \varepsilon$  für beliebige  $k \neq \ell$  in  $\mathbb{N}$  erhalten. Diese Folge hätte aber keine Cauchy-Teilfolge, somit keine konvergente Teilfolge und kann deshalb bei Folgen-kompaktem  $A$  nicht existieren. Damit ist die Existenz von  $n \in \mathbb{N}$  und  $x_1, x_2, \dots, x_n \in A$  mit  $A \subset B_\varepsilon(x_1) \cup B_\varepsilon(x_2) \cup \dots \cup B_\varepsilon(x_n)$  gezeigt.

Ist nun  $A$  Folgen-kompakt und  $(O_i)_{i \in I}$  eine beliebige offene Überdeckung von  $A$ , so wendet man das gerade Gezeigte mit  $\varepsilon = \frac{1}{2}\delta$  an, wobei  $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$  die Lebesgue-Zahl der Überdeckung aus dem Lemma sei. Weil die Teilmengen  $A \cap B_\varepsilon(x_k)$  von  $A$  Durchmesser  $\leq 2\varepsilon = \delta$  haben, gibt es nach dem Lemma Indizes  $i_k \in I$  mit  $A \cap B_\varepsilon(x_k) \subset O_{i_k}$  für alle  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ , und insgesamt folgt

$$A = (A \cap B_\varepsilon(x_1)) \cup (A \cap B_\varepsilon(x_2)) \cup \dots \cup (A \cap B_\varepsilon(x_n)) \subset O_{i_1} \cup O_{i_2} \cup \dots \cup O_{i_n}.$$

Damit ist (Überdeckungs-)Kompaktheit von  $A$  anhand der Definition nachgewiesen, und Teil (I) des Hauptsatzes ist bewiesen.

Für Teil (II) des Hauptsatzes reicht es, die angegebene Version des Satzes von Bolzano-Weierstraß für Mengen in  $\mathbb{K}^N$  zu beweisen, denn jeder  $N$ -dimensionale normierte Raum über  $\mathbb{K}$  kann mit  $\mathbb{K}^N$  identifiziert werden, und gemäß (I) folgt aus Bolzano-Weierstraß auch Heine-Borel. Sei also  $A$  abgeschlossen und beschränkt in  $\mathbb{K}^N$ . Ist  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Punkten  $x_k = ((x_k)_1, (x_k)_2, \dots, (x_k)_N) \in A \subset \mathbb{K}^N$ , so ist wegen der Beschränktheit von  $A$  auch jede Komponentenfolge  $((x_k)_i)_{k \in \mathbb{N}}$  mit  $i \in \{1, 2, \dots, N\}$  beschränkt in  $\mathbb{K}$ . Durch  $N$ -fache Anwendung des (aus der Analysis I bekannten) Satzes von Bolzano-Weierstraß in  $\mathbb{K}$  lässt sich erst eine Teilfolge finden, so dass die ersten Komponenten konvergieren, dann eine weitere Teilfolge hiervon, so dass auch die zweiten Komponenten konvergieren, und so weiter. Insgesamt kann man erreichen, dass  $y_i := \lim_{\ell \rightarrow \infty} (x_{k_\ell})_i \in \mathbb{K}$  für alle  $i \in \{1, 2, \dots, N\}$  existiert. Dies bedeutet  $\lim_{\ell \rightarrow \infty} x_{k_\ell} = (y_1, y_2, \dots, y_N) \in \mathbb{K}^N$ . Da  $A$  abgeschlossen und damit auch Folgen-abgeschlossen in  $\mathbb{K}^N$  ist, ist  $(y_1, y_2, \dots, y_N) \in A$ . Damit ist Folgen-Kompaktheit von  $A$  gezeigt.  $\square$

**Bemerkungen** (zu den Sätzen von Heine-Borel und Bolzano-Weierstraß).

- (1) Die Voraussetzung der **Endlich-Dimensionalität** von  $\mathcal{X}$  ist für die Sätze von Heine-Borel und Bolzano-Weierstraß unverzichtbar. Tatsächlich besagt nämlich ein weiterer Satz von Riesz, dass die abgeschlossene Einheitskugel in jedem *unendlich-dimensionalen* normierten Raum nicht-kompakt ist, so dass Heine-Borel und Bolzano-Weierstraß dort gar nicht gelten können. Speziell für die  $\ell^p$ -Räume lässt sich dies tatsächlich sehr leicht einsehen: Schreibt man  $e_k := (0, 0, \dots, 0, 0, 1, 0, 0, \dots)$  für das Einheitsselement von  $\ell^p$  mit der 1 an der  $k$ -ten Stelle, so gilt  $\|e_k - e_\ell\|_{\ell^p} = 2^{1/p}$  für  $k \neq \ell$  in  $\mathbb{N}$ , also besitzt  $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$  keine konvergente Teilfolge, und die abgeschlossene Einheitskugel in  $\ell^p$  ist nicht kompakt.
- (2) Ersetzt man aber Beschränktheit durch die (im endlich-dimensionalen äquivalente, im Allgemeinen stärkere) sogenannte Totalbeschränktheit, so gilt die Äquivalenz

$A$  kompakt  $\iff A$  Folgen-kompakt  $\iff A$  abgeschlossen in  $\mathcal{X}$  und total beschränkt

aber sogar für Teilmengen  $A$  eines vollständigen metrischen Raums (und mit „ $A$  vollständig“ statt „ $A$  abgeschlossen in  $\mathcal{X}$ “ sogar für Teilmengen  $A$  eines beliebigen metrischen Raums). Dabei heißt  $A$  total beschränkt, wenn es zu jedem  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$  ein  $n \in \mathbb{N}$  und  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathcal{X}$  mit  $A \subset \bigcup_{i=1}^n B_\varepsilon(x_i)$  gibt. Der Beweis der Äquivalenz erfordert neben den oben ausgeführten Argumenten (nur) ein sogenanntes Diagonalfolgenargument und ist Thema der Übungen.

**Definition & Bemerkung (Kompaktifizierung).** Für jeden topologischen Raum  $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$  mit der Hausdorff-Eigenschaft<sup>5</sup> kann man einen Punkt  $\omega \notin \mathcal{X}$  im Sinn der Festlegungen

$$\mathcal{X}_\omega := \mathcal{X} \dot{\cup} \{\omega\}, \quad \mathcal{T}_\omega := \mathcal{T} \cup \{\mathcal{X}_\omega \setminus K : K \text{ kompakte Teilmenge von } \mathcal{X}\}$$

<sup>5</sup>Tatsächlich kann man die Kompaktifizierung sogar für Räume  $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$  ohne die Hausdorff-Eigenschaft einführen; in diesem Fall verlangt man in der Definition von  $\mathcal{T}_\omega$ , dass  $K$  kompakt und abgeschlossen in  $\mathcal{X}$  ist.

hinzufügen und erhält einen weiteren topologischen Raum  $(\mathcal{X}_\omega, \mathcal{T}_\omega)$ , der stets kompakt ist. Ist  $\mathcal{X}$  selbst auch schon kompakt, so bedeutet die Definition von  $(\mathcal{X}_\omega, \mathcal{T}_\omega)$  tatsächlich nur, dass  $\omega$  als isolierter Punkt von  $\mathcal{X}_\omega$  hinzugefügt würde. Ist  $\mathcal{X}$  aber nicht-kompakt, so liegt  $\mathcal{X}$  dicht im kompakten Raum  $\mathcal{X}_\omega$ , und man nennt  $\mathcal{X}_\omega$  dann die **1-Punkt-Kompaktifizierung** oder **Alexandrov-Kompaktifizierung** von  $\mathcal{X}$ .

In speziellen Fällen reduziert sich die Kompaktifizierung auf einfachere und bereits bekannte Konzepte: Beispielsweise entspricht der Grenzübergang gegen den unendlich fernen Punkt  $\infty_{\mathbb{C}}$  der Gaußschen Zahlenebene gerade dem Grenzübergang gegen  $\omega$  in der 1-Punkt-Kompaktifizierung  $\mathbb{C}_\omega$  von  $\mathbb{C}$ . Analog entspricht auch die 1-Punkt-Kompaktifizierung von  $\mathbb{K}^N$  dem Hinzufügen eines unendlich fernen Punktes  $\infty_{\mathbb{K}^N}$ . Die Ergänzung von  $\mathbb{R}$  durch  $\infty$  und  $-\infty$  lässt sich ebenfalls durch eine Topologie auf  $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$  abbilden; hierbei handelt es sich allerdings um eine etwas andere Form der Kompaktifizierung, die auch als 2-Punkt-Kompaktifizierung bezeichnet wird.

Jedenfalls machen alle topologischen Begriffe in Kompaktifizierungen Sinn, so dass man auch uneigentliche Grenzübergänge als Grenzübergänge in topologischen Räumen auffassen kann.

Zu den wichtigsten Sachverhalten in/auf kompakten Mengen gehört die unten folgende, allgemeine Version des Extremalsatzes. Bevor diese Version angegeben wird, sei aber vorbereitend noch eine ebenfalls wichtige Abbildungseigenschaft stetiger Funktionen festgehalten:

**Satz (Stetige Bilder kompakter Mengen sind kompakt.).** Seien  $\mathcal{X}$  und  $\mathcal{Y}$  topologische Räume und  $f: K \rightarrow \mathcal{Y}$  eine stetige Funktion auf  $K \subset \mathcal{X}$ . Ist  $K$  kompakt, so ist auch  $f(K)$  kompakt. Und ist  $K$  Folgen-kompakt, so ist auch  $f(K)$  Folgen-kompakt.

Der Beweis wird in der Vorlesung geführt.

**Hauptsatz (allgemeiner Extremalsatz auf kompakten Mengen).** Seien  $\mathcal{X}$  ein topologischer Raum und  $K$  eine nicht-leere, **kompakte** (oder Folgen-kompakte) Teilmenge von  $\mathcal{X}$ . Dann besitzt jede stetige Funktion  $f: K \rightarrow \mathbb{R}$  eine **Minimal- und eine Maximalstelle** auf  $K$ .

*Beweis.* Nach dem vorigen Satz ist auch  $f(K)$  kompakt (oder Folgen-kompakt). Nach dem Satz über die Charakterisierung kompakter Mengen ist die Teilmenge  $f(K)$  von  $\mathbb{R}$  abgeschlossen und beschränkt, und deshalb ist das Infimum von  $f(K)$  selbst eine Element von  $f(K)$ . Mit anderen Worten gibt es ein  $x \in K$  mit  $f(x) = \inf_K f$ , und dieses  $x$  ist eine Minimalstelle von  $f$  auf  $K$ . Die Existenz einer Maximalstelle begründet man analog.  $\square$

Bei Folgen-kompaktem  $K$  (und generell in metrischen Räumen, in denen Kompaktheit und Folgen-Kompaktheit ja übereinstimmen) kann man den Extremalsatz übrigens auch wie in Abschnitt 3.3 mit Minimal-/Maximalfolgen beweisen.

**Zusatz** (zum Extremalsatz). Folgende **Variante** des Extremalsatzes lässt sich auch **bei fehlender Kompaktheit des Definitionsbereichs** eventuell noch anwenden: Ist  $A$  nicht-leere Teilmenge eines topologischen Raums  $\mathcal{X}$ , ist  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  auf  $A$  stetig, und gilt beim Grenzübergang gegen den zur 1-Punkt-Kompaktifizierung  $A_\omega$  von  $A$  hinzugefügten Punkt  $\omega$  die Bedingung

$$\lim_{A \ni x \rightarrow \omega} f(x) > \inf_A f \quad \left( \text{beispielsweise weil } \lim_{A \ni x \rightarrow \omega} f(x) = \infty \right),$$

so besitzt  $f$  eine Minimalstelle auf  $A$ . Im Fall  $\mathcal{X} = \mathbb{K}^N$  entspricht der Grenzübergang  $A \ni x \rightarrow \omega$  dabei dem Grenzübergang gegen die nicht zu  $A$  gehörigen Randpunkte von  $A$  in  $\mathbb{K}^N$  und bei unbeschränktem  $A$  auch gegen den unendlich fernen Punkt  $\infty_{\mathbb{K}^N}$ .

*Beweis des Zusatzes.* Sei  $\varepsilon := \lim_{A \ni x \rightarrow \omega} f(x) - \inf_A f > 0$ . Es gibt dann eine Umgebung  $A_\omega \setminus K$  von  $\omega$  mit kompaktem  $K \subset A$ , so dass  $f \geq \inf_A f + \frac{1}{2}\varepsilon$  auf  $A \setminus K$  gilt. Insbesondere ist  $K \neq \emptyset$ , nach dem Extremalsatz besitzt  $f$  eine Minimalstelle auf  $K$ , und diese ist wegen der Abschätzung auf  $A \setminus K$  auch eine Minimalstelle von  $f$  auf  $A$ .  $\square$

**Anwendungsbeispiele** (zum Extremalsatz).

- (1) Eine nicht-leere kompakte Menge  $K$  in einem metrischen Raum  $\mathcal{X}$  besitzt stets Extrempunkte, die den Durchmesser realisieren, mit anderen Worten gibt es  $x, y \in K$  mit  $d_{\mathcal{X}}(x, y) = \text{diam } K$ . Man kann diese Punkte als Koordinaten einer nach dem Extremalsatz existenten Maximalstelle  $(x, y)$  der stetigen Funktion  $d_{\mathcal{X}}: K \times K \rightarrow \mathbb{R}$  erhalten.
- (2) **Stetige Funktionen  $f: K \rightarrow \mathcal{Y}$  auf kompakten Mengen  $K$**  mit Werten in einem metrischen Raum  $\mathcal{Y}$  **sind stets beschränkt**, m.a.W. hat ihr Bild  $f(K)$  endlichen Durchmesser. Dies folgt aus der Kompaktheit des stetigen Bildes  $f(K)$  und (1) oder durch direkte Anwendung des Extremalsatzes auf die stetige Abbildung  $K \times K \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto d_{\mathcal{Y}}(f(x), f(y))$ .
- (3) **Viele weitere, für die Rechenpraxis relevante Anwendungen** (des Hauptsatzes und auch des Zusatzes) ergeben sich später bei der **Extremstellenbestimmung bei Funktionen mehrerer Variablen**.

Im Folgenden werden verschiedene Gleichmäßigkeitseigenschaften bei allgemeinen Funktionen behandelt und mit Kompaktheit (von Definitionsbereichen) in Verbindung gebracht. Zum Teil kamen solche Eigenschaften für Funktionen mit spezielleren Definitions- und Wertebereichen bereits in der Analysis I vor. Hier werden diese Eigenschaften aber weitgehend verallgemeinert.

**Definition (gleichmäßige Stetigkeit).** Seien  $\mathcal{X}$  und  $\mathcal{Y}$  metrische Räume. Eine Abbildung  $f: D \rightarrow \mathcal{Y}$  heißt **gleichmäßig stetig** auf  $D \subset \mathcal{X}$ , wenn zu jedem  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$  ein  $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$  existiert, so dass für  $x, \tilde{x} \in D$  gilt:

$$d_{\mathcal{X}}(x, \tilde{x}) < \delta \implies d_{\mathcal{Y}}(f(x), f(\tilde{x})) < \varepsilon.$$

**Bemerkungen** (zu gleichmäßiger Stetigkeit).

- (1) Gleichmäßige Stetigkeit ist eine stärkere Eigenschaft als „normale“ Stetigkeit. Der entscheidende Punkt und der einzige Unterschied ist, dass **das  $\delta$  bei gleichmäßiger Stetigkeit nicht von  $x$  abhängen darf**, sondern vielmehr *ein* nur von  $f$  und  $\varepsilon$  abhängiges  $\delta$  für alle  $x$  und  $\tilde{x}$  ausreichen muss.
- (2) **Hölder-stetige Funktionen und damit insbesondere Lipschitz-stetige Funktionen sind gleichmäßig stetig.** Tatsächlich ist **gleichmäßige Stetigkeit** von  $f: D \rightarrow \mathcal{Y}$  auf  $D$  **äquivalent zur Existenz eines Stetigkeitsmoduls** für  $f$  auf  $D$ , d.h. zur Existenz einer Funktion  $\omega: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$  mit  $\omega(0+) = \omega(0) = 0$  und  $d_{\mathcal{Y}}(f(x), f(\tilde{x})) \leq \omega(d_{\mathcal{X}}(x, \tilde{x}))$  für alle  $x, \tilde{x} \in D$ .
- (3) Das Konzept gleichmäßiger Stetigkeit kann auch in topologischen Vektorräumen, die sowohl die Struktur eines topologischen Raums als auch eine damit verträgliche Vektorraum-Struktur tragen, erklärt werden. Ganz allgemein macht gleichmäßige Stetigkeit sogar in sogenannten uniformen Räumen, einer gemeinsamen Verallgemeinerung metrischer Räume und topologischer Vektorräume, Sinn.

Ein oft nützliche Konsequenz gleichmäßiger Stetigkeit ist:

**Satz (über stetige Fortsetzung auf den Abschluss).** *Seien  $\mathcal{X}$  ein metrischer Raum und  $\mathcal{Y}$  ein vollständiger metrischer Raum. Ist  $f: D \rightarrow \mathcal{Y}$  **gleichmäßig stetig** auf  $D \subset \mathcal{X}$ , so gibt es genau eine auf  $\overline{D}$  stetige Abbildung  $\overline{f}: \overline{D} \rightarrow \mathcal{Y}$  mit  $\overline{f} = f$  auf  $D$ .*

Ein Beweis des Satzes wird in der Vorlesung geführt.

Die **eigentliche Bedeutung der Kompaktheitsbegriffe** besteht darin, dass man auf kompakten Mengen **automatische Gleichmäßigkeitsaussagen** erhalten und **Lokal-Global-Schlüsse** durchführen kann. Das erste dieser Prinzipien wird nun anhand eines grundlegenden Satzes erläutert, das zweite danach anhand eines eher prototypischen Sachverhalts:

**Hauptsatz (über gleichmäßige Stetigkeit auf Kompakta).** *Seien  $\mathcal{X}$  und  $\mathcal{Y}$  metrische Räume. Ist  $f: K \rightarrow \mathcal{Y}$  stetig auf einer kompakten Teilmenge  $K$  von  $\mathcal{X}$ , so ist  $f$  schon gleichmäßig stetig auf  $K$ .*

Der Hauptsatz wird in der Vorlesung mit einem einfachen Widerspruchsargument auf Grundlage der Folgen-Kompaktheit von  $K$  bewiesen.

**Beispiel.** Ein grundlegendes Beispiel für einen **Lokal-Global-Schluss** ist folgende Aussage: Ist  $f: K \rightarrow \mathbb{K}$  auf einer kompakten Teilmenge  $K$  eines topologischen Raums  $\mathcal{X}$  *lokal* beschränkt, so ist  $f$  auf ganz  $K$  beschränkt.

Die lokale Beschränktheit bedeutet dabei, dass zu jedem  $x \in K$  eine offene Umgebung  $U_x$  und ein  $M_x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  mit  $|f| \leq M_x$  auf  $U_x$  existieren. Ist dies gegeben, so kann man (o.E. nur für  $K \neq \emptyset$ ) aus der offenen Überdeckung  $(U_x)_{x \in K}$  eine Teilüberdeckung  $K \subset U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup \dots \cup U_{x_n}$  mit  $x_1, x_2, \dots, x_n \in K$  gewinnen. Mit  $|f| \leq \max\{M_{x_1}, M_{x_2}, \dots, M_{x_n}\} < \infty$  folgt die Beschränktheit von  $f$  auf ganz  $K$ .

Zum Abschluss des Abschnitts (und des Kapitels) werden ein allgemeines Konzept gleichmäßiger Konvergenz und damit zusammenhängende Sätze behandelt:

**Definition (gleichmäßige Konvergenz, gleichmäßige Cauchy-Folgen).** *Seien  $D$  eine Menge,  $\mathcal{Y}$  ein metrischer Raum und  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Funktionen  $f_n: D \rightarrow \mathcal{Y}$ . Man sagt, dass  $f_n$  bei  $n \rightarrow \infty$  **gleichmäßig** auf  $D$  gegen eine Grenzfunktion  $f: D \rightarrow \mathcal{Y}$  **konvergiert**, wenn gilt:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in D} d_{\mathcal{Y}}(f_n(x), f(x)) = 0.$$

Man nennt  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine auf  $D$  **gleichmäßige Cauchy-Folge**, wenn  $\sup_{x \in D} d_{\mathcal{Y}}(f_m(x), f_n(x))$  beim Grenzübergang  $n \geq m \rightarrow \infty$  gegen Null geht.

**Satz (Cauchy-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz).** *Seien  $D$  eine Menge und  $\mathcal{Y}$  ein vollständiger metrischer Raum. Eine Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Funktionen  $f_n: D \rightarrow \mathcal{Y}$  ist genau dann gleichmäßig konvergent auf  $D$ , wenn sie auf  $D$  gleichmäßige Cauchy-Folge ist.*

**Satz (über Stetigkeit der Grenzfunktion bei gleichmäßiger Konvergenz).** *Seien  $\mathcal{X}$  ein topologischer und  $\mathcal{Y}$  ein metrischer Raum. Ist  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge stetiger Funktionen  $f_n: D \rightarrow \mathcal{Y}$  auf einer Teilmenge  $D$  von  $\mathcal{X}$ , und konvergiert  $f_n$  bei  $n \rightarrow \infty$  gleichmäßig auf  $D$  gegen  $f: D \rightarrow \mathcal{Y}$ , so ist die Grenzfunktion  $f$  stetig auf  $D$ .*

Für Funktionen mit Werten in  $\mathcal{Y} = \mathbb{K}$  wurde diese Sätze bereits in den Abschnitten 2.5 und 3.3 behandelt. Die Beweise verlaufen im hier angegebenen allgemeinen Fall völlig analog.

Ein konzeptionell noch etwas schwierigerer Begriff ist:

**Definition (gleichgradige Stetigkeit).** Seien  $\mathcal{X}$  ein topologischer,  $\mathcal{Y}$  ein metrischer Raum und  $P$  eine beliebige (Parameter-)Menge. Eine Familie  $(f_p)_{p \in P}$  von Funktionen  $f_p: D \rightarrow \mathcal{Y}$  heißt **gleichgradig stetig** auf  $D \subset \mathcal{X}$ , wenn es zu jedem  $x \in D$  und  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$  eine Umgebung  $U$  von  $x$  in  $\mathcal{X}$  gibt, so dass

$$d_{\mathcal{Y}}(f_p(\tilde{x}), f_p(x)) < \varepsilon \quad \text{für alle } \tilde{x} \in U \cap D \text{ und alle } p \in P$$

gilt.

**Bemerkungen** (zu gleichgradiger Stetigkeit).

- (1) Gleichgradige Stetigkeit von  $(f_p)_{p \in P}$  ist eine stärkere Eigenschaft als Stetigkeit der einzelnen  $f_p$  für alle  $p \in P$ . Die den Unterschied ausmachende „Gleichgradigkeit“ besteht darin, dass **die Umgebung  $U$  nicht vom Parameter  $p$  abhängen darf**, sondern *eine* nur von der Familie  $(f_p)_{p \in P}$  sowie  $\varepsilon$  und  $x$  abhängige Umgebung  $U$  für alle  $p \in P$  ausreichen muss.
- (2) Bei metrischem  $\mathcal{X}$  spricht man von **gleichgradiger gleichmäßiger Stetigkeit** einer Familie stetiger Funktionen  $D \rightarrow \mathcal{Y}$  auf  $D \subset \mathcal{X}$ , wenn das für Stetigkeit relevante  $\delta$  wie bei gleichmäßiger Stetigkeit nicht vom Punkt  $x$  und wie bei gleichgradiger Stetigkeit nicht vom Parameter  $p$  abhängen darf. Äquivalent ist, dass es einen gemeinsamen Stetigkeitsmodul für alle Funktionen der Familie gibt. Bei kompaktem Definitionsbereich  $D$  ist eine gleichgradig stetige Familie von Funktionen automatisch gleichmäßig stetig.

Die Bedeutung gleichgradiger Stetigkeit liegt zu einem großen Teil darin, dass sie die Anwendung des folgenden Satzes ermöglicht.

**Satz (Auswahlsatz/Kompaktheitssatz von Arzelà-Ascoli).** Seien  $\mathcal{X}$  ein topologischer und  $\mathcal{Y}$  ein endlich-dimensionaler (!) normierter Raum. Ist eine Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Funktionen  $f_n: K \rightarrow \mathcal{Y}$  gleichmäßig beschränkt und gleichgradig stetig auf einer kompakten (!) Teilmenge  $K$  von  $\mathcal{X}$ , so gibt es eine Teilfolge  $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ , die gleichmäßig auf  $K$  gegen eine stetige Funktion  $f: K \rightarrow \mathcal{Y}$  konvergiert.

**Bemerkungen.**

- (1) Der unten folgende Beweis und der Satz bleiben gültig, wenn statt gleichmäßiger Beschränktheit von  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  (d.h.  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_K |f| < \infty$ ) nur punktweise Beschränktheit von  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  (d.h.  $\sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n(x)| < \infty$  für alle  $x \in K$ ) vorausgesetzt wird. Aus der schwächeren punktweisen Beschränktheit folgt zusammen mit den anderen Voraussetzungen des Satzes aber automatisch gleichmäßige Beschränktheit, daher bedeutet letztere keine echte Einschränkung.
- (2) Den Satz von Arzelà-Ascoli macht eine **Kompaktheitsaussage im Funktionenraum**  $C^0(K, \mathcal{Y})$  aller stetigen Funktionen  $K \rightarrow \mathcal{Y}$  und **ersetzt** (bei nicht-trivialem  $K$ ) **die** im unendlich-dimensionalen Raum  $C^0(K, \mathcal{Y})$  **nicht gültigen Sätze von Heine-Borel und Bolzano-Weierstraß**. Genauer wird hierbei  $C^0(K, \mathcal{Y})$  mit der  $L^\infty$ -Norm  $\|f\|_{C^0(K, \mathcal{Y})} := \sup_{x \in K} \|f(x)\|_{\mathcal{Y}}$  versehen, und der Satz von Arzelà-Ascoli macht dann über Teilmengen  $F$  des Banach-Raums  $C^0(K, \mathcal{Y})$  die Aussage

$$F \text{ abgeschlossen, beschränkt und gleichgradig stetig} \implies F \text{ kompakt}$$

(wobei gleichgradige Stetigkeit der Menge  $F$  natürlich nichts anderes bedeutete als gleichgradige Stetigkeit der Familie  $(f)_{f \in F}$ ). Die Umkehrimplikation zu dieser Aussage gilt übrigens auch und ist etwas einfacher einzusehen, es handelt sich also sogar um eine Charakterisierung aller kompakten Mengen in  $C^0(K, \mathcal{Y})$ , und man kann statt  $\implies$  sogar  $\iff$  schreiben.



- (3) **Typische Funktionenfolgen**  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , auf die der Satz von Arzelà-Ascoli Anwendung findet, sind solche, bei denen alle  $f_n$  **mit gleichem Exponenten und gleicher Konstante Hölder-/Lipschitz-stetig** sind.

*Beweis des Satzes von Arzelà-Ascoli.* Sei  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$  fixiert. Gemäß der vorausgesetzten gleichgradigen Stetigkeit gibt es dann für jedes  $x \in K$  eine offene Umgebung  $U_x$  von  $x$  in  $K$ , so dass

$$d_{\mathcal{Y}}(f_n(\tilde{x}), f_n(x)) < \varepsilon \quad \text{für alle } \tilde{x} \in U_x \text{ und alle } n \in \mathbb{N}$$

gilt. Zu der offenen Überdeckung  $(U_x)_{x \in K}$  von  $K$  liefert die Kompaktheit von  $K$  ein  $\ell \in \mathbb{N}$  und  $x_1, x_2, \dots, x_\ell \in K$  mit

$$K \subset U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup \dots \cup U_{x_\ell}.$$

Nun sind  $(f_n(x_1))_{n \in \mathbb{N}}, (f_n(x_2))_{n \in \mathbb{N}}, \dots, (f_n(x_\ell))_{n \in \mathbb{N}}$  jeweils beschränkte Folgen in  $\mathcal{Y}$  (dies folgt aus der vorausgesetzten gleichmäßigen Beschränktheit, wäre aber auch bei nur punktwiser Beschränktheit offensichtlich erfüllt). Daher liefert  $\ell$ -fache sukzessive Anwendung des Satzes von Bolzano-Weierstraß auf diese Folgen im endlich-dimensionalen normierten Raum  $\mathcal{Y}$  (oder alternativ eine einzelne Anwendung im immer noch endlich-dimensionalen normierten Raum  $\mathcal{Y}^\ell$ ) eine Teilfolge  $(f_{n_k^*})_{k \in \mathbb{N}}$  von  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , so dass  $(f_{n_k^*}(x_i))_{k \in \mathbb{N}}$  für alle  $i \in \{1, 2, \dots, \ell\}$  in  $\mathcal{Y}$  konvergiert. Wegen der Cauchy-Eigenschaft konvergenter Folgen erhält man durch Weglassen endlich vieler Glieder eine weitere Teilfolge  $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ , so dass

$$d_{\mathcal{Y}}(f_{n_k}(x_i), f_{n_h}(x_i)) < \varepsilon \quad \text{für alle } h, k \in \mathbb{N} \text{ und } i \in \{1, 2, \dots, \ell\}$$

gilt. Wegen der eingangs getroffenen Wahl der Umgebungen  $U_{x_i}$ , ergibt sich daraus

$$d_{\mathcal{Y}}(f_{n_k}(\tilde{x}), f_{n_h}(\tilde{x})) \leq d_{\mathcal{Y}}(f_{n_k}(\tilde{x}), f_{n_k}(x_i)) + d_{\mathcal{Y}}(f_{n_k}(x_i), f_{n_h}(x_i)) + d_{\mathcal{Y}}(f_{n_h}(x_i), f_{n_h}(\tilde{x})) < 3\varepsilon$$

für alle  $h, k \in \mathbb{N}$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, \ell\}$  und  $\tilde{x} \in U_{x_i}$ . In Anbetracht von  $K \subset U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup \dots \cup U_{x_\ell}$  ist somit

$$\sup_K d_{\mathcal{Y}}(f_{n_k}, f_{n_h}) \leq \varepsilon \quad \text{für alle } h, k \in \mathbb{N}$$

verifiziert.

Die bisher bei fixiertem  $\varepsilon$  durchgeführte Argumentation wird nun auf verschiedene Wahlen von  $\varepsilon$  angewandt. Man verwendet sie zunächst für  $\varepsilon = 1$  und erhält eine Teilfolge  $(f_{n_k^1})_{k \in \mathbb{N}}$  von  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit

$$\sup_K d_{\mathcal{Y}}(f_{n_k^1}, f_{n_h^1}) \leq 1 \quad \text{für alle } h, k \in \mathbb{N}.$$

In einem zweiten Schritt mit  $\varepsilon = \frac{1}{2}$  erhält man eine weitere Teilfolge  $(f_{n_k^2})_{k \in \mathbb{N}}$  von  $(f_{n_k^1})_{k \in \mathbb{N}}$  mit

$$\sup_K d_{\mathcal{Y}}(f_{n_k^2}, f_{n_h^2}) \leq \frac{1}{2} \quad \text{für alle } h, k \in \mathbb{N}.$$

Durch iterative Fortsetzung mit  $\varepsilon = \frac{1}{j}$  erhält man auch für jedes  $j \in \mathbb{N}_{\geq 3}$  eine Teilfolge  $(f_{n_k^j})_{k \in \mathbb{N}}$  von  $(f_{n_k^{j-1}})_{k \in \mathbb{N}}$  mit

$$\sup_K d_{\mathcal{Y}}(f_{n_k^j}, f_{n_h^j}) \leq \frac{1}{j} \quad \text{für alle } h, k \in \mathbb{N}.$$

Man geht nun zur sogenannten Diagonalfolge  $(f_{n_k^k})_{k \in \mathbb{N}}$  über. Für jedes  $j \in \mathbb{N}$  ist diese Folge ab dem  $j$ -ten Glied eine Teilfolge von  $(f_{n_k^j})_{k \in \mathbb{N}}$ , erfüllt also

$$\sup_K d_{\mathcal{Y}}(f_{n_k^k}, f_{n_h^h}) \leq \frac{1}{j} \quad \text{für alle } h, k \in \mathbb{N}_{\geq j}.$$

Damit ist die Teilfolge  $(f_{n_k^k})_{k \in \mathbb{N}}$  von  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine gleichmäßige Cauchy-Folge von Funktionen  $K \rightarrow \mathcal{Y}$ . Nach dem Cauchy-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz konvergiert  $(f_{n_k^k})_{k \in \mathbb{N}}$  gleichmäßig auf  $D$  gegen eine Grenzfunktion  $f: K \rightarrow \mathcal{Y}$ . Gemäß dem Satz über Stetigkeit der Grenzfunktion ist  $f$  auf  $K$  stetig, und damit ist der Satz von Arzelà-Ascoli bewiesen.  $\square$

## Kapitel 7

# Nachträge zur Differential- und Integralrechnung einer Variablen

In diesem Kapitel werden zwei wichtige, aber sehr unterschiedliche Anwendungen der Differential- und Integralrechnung in einer Variablen kurz angerissen. Hierbei spielen auch Konzepte aus Kapitel 6 eine Rolle, so dass sich die Behandlung erst an dieser Stelle anbietet.

### 7.1 Gewöhnliche Differentialgleichungen (kurze Einführung)

**Terminologie** (bei gewöhnlichen Differentialgleichungen). Als *gewöhnliche Differentialgleichung (GDG)* bezeichnet man eine Gleichung, in der eine auf einem Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  definierte Funktion  $u$  einer reellen Variablen und endliche viele Ableitungen von  $u$  auftreten. Es handelt sich also um eine Gleichung des Typs

$$F(\cdot, u, u', u'', u''', \dots, u^{(m-1)}, u^{(m)}) \equiv 0 \quad \text{auf } I$$

beziehungsweise

$$F(x, u(x), u'(x), u''(x), u'''(x), \dots, u^{(m-1)}(x), u^{(m)}(x)) = 0 \quad \text{für alle } x \in I.$$

Dabei heißt die Ordnung  $m \in \mathbb{N}$  der höchsten tatsächlich<sup>1</sup> auftretenden Ableitung von  $u$  die **Ordnung der GDG**. Die Funktion  $F$  nennt man die **Strukturfunktion** der GDG und betrachtet sie als gegeben, die Funktion  $u$  heißt die **gesuchte oder unbekannte Funktion**, und ein konkretes  $m$ -fach differenzierbares  $u$ , für das die Gleichung erfüllt ist, heißt eine **Lösung der GDG**. Im Fall einer Strukturfunktion  $F: D \rightarrow \mathbb{K}$  auf  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^{1+m}$  und einer  $\mathbb{K}$ -wertigen gesuchten Funktion  $u: I \rightarrow \mathbb{K}$  spricht man von einer **Einzel-GDG** oder einer **skalaren GDG** für eine skalare Funktion  $u$ , im Fall einer Strukturfunktion  $F: D \rightarrow \mathcal{X}$  auf  $D \subset \mathbb{R} \times \mathcal{X}^{1+m}$  und einer gesuchten Funktion  $u: I \rightarrow \mathcal{X}$  mit Werten in einem Banach-Raum<sup>2</sup>  $\mathcal{X}$  spricht man von einem **System von GDGen** für eine Vektorwertige Funktion. Meist ist dabei  $\mathcal{X} = \mathbb{K}^N$ ; dann handelt es sich genauer um ein System von  $N$  GDGen für  $N$  unbekannte (Komponenten-)Funktionen.

<sup>1</sup>Hier wird implizit unterstellt, dass  $m$  und  $F$  sinnvoll gewählt wurden, nämlich so, dass  $u^{(m)}$  tatsächlich auftritt, d.h. m.a.W. so, dass es keine Funktion  $\tilde{F}$  mit  $F(\cdot, u, u', u'', u''', \dots, u^{(m)}) = \tilde{F}(\cdot, u, u', u'', u''', \dots, u^{(m-1)})$  für alle  $m$ -fach differenzierbaren Funktionen  $u$  auf  $I$  gibt.

<sup>2</sup>Ableitungen  $\mathcal{X}$ -wertiger Funktionen können genau wie Ableitungen  $\mathbb{K}$ -wertiger Funktionen über Differenzenquotienten erklärt werden, wobei die Konvergenz der Differenzenquotienten in der Norm von  $\mathcal{X}$  stattfindet. Dieses Konzept kommt hier nur am Rande vor; es wird in Abschnitt 8.1 noch etwas genauer beleuchtet.

**Bemerkung.** *Gewöhnliche* Differentialgleichungen zeichnen sich dadurch aus, dass die gesuchte Funktion von einer reellen Variablen abhängt. Hängt die gesuchte Funktion selbst von mehreren Variablen ab, so spricht man stattdessen von einer *partiellen* Differentialgleichung.

Die reichhaltige Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen kann in diesem Abschnitt nur angerissen werden. Zunächst werden dazu zwei grundlegende Methoden zur expliziten Berechnung von Lösungen behandelt. Die erste wird als Satz formuliert und erlaubt die allgemeine Lösung gewisser einfacher GDGen durch höchstens zwei Stammfunktionsbildungen:

**Satz (Lösungsformel für die allgemeine skalare lineare GDG erster Ordnung).** *Sei  $I$  ein Intervall positiver Länge in  $\mathbb{R}$ , und seien  $a, b \in C^0(I, \mathbb{K})$  stetig. Dann hat die lineare GDG*

$$u' = au + b \text{ auf } I \quad \text{beziehungsweise} \quad u'(x) = a(x)u(x) + b(x) \text{ für } x \in I \quad (*)$$

*genau die Funktionen  $u = e^A(B+C)$  mit Stammfunktionen  $A$  zu  $a$  und  $B$  zu  $e^{-A}b$  auf  $I$  sowie einer Konstante  $C \in \mathbb{K}$  als Lösungen. Fordert man zusätzliche eine Anfangsbedingung (AB)*

$$u(x_0) = y_0 \quad (**)$$

*mit  $x_0 \in I$ ,  $y_0 \in \mathbb{K}$ , so ist die eindeutige Lösung  $u$  des aus GDG (\*) und AB (\*\*) bestehenden Anfangswertproblems (AWPs) gegeben durch*

$$u(x) = e^{A(x)}[B(x) - B(x_0) + y_0 e^{-A(x_0)}] = e^{A(x)} \left[ \int_{x_0}^x e^{-A(t)} b(t) dt + y_0 e^{-A(x_0)} \right] \quad \text{für } x \in I.$$

**Bemerkungen** (zu linearen GDG, Homogenität und Inhomogenität).

- (1) Die **GDG (\*) heißt linear**, da die Funktionen  $u$  und  $u'$  affin linear auftreten. Dass die Variable  $x$  im Allgemeinen nicht linear auftritt, spielt für diese Terminologie keine Rolle.
- (2) Man nennt  $a$  die Koeffizientenfunktion und  $b$  die **Inhomogenität** der linearen Erster-Ordnung-GDG (\*). Im **homogenen Fall  $b \equiv 0$**  sind die Lösungen  $u$  der GDG (\*) genau die Funktionen  $u = Ce^A$ , und die eindeutige Lösung des AWP's (\*)-(\*\*) erhält man als

$$u(x) = y_0 e^{A(x)-A(x_0)} = y_0 \exp \left[ \int_{x_0}^x a(t) dt \right] \quad \text{für } x \in I.$$

*Beweis des Satzes.* Dass  $e^A(B+C)$  Lösung von (\*) ist, verifiziert man durch die Rechnung (mit HDI, Produkt- und Kettenregel; beachte  $A' = a$ ,  $B' = e^{-A}b$ )

$$[e^A(B+C)]' = ae^A(B+C) + e^A e^{-A}b = a[e^A(B+C)] + b \quad \text{auf } I.$$

Um zu zeigen, dass alle Lösungen die behauptete Form haben, argumentiert man wie folgt: Ist  $u$  Lösung der homogenen GDG  $u' = au$ , so folgt

$$(e^{-A}u)' = e^{-A}[u' - au] \equiv 0 \quad \text{auf } I.$$

Nach dem Konstanzsatz ist damit  $e^{-A}u \equiv C$  und  $u = Ce^A$  auf  $I$ . Ist  $u$  Lösung der inhomogenen GDG  $u' = au + b$ , so folgt

$$(u - e^A B)' = u' - ae^A B - e^A e^{-A} b = au + b - ae^A B - b = a(u - e^A B) \quad \text{auf } I,$$

und dies versteht man als homogene GDG für  $u - e^A B$ . Gemäß dem schon Gezeigten ergibt sich erst  $u - e^A B = Ce^A$  und dann  $u = e^A(B+C)$  auf  $I$ .

Die Lösungsformel für das AWP folgt problemlos, indem man  $B$  als unbestimmtes Integral schreibt und die Konstante  $C$  durch Einsetzen bestimmt.  $\square$

**Beispiele** (für Anwendungen der Lösungsformel).

(1) Bei der homogenen linearen GDG

$$u' = \lambda u \quad \text{auf } ]-\infty, \infty[$$

mit Parameter  $\lambda \in \mathbb{K}$  zeigt der Satz (mit  $a \equiv -\lambda$ ,  $A(x) = -\lambda x$ ), dass man durch  $u(x) = Ce^{\lambda x}$  mit Konstanten  $C \in \mathbb{K}$  alle  $\mathbb{K}$ -wertigen Lösungen erhält.

(2) Als Lösung des AWP

$$u'(x) = \frac{2}{x}u(x) + x \log x \quad \text{für } x \in ]0, \infty[, \quad u(1) = 2$$

berechnet man mit  $A(x) = 2 \log x$  im Satz:

$$\begin{aligned} u(x) &= e^{2 \log x} \left[ \int_1^x e^{-2 \log t} t \log t \, dt + 2e^{-2 \log 1} \right] \\ &= x^2 \left[ \int_1^x \frac{\log t}{t} \, dt + 2 \right] = x^2 \left[ \frac{1}{2}(\log x)^2 - \frac{1}{2}(\log 1)^2 + 2 \right] = \frac{1}{2}x^2(\log x)^2 + 2x^2. \end{aligned}$$

Im Folgenden geht es um eine zweite wichtige Methode zur Berechnung expliziter Lösungen, die auch manche nicht-linearen Erster-Ordnung-GDGen erfasst.

**Verfahren (Separation der Variablen).** *Man geht, soweit möglich, in folgender Weise vor:*

- **Schritt 1 (eigentliche Separation der Variablen):** Falls möglich (Einfach probieren, ob es geht!) bringt man durch Umformungen die GDG auf die Form

$$g(u(x))u'(x) = h(x) \quad \text{für } x \in I$$

mit stetigen Funktionen  $g: J \rightarrow \mathbb{R}$  und  $h: I \rightarrow \mathbb{R}$  auf Intervallen  $I$  und  $J$ . Die hierbei hergestellte Form bezeichnet man als **GDG mit separierten Variablen**.

- **Schritt 2 (Stammfunktionsbildung):** Für Stammfunktionen  $G$  zu  $g$  auf  $J$  und  $H$  zu  $h$  auf  $I$  — die es zu berechnen gilt — erhält man die Gleichung

$$G(u(x)) = H(x) + C \quad \text{für } x \in I$$

mit einer Konstante  $C \in \mathbb{R}$ .

- **Schritt 3 (Auflösen):** Hat  $g$  in  $J$  keine Nullstelle, so kann man jedenfalls für solche  $C$  mit  $H(I) + C \subset G(J)$  nach  $u(x)$  auflösen und bekommt durch

$$u(x) = G^{-1}(H(x) + C) \quad \text{für } x \in I$$

mit der (dann existenten) differenzierbaren Umkehrfunktion  $G^{-1}: G(J) \rightarrow J$  zu  $G$  Lösungen der ursprünglichen GDG.

- **Schritt 4 (Einsetzen der AB):** Bei gegebener AB  $u(x_0) = y_0$  mit  $x_0 \in I$ ,  $y_0 \in J$  kann die Konstante  $C$  oft (eindeutig) bestimmt werden.

**Beispiel** (zur Separation der Variablen). Die nicht-lineare Erster-Ordnung-GDG

$$3u'(x) = \frac{x^3}{u(x)^2} \quad \text{für } x \in ]-\infty, \infty[$$

kann in die GDG  $3u(x)^2u'(x) = x^3$  mit separierten Variablen umgeformt werden. Stammfunktionsbildung gibt  $u(x)^3 = \frac{1}{4}x^4 + C$ , und durch Auflösen ergibt sich für Lösungen  $u$  die explizite Formel (in der  $\sqrt[3]{t}$  auch für negative  $t$  die eindeutige reelle dritte Wurzel bezeichnet)

$$u(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{4}x^4 + C}.$$

Man erhält hier aber übrigens nur für  $C \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  Lösungen  $u$  auf ganz  $\mathbb{R}$ . Für  $C \in \mathbb{R}_{< 0}$  hat die durch die vorausgehende Formel gegebene Funktion  $u$  dagegen Nichtdifferenzierbarkeitsstellen bei  $x = \pm\sqrt[4]{4|C|}$  und löst nur auf Teilintervallen von  $]-\infty, -\sqrt[4]{4|C}|$ ,  $]-\sqrt[4]{4|C}|, \sqrt[4]{4|C}|$  und  $]\sqrt[4]{4|C}|, \infty[$  sowohl die eingangs betrachtete als auch die schon umgeformte GDG.

Der theoretische Hintergrund des letzten Verhaltens besteht darin, dass im vorliegenden Fall mit  $G(y) = y^3$ ,  $H(x) = \frac{1}{4}x^4$  eine Nullstelle von  $g = G'$  bei  $y = 0$  vorliegt. Das Verfahren ist daher *nicht* mit  $J = ]-\infty, \infty[$ , sondern bestenfalls mit  $J = ]0, \infty[$  oder  $J = ]-\infty, 0[$  anwendbar, und  $H(I) + C = \{\frac{1}{4}x^4 + C : x \in I\}$  ist für  $C < 0$  und größere als die genannten drei Intervalle  $I$  eben nicht in einem erlaubten Bildintervalle  $G(J) = ]0, \infty[$  oder  $G(J) = ]-\infty, 0[$  enthalten.

Ist zusätzlich zur obigen GDG die AB  $u(0) = 1$ , gegeben, so erhält man durch Einsetzen  $\sqrt[3]{\frac{1}{4}0^4 + C} = 1$ , was sich sofort zu  $C = 1$  vereinfacht. Das AWP aus der GDG und dieser AB hat also die eindeutige Lösung  $u(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{4}x^4 + 1}$ .

Bei allgemeineren GDGen ist oft schwierig oder gar unmöglich, explizite Formeln für ihre Lösungen herzuleiten. Es gibt aber eine abstrakte Theorie, die zumindest auf kleinen Intervallen Existenz und gutartiges Verhalten von Lösungen sehr viel allgemeinerer GDGen und GDG-Systeme garantiert. Hier werden zwei grundlegende Resultate dieser Theorie zwar vorgestellt, die Beweise werden jedoch nur sehr grob angedeutet:

**Satz** (über lokale Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen von AWPen). *Seien  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{X}$  ein Banach-Raum,  $D$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R} \times \mathcal{X}^m$ ,  $f: D \rightarrow \mathcal{X}$  eine stetige Funktion und  $(x_0, y_0, y_1, y_2, \dots, y_{m-2}, y_{m-1}) \in D$ . Für das  $m$ -ter-Ordnung-GDG-System*

$$u^{(m)} = f(\cdot, u, u', u'', \dots, u^{(m-2)}, u^{(m-1)}) \quad \text{für } \mathcal{X}\text{-wertige Funktionen } u$$

samt den  $m$  ABen

$$u(x_0) = y_0, \quad u'(x_0) = y_1, \quad u''(x_0) = y_2, \quad \dots, \quad u^{(m-2)}(x_0) = y_{m-2}, \quad u^{(m-1)}(x_0) = y_{m-1}$$

gelten:

(I) **Lokaler Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf:** *Ist  $f$  auf einer Umgebung  $U$  von  $(x_0, y_0, y_1, \dots, y_{m-1})$  partiell Lipschitz-stetig in den  $\mathcal{X}^m$ -Variablen (d.h.  $\|f(x, \tilde{y}) - f(x, y)\|_{\mathcal{X}} \leq C\|\tilde{y} - y\|_{\mathcal{X}^m}$  für alle  $(x, y), (x, \tilde{y}) \in U$  und ein  $C \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ), so gibt es ein  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{> 0}$ , so dass die GDG auf  $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$  genau eine Lösung mit erfüllten ABen besitzt.*

(II) **Lokaler Existenzsatz von Peano:** *Ist  $\mathcal{X}$  endlich-dimensional, so gibt es ein  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{> 0}$ , so dass die GDG auf  $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$  mindestens eine Lösung mit erfüllten ABen besitzt.*

---

<sup>3</sup> $\mathcal{X}^m$  und  $\mathbb{R} \times \mathcal{X}^m$  werden durch  $\|(y_0, y_1, \dots, y_{m-1})\|_{\mathcal{X}^m} := \sum_{i=0}^{m-1} \|y_i\|_{\mathcal{X}}$  und  $\|(x, y)\|_{\mathbb{R} \times \mathcal{X}} := |x| + \|y\|_{\mathcal{X}^m}$  mit Produkt-Normen versehen.

**Bemerkung und Beispiel** (zu den Sätzen von Picard-Lindelöf und Peano). Die partielle Lipschitz-Bedingung des Satzes von Picard-Lindelöf ist essentiell, um lokale Eindeutigkeit der Lösung sicherzustellen. Dies zeigen einfache Beispiele wie die skalare Erster-Ordnung-GDG

$$u' = 2\sqrt{|u|} \quad \text{auf } \mathbb{R},$$

bei der nahe  $y = 0$  keine Lipschitz-Bedingung gilt und das AWP zur AB  $u(x_0) = 0$  mit  $x_0 \in \mathbb{R}$  eine 2-Parameter-Schar von Lösungen  $u$  besitzt, nämlich alle durch

$$u(x) = \begin{cases} -(x-C_*)^2 & \text{für } x \leq C_* \\ 0 & \text{für } C_* \leq x \leq C^* \\ (x-C^*)^2 & \text{für } C^* \leq x \end{cases}$$

mit Konstanten  $C_* \in \mathbb{R}_{\leq x_0} \cup \{-\infty\}$  und  $C^* \in \mathbb{R}_{\geq x_0} \cup \{\infty\}$  gegeben.

Der Satz von Peano kommt ohne partielle Lipschitz-Bedingung aus und ist damit (abgesehen von der Beschränkung auf endliche Dimension, also auf Systeme mit endlich vielen Gleichungen) viel allgemeiner; dafür garantiert er aber auch nur lokale Existenz, eine Eindeutigkeitsaussage kann man in Anbetracht des vorausgehenden Beispiels nicht mehr erwarten.

*Grobe Beweisideen zu den Sätzen von Picard-Lindelöf und Peano.* Zum Beweis beider Sätze ist es praktisch, zunächst auf den Erster-Ordnung-Fall  $m = 1$  zu reduzieren, indem man die  $\mathcal{X}^m$ -wertige Funktion  $U := (u, u', u'', \dots, u^{(m-2)}, u^{(m-1)})$  zur unbekanntenen Funktion erhebt und zum GDG-System  $U'_0 = U_1, U'_1 = U_2, \dots, U'_{m-2} = U_{m-1}, U'_{m-1} = f(\cdot, U)$  für diese übergeht.

Der **Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf** im Fall  $m = 1$  basiert dann auf der Umformulierung des betrachteten AWP als **Fixpunktproblem**

$$T[u] = u$$

für den durch  $T[u](x) := y_0 + \int_{x_0}^x f(t, u(t)) dt$  definierten **Integraloperator**  $T: A \rightarrow A$  auf einer abgeschlossenen Teilmenge  $A$  von  $C^0([x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon])$ . Für geeignete Wahlen von  $\varepsilon$  und  $A$  kann man nachweisen, dass dieser Operator eine strikte Kontraktion ist, und kann dann **mit dem Banachschen Fixpunktsatz lösen**.

Der **Beweis des Satzes von Peano** im Fall  $m = 1$  beruht auf der Konstruktion von **Näherungslösungen**  $u_k$  der GDG mit  $u_k(x_0) = y_0$ , so dass  $u_k$  Lipschitz-stetig und auf Intervallen der Länge  $\frac{\varepsilon}{k}$  affin linear ist. Bei geeigneter Wahl von  $\varepsilon$  kann man aus der approximativen Lösungseigenschaft der  $u_k$  entnehmen, dass diese auf  $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$  gleichgradig Lipschitz-stetig sind, und kann mit dem **Satz von Arzelà-Ascoli** eine gleichmäßig auf  $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$  **konvergente Teilfolge** von  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  erhalten. Es lässt sich dann nachweisen, dass die **Grenzfunktion** das betrachtete **AWP löst**.  $\square$

Für alles Weitere zur (übrigens sehr reichhaltigen) Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen wird auf das Wahlpflicht-Modul „Gewöhnliche Differentialgleichungen und dynamische Systeme“ (stets im Sommer, sinnvoll belegbar ab dem 4. Semester) verwiesen.

## 7.2 Fourier-Reihen (kurze Einführung)

**Definition (trigonometrische Polynome, trigonometrische Reihen).**

- Ein **trigonometrisches Polynom** ist eine Funktion der reellen Variablen  $x \in \mathbb{R}$ , deren Funktionsterm in der Form

$$\sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} \quad \text{oder} \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)]$$

mit Koeffizienten  $c_k \in \mathbb{C}$  oder  $a_k, b_k \in \mathbb{C}$  geschrieben werden kann.

- Eine **trigonometrische Reihe** ist eine Funktion der reellen Variablen  $x \in \mathbb{R}$ , deren Funktionsterm in der Form<sup>4</sup>

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \quad \text{oder} \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)]$$

mit Koeffizienten  $c_k \in \mathbb{C}$  oder  $a_k, b_k \in \mathbb{C}$  geschrieben werden kann.

**Bemerkungen** (zu trigonometrischen Polynomen und Reihen).

- (1) **Bei trigonometrischen Polynomen und Reihen handelt es sich um  $2\pi$ -periodische Funktionen  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ .** Entscheidend ist dabei, dass man die Funktionen als Überlagerungen einer Konstanten  $c_0$  bzw.  $\frac{a_0}{2}$  und sogenannter harmonischer Schwingungen  $c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx}$  bzw.  $a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$  mit (Kreis-)Frequenzen  $k \in \mathbb{N}$  beschreibt, wobei man unter der (Kreis-)Frequenz einer solchen harmonischen Schwingung die Zahl der in „Zeit“intervallen der Länge  $2\pi$  stattfindenden Vollschrwingungen versteht.
- (2) Ausgehend von der Eulerschen Formel  $e^{ikx} = \cos(kx) + i \sin(kx)$  **können die beiden angegebenen Darstellungen** trigonometrischer Polynome und Reihen **stets ineinander umgerechnet werden.** Als allgemeiner **Zusammenhang zwischen den Koeffizienten** der beiden Darstellungen ergibt sich

$$\begin{aligned} a_k &= c_k + c_{-k} && \text{für } k \in \mathbb{N}_0, \\ b_k &= i(c_k - c_{-k}) && \text{für } k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

- (3)  $2\pi$ -periodische Funktionen  $g$  auf  $\mathbb{R}$  entsprechen (durch die in Anbetracht der Periodizität wohldefinierte Festlegung  $\tilde{g}(e^{ix}) := g(x)$ ) Funktionen  $\tilde{g}$  auf der Einheitskreislinie  $S^1 \subset \mathbb{C}$ . Trigonometrische Reihen  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$  entsprechen bei dieser Korrespondenz den sogenannten Laurent-Reihen  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k$  der komplexen Variablen  $z = e^{ix} \in S^1$ . Laurent-Reihen spielen in der Funktionentheorie (das ist die Theorie von Funktionen komplexer Variablen) eine wichtige Rolle und werden dort genauer untersucht.

<sup>4</sup>In diesem Abschnitt wird  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \dots := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n \dots$  zur Definition beidseitig unendlicher Reihen verwendet.



Eine sehr einfache, aber nichtsdestotrotz wichtige Beobachtung im Zusammenhang mit trigonometrischen Polynomen und Reihen ist:

**Lemma (Orthogonalitätsrelationen).** Für alle  $k, \ell \in \mathbb{Z}$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$  gilt

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} e^{ikx} e^{-i\ell x} dx = 2\pi \delta_{k\ell}$$

(mit dem sogenannten Kronecker-Delta  $\delta_{k\ell} := \begin{cases} 1 & \text{falls } k=\ell \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ ). Insbesondere definiert

$$e_k(x) := e^{ikx} \quad \text{für } k \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}$$

ein **Orthonormalsystem**  $2\pi$ -periodischer Funktionen  $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  **bezüglich des normierten  $L^2$ -Skalarprodukts**<sup>5</sup>

$$f \cdot g := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f\bar{g}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} (f\bar{g})$$

auf über kompakte Intervalle Riemann-integrierbaren  $2\pi$ -periodischen Funktionen  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  d.h. mit diesem Skalarprodukt gilt  $e_k \cdot e_{\ell} = \delta_{k\ell}$  für alle  $k, \ell \in \mathbb{Z}$ .

*Beweis.* Man rechnet

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} e^{ikx} e^{-i\ell x} dx = \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} e^{i(k-\ell)x} dx = \begin{cases} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} 1 dx = 2\pi & \text{falls } k = \ell \\ \frac{1}{i(k-\ell)} e^{i(k-\ell)x} \Big|_{x=\alpha}^{\alpha+2\pi} = 0 & \text{falls } k \neq \ell \end{cases}$$

und erhält alle anderen Behauptungen sofort. □

**Bemerkung.** Ein **anderes Orthonormalsystem** bezüglich desselben Skalarprodukts bilden die Funktionen zu den Funktionstermen

$$1, \quad \sqrt{2} \cos(kx) \text{ mit } k \in \mathbb{N}, \quad \sqrt{2} \sin(kx) \text{ mit } k \in \mathbb{N}.$$

Dieses aus Kosinus- und Sinus-Termen zusammengesetzte System besteht ausschließlich **aus  $\mathbb{R}$ -wertigen Funktionen**.

**Folgerungen** (aus den Orthogonalitätsrelationen).

- (1) Für die **Koeffizienten**  $c_k$  **eines trigonometrischen Polynoms**  $p$  gilt  $c_k = p \cdot e_k$ , daher sind diese Koeffizienten **eindeutig bestimmt** (und die Koeffizienten  $a_k$  und  $b_k$  der alternativen Darstellung sind es wegen der Umrechnungs-Formeln dann auch).

*Beweis.* Definitionsgemäß kann man  $p$  als  $p = \sum_{k=-n}^n c_k e_k$  schreiben und erhält  $p \cdot e_{\ell} = (\sum_{k=-n}^n c_k e_k) \cdot e_{\ell} = \sum_{k=-n}^n c_k (e_k \cdot e_{\ell}) = \sum_{k=-n}^n c_k \delta_{k\ell} = c_{\ell}$  für alle  $\ell \in \mathbb{Z} \cap [-n, n]$ . □

<sup>5</sup>Analog zu Fußnote 1 in Abschnitt 6.1 handelt es sich *nicht* um ein Skalarprodukt auf dem Raum *aller* über kompakte Intervalle Riemann-integrierbaren  $2\pi$ -periodischen Funktionen, denn dort liegt keine *strikte* Positivität vor. Auf stetigen Funktionen oder den in 6.1 schon betrachteten guten Regelfunktionen gibt die Festlegung aber doch ein echtes Skalarprodukt, bei allgemeineren Funktionen macht zumindest die Notation  $f \cdot g$  noch Sinn.

- (2) Ist  $f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e_k$  als **gleichmäßig** auf  $\mathbb{R}$  (oder, äquivalent, auf irgendeinem Intervall der Länge  $\geq 2\pi$ ) **konvergente trigonometrische Reihe** dargestellt, so ist  $f$  stetig, und man hat die **Formel für die Koeffizienten**

$$c_k = f \cdot e_k = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x) e^{-ikx} dx \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}$$

(mit irgendeinem  $\alpha \in \mathbb{R}$ ; oft einigt man sich auf  $\alpha = 0$  oder  $\alpha = -\pi$ ).

*Beweis.* Setzt man  $p_n := \sum_{k=-n}^n c_k e_k$  für  $n \in \mathbb{N}$ , so gilt  $c_k = p_n \cdot e_k = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} p_n(x) e^{-ikx} dx$  für  $k \in \mathbb{Z} \cap [-n, n]$  nach Folgerung (1). Unter Verwendung der gleichmäßigen Konvergenz  $p_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$  erhält man Stetigkeit von  $f$  und  $c_k = f \cdot e_k = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x) e^{-ikx} dx$  für  $k \in \mathbb{Z}$ .  $\square$

Um für eine gegebene  $2\pi$ -periodischen Funktion eine Darstellung als (gleichmäßig) konvergente trigonometrische Reihe erhalten zu können, erhebt man die Formel für die Koeffizienten aus Folgerung (2) nun zur Definition:

**Definition (Fourier-Koeffizienten, Fourier-Polynome, Fourier-Reihen).** Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  eine über kompakte Intervalle Riemann-integrierbare  $2\pi$ -periodische Funktion. Die **Fourier-Koeffizienten** von  $f$  sind die komplexen Zahlen

$$c_k = \widehat{f}(k) := f \cdot e_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z}$$

oder auch, passend zur alternativen Darstellung trigonometrischer Reihen,

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx \quad \text{mit } k \in \mathbb{N}_0,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx \quad \text{mit } k \in \mathbb{N}.$$

Ausgehend von diesen Koeffizienten definiert man für  $n \in \mathbb{N}_0$  das  **$n$ -te Fourier-Polynom** von  $f$  als das trigonometrische Polynom zum Funktionsterm

$$\sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) e_k(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)]$$

und die **Fourier-Reihe** von  $f$  als die trigonometrische Reihe zu

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) e_k(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)].$$

**Bemerkungen** (zu Fourier-Reihen).

- (1) **Man hofft, dass die Fourier-Reihe** einer  $2\pi$ -periodischen Funktion  $f$  auch  **$f$  darstellt**, d.h. dass

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) e_k = f \quad \text{auf } \mathbb{R} \quad (*)$$

gilt. Diese Hoffnung ist vernünftig, denn, wenn  $f$  überhaupt als gleichmäßig konvergente trigonometrische Reihe dargestellt werden kann, dann muss diese Reihe gemäß der obigen

Folgerung (2) die Fourier-Reihe sein, und **tatsächlich wird die Hoffnung für sehr viele  $f$  auch erfüllt. Dennoch** gilt, ähnlich wie bei Taylor-Reihen, die Darstellung (\*) **nicht trivial** und **nicht ohne Zusatzvoraussetzungen** an  $f$ . Deshalb gehören Sätze, die (\*) sicherstellen, zu den Hauptzielen dieses Abschnitts.

(2) Aus **Symmetrien von  $f$**  erhält man Symmetrien bei seinen Fourier-Koeffizienten:

- Ist  $f$  **gerade** Funktion, so gilt  $b_k = 0$  bzw.  $c_{-k} = c_k$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ ; die Fourier-Reihe von  $f$  kann dann nur mit Kosinus-Termen geschrieben werden.
- Ist  $f$  **ungerade** Funktion, so gilt  $a_k = 0$  bzw.  $c_{-k} = -c_k$  für alle  $k \in \mathbb{N}_0$ ; die Fourier-Reihe von  $f$  kann dann nur mit Sinus-Termen geschrieben werden.
- Ist  $f$  **reell-wertig**, so sind alle  $a_k$  und  $b_k$  reell, und die  $c_k$  erfüllen  $c_{-k} = \overline{c_k}$ .

Ist sichergestellt, dass  $f$  durch seine Fourier-Reihe dargestellt wird, so gelten auch die Umkehrungen zu diesen Aussagen, dann sind die Symmetrien von  $f$  also tatsächlich äquivalent zur zugehörigen Eigenschaft der Koeffizienten.

(3) Für die **Fourier-Koeffizienten der Ableitung**  $f'$  einer  $2\pi$ -periodischen  $C^1$ -Funktion  $f$  erhält man durch partielle Integration in der Definition die wichtige **Regel**

$$\widehat{f'}(k) = ik\widehat{f}(k) \quad \text{für } k \in \mathbb{Z}.$$

Umgekehrt sind die **Fourier-Koeffizienten der Stammfunktion**  $F$  einer stetigen  $2\pi$ -periodischen Funktion  $f$  mit  $\widehat{f}(0) = 0$  durch

$$\widehat{F}(k) = \frac{\widehat{f}(k)}{ik} \quad \text{für } k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

gegeben. Die Bedingung, dass der Mittelwert  $\widehat{f}(0)$  von  $f$  über Intervalle der Länge  $2\pi$  verschwindet stellt hierbei sicher, dass  $F$  überhaupt  $(2\pi)$ -periodisch und der Fourier-Theorie zugänglich ist. Der Mittelwert  $\widehat{F}(0)$  von  $F$  über Intervalle der Länge  $2\pi$  wird durch obige Regel nicht festgelegt und entspricht der bei der Stammfunktionsbildung freien (Integrations-) Konstanten. Entsprechende Regeln gelten auch für die Koeffizienten  $a_k$  und  $b_k$ .

**Beispiele** (von Fourier-Reihen).

(1) Für die ungerade Treppen-Funktion  $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zu

$$T(x) := \begin{cases} 0 & \text{wenn } x = m\pi \text{ für ein } m \in \mathbb{Z} \\ 1 & \text{wenn } 2\ell\pi < x < 2\ell\pi + \pi \text{ für ein } \ell \in \mathbb{Z} \\ -1 & \text{wenn } 2\ell\pi - \pi < x < 2\ell\pi \text{ für ein } \ell \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

erhält man die Fourier-Koeffizienten  $a_k = 0$  für  $k \in \mathbb{N}_0$  und  $b_k = \begin{cases} \frac{4}{k\pi} & \text{für ungerade } k \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{für gerade } k \in \mathbb{N} \end{cases}$ .

Die Fourier-Reihe von  $T$  ist also

$$\frac{4}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\sin((2j+1)x)}{2j+1},$$

und diese Reihe konvergiert gleichmäßig auf kompakten Intervallen  $I \subset \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$  (letzteres folgt aus der gleichmäßigen Beschränktheit der Partialsummen  $\sum_{j=0}^n \sin((2j+1)x) = \operatorname{Im} \left( e^{ix} \frac{e^{i2x(n+1)} - 1}{e^{i2x} - 1} \right)$  mit  $x \in I$  und dem Dirichlet-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz). Die Frage, ob die Reihe  $T(x)$  darstellt oder was sonst der Grenzwert ist, wird unten geklärt.

(2) Für die gerade Zacken-Funktion  $Z: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zu

$$Z(x) := \min_{\ell \in \mathbb{Z}} |x - 2\ell\pi|$$

erhält man die Fourier-Koeffizienten  $a_0 = \pi$ ,  $a_k = \begin{cases} -\frac{4}{k^2\pi} & \text{für ungerade } k \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{für gerade } k \in \mathbb{N} \end{cases}$  und  $b_k = 0$  für  $k \in \mathbb{N}$ . Die Fourier-Reihe von  $Z$  ist also

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\cos((2j+1)x)}{(2j+1)^2}.$$

Da die Reihe gleichmäßig in  $x \in \mathbb{R}$  konvergiert, stellt sie nach dem nächsten Satz  $Z(x)$  dar.

In diesen Beispielen ist  $Z$  stetig auf  $\mathbb{R}$  und  $Z' = T$  stetig auf  $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$  (also nur nicht in den Nichtdifferenzierbarkeitsstellen von  $Z$ ). Die Regeln für die Fourier-Koeffizienten von Ableitung und Stammfunktion bleiben in dieser Situation gültig, daher kann man die Fourier-Koeffizienten von  $T$  aus denen von  $Z$  oder die von  $Z$  aus denen von  $T$  gewinnen. An dieser Stelle wird auch klar, dass die Fourier-Reihe von  $T$  tatsächlich  $T$  darstellt: Auf  $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$  folgt diese Darstellung nämlich durch gliedweise Differentiation der Fourier-Reihe von  $Z$  (dort erlaubt wegen der in (1) diskutierten Gleichmäßigkeit der Konvergenz weg von  $\pi\mathbb{Z}$ ), und an den Stellen aus  $\pi\mathbb{Z}$  gilt die Darstellung trivial (dort sind  $T$  und seine Fourier-Reihe einfach Null).

Als Spezialfälle der Konvergenzen in diesen Beispielen erhält man übrigens den Wert der Leibnizschen Reihe  $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \dots = \frac{\pi}{4}$  (dazu  $x = \frac{\pi}{2}$  in (1) betrachten) und die verwandte Identität  $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}$  (dazu  $x = 0$  in (2) betrachten).

Im Folgenden wird die abstrakte Theorie der Fourier-Reihen ein Stück weit entwickelt.

**Satz** (über Fourier-Reihen). *Für stetige  $2\pi$ -periodische Funktionen  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  gelten:*

(I) (**Identitätssatz**) *Ist  $\widehat{f}(k) = \widehat{g}(k)$  für alle  $k \in \mathbb{Z}$ , so stimmen  $f$  und  $g$  auf  $\mathbb{R}$  überein.*

(II) **Konvergiert die Fourier-Reihe von  $f$  gleichmäßig auf  $\mathbb{R}$ , so stellt sie  $f$  dar.**

Zum Herleitung des vorausgehenden Satzes wird folgendes Resultat verwendet, dessen Beweis hier ausgelassen und typischerweise in einer Vorlesung über Funktionalanalysis ausgeführt wird:

**Satz (Weierstraßscher Approximationssatz).**

- **Version für Polynome:** *Ist  $f: I \rightarrow \mathbb{K}$  stetig auf einem kompakten Intervall  $I$ , so gibt es eine Folge  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Polynomfunktionen mit Koeffizienten in  $\mathbb{K}$ , für die gleichmäßige Konvergenz  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = f$  auf  $I$  vorliegt.*
- **Version für trigonometrische Polynome:** *Ist  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  stetige  $2\pi$ -periodische Funktion, so gibt es eine Folge  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  trigonometrischer Polynome, für die gleichmäßige Konvergenz  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = f$  auf  $\mathbb{R}$  vorliegt.*

Übrigens handelt es sich bei den  $f$  approximierenden trigonometrischen Polynomen des Weierstraßschen Approximationssatzes im Allgemeinen nicht (!) um die Fourier-Polynome von  $f$ .

*Beweis des Satzes über Fourier-Reihen.* Zum Beweis von Teil (I) kann man ohne Einschränkung  $g \equiv 0$  annehmen. Mit dem Weierstraßschen Approximationssatz schreibt man  $f = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n$  als gleichmäßigen Limes trigonometrischer Polynome  $p_n$ . Mit  $f \cdot e_k = \widehat{f}(k) = 0$  für alle  $k \in \mathbb{Z}$  gilt dann auch  $f \cdot p_n = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , und es folgt

$$\int_0^{2\pi} |f|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} (f \overline{p_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2\pi(f \cdot p_n) = 0.$$

Da  $f$  per Voraussetzung stetig ist, entnimmt man  $f \equiv 0$  auf  $\mathbb{R}$ .

Zum Beweis von Teil (II) wählt man  $g := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)e_k$  als die durch die Fourier-Reihe von  $f$  dargestellte  $2\pi$ -periodische Funktion. Da die Reihe nach Voraussetzung gleichmäßig konvergiert, ist  $g$  stetig, und Folgerung (2) garantiert die Übereinstimmung  $\widehat{g}(k) = \widehat{f}(k)$  für alle  $k \in \mathbb{Z}$ . Teil (I) gibt nun die Gleichheit  $f = g$  auf  $\mathbb{R}$ .  $\square$

**Hauptsatz (über Konvergenz von Fourier-Reihen).** *Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  eine  $2\pi$ -periodische Funktion der Klasse  $\mathbf{C}^1$ . Dann konvergiert die Fourier-Reihe von  $f$  normal, insbesondere konvergiert sie auf  $\mathbb{R}$  gleichmäßig und stellt  $f$  dar.*

**Bemerkung.** Die **Schlussfolgerungen** des Hauptsatzes **bleiben richtig**, wenn eine stetige  $2\pi$ -periodische Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  **nur weg von isolierten Knickstellen von der Klasse  $\mathbf{C}^1$**  ist,  $|f'|^2$  aber endliches uneigentliches Riemann-Integral auf Intervallen bis hin zu den Knickstellen hat. Ebenso bleibt auch das nächste Lemma gültig, wenn  $g$  nahe isolierten Stellen unbeschränkt sein darf, aber  $|g|^2$  integrierbar bleibt. Die Beweise des Lemmas und des Hauptsatzes funktionieren in dieser allgemeineren Situation ohne wesentliche Änderungen.

**Lemma (Besselsche Ungleichung).** *Ist eine  $2\pi$ -periodische Funktion  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  beschränkt und über jedes kompakte Intervall Riemann-integrierbar, so gilt*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{g}(k)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g|^2 < \infty.$$

*Insbesondere ist die Bifolge  $(\widehat{g}(k))_{k \in \mathbb{Z}}$  der Fourier-Koeffizienten von  $g$  Quadrat-summierbar, d.h. es gilt  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{g}(k)|^2 < \infty$ .*

Tatsächlich tritt sogar stets Gleichheit  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{g}(k)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g|^2$  in der Ungleichung des Lemmas ein. Diese sogenannte **Besselsche Gleichung** ist aber etwas schwieriger zu beweisen als die Ungleichung, die für den hiesigen Zweck schon ausreicht.

*Beweis des Lemmas.* Sei  $p_n := \sum_{k=-n}^n \widehat{g}(k)e_k$  das  $n$ -te Fourier-Polynom von  $g$ . Dann gilt  $g \cdot e_\ell = \widehat{g}(\ell) = p_n \cdot e_\ell$  für alle  $\ell \in \mathbb{Z} \cap [-n, n]$ , und daraus folgt die Orthogonalitätsrelation  $(g - p_n) \cdot p_n = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Damit und mit der bekannten Relation  $e_k \cdot e_\ell = \delta_{kl}$  bekommt man

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g|^2 &= (g - p_n + p_n) \cdot (g - p_n + p_n) \\ &= \underbrace{(g - p_n) \cdot (g - p_n)}_{\geq 0} + \underbrace{(g - p_n) \cdot p_n + p_n \cdot (g - p_n)}_{=0} + p_n \cdot p_n \\ &\geq p_n \cdot p_n = \left( \sum_{k=-n}^n \widehat{g}(k)e_k \right) \cdot \left( \sum_{\ell=-n}^n \widehat{g}(\ell)e_\ell \right) = \sum_{k=-n}^n \widehat{g}(k) \sum_{\ell=-n}^n \overline{\widehat{g}(\ell)} \delta_{k\ell} = \sum_{k=-n}^n |\widehat{g}(k)|^2. \end{aligned}$$

Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$  in der resultierenden Ungleichung gibt die Behauptung.  $\square$

*Beweis des Hauptsatzes.* Mit der Formel  $\widehat{f'}(k) = ik\widehat{f}(k)$  für die Fourier-Koeffizienten der Ableitung und mit der Besselschen Ungleichung für die stetige,  $2\pi$ -periodische und damit beschränkte Funktion  $g = f'$  gewinnt man

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2 |\widehat{f}(k)|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f'}(k)|^2 < \infty.$$

Mit der Youngschen Ungleichung folgt

$$\sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} |\widehat{f}(k)| = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} k |\widehat{f}(k)| \frac{1}{k} \leq \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2 |\widehat{f}(k)|^2 + \frac{1}{2} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty,$$

also konvergiert  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|$  und ist eine konstante Majoranten-Reihe für die Fourier-Reihe  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)e_k$  von  $f$ . Damit konvergiert die Fourier-Reihe von  $f$  auf  $\mathbb{R}$  normal und insbesondere gleichmäßig, und nach Teil (II) des früheren Satzes über Fourier-Reihen stellt sie dann tatsächlich  $f$  dar.  $\square$

# Kapitel 8

## Differentialrechnung mit Funktionen mehrerer Variablen

### 8.1 Partielle Ableitungen, Richtungsableitungen, totale Ableitung, ...

Dieser Abschnitt behandelt Konzepte von Differenzierbarkeit und Begriffe von Ableitungen für Funktionen  $f$  mehrerer reeller Variablen. Zumeist wird die Theorie dabei abstrakt für Funktionen  $f$  auf einem Definitionsbereich in einem normierten Raum  $\mathcal{X}$  und mit Werten in einem weiteren normierten Raum  $\mathcal{Y}$  entwickelt. Im Vordergrund steht aber — das gilt es trotz des abstrakten Rahmens nie zu vergessen — der Fall  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^N$ ,  $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^M$ , das ist der Fall, in dem  $M \in \mathbb{N}$  (Komponenten-)Funktionen von  $N \in \mathbb{N}$  Variablen abhängen.

Die wohl naheliegendste Weise, eine Funktion mehrerer Variablen zu differenzieren, besteht darin, alle bis auf eine Variable festzuhalten und nach der einzig verbleibenden Variablen „ganz normal“ abzuleiten. Auch wenn es sich hierbei um kein wirklich neues Konzept handelt, ist es üblich, einige Konventionen zu treffen und den Kontext mehrerer prinzipiell gleichberechtigter Variablen durch Verwendung des Symbols  $\partial$  (anstelle des ähnlich verwendbaren  $d$ ) anzuzeigen:

**Definition (partielle Ableitungen, Funktionalmatrizen).** Sei  $f: D \rightarrow \mathcal{Y}$  eine Funktion von einer Teilmenge  $D$  von  $\mathbb{R}^N$  in einen normierten Raum  $\mathcal{Y}$ . Man vereinbart für einen inneren Punkt  $a = (a_1, a_2, \dots, a_N)$  von  $D$ :

(I) Falls die Ableitung nach der reellen Variablen  $t$

$$\begin{aligned} \partial_i f(a) &:= (f(a_1, \dots, a_{i-1}, \cdot, a_{i+1}, \dots, a_N))'(a_i) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=a_i} f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_N) \\ &= \lim_{\mathbb{R} \ni h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i+h, a_{i+1}, \dots, a_N) - f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_N)}{h} \in \mathcal{Y} \end{aligned}$$

für ein  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  existiert (wobei der Limes in der Norm von  $\mathcal{Y}$  gebildet wird), so heißt  $f$  an der Stelle  $a$  **nach der  $i$ -ten Variablen differenzierbar**, und  $\partial_i f(a)$  heißt die  **$i$ -te partielle Ableitung** von  $f$  an der Stelle  $a$ . Gleichbedeutend mit  $\partial_i f(a)$  verwendet man, vor allem wenn  $f$  als  $f(x_1, x_2, \dots, x_N)$  geschrieben wird, die Notationen  $\frac{\partial}{\partial x_i} f(a)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$  und  $\partial_{x_i} f(a)$  (wobei die letzte Möglichkeit aufgrund starker Verwechslungsgefahr mit anderen Konzepten nicht empfehlenswert ist). Bei anderer Benennung der Variablen, zum Beispiel als  $(x, y, z)$  im Fall  $N = 3$ , verwendet man Notationen wie  $\frac{\partial}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial}{\partial z}$  analog.

- (II) Ist  $f$  im  $\mathbb{R}^M$ -wertigen Fall  $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^M$  an der Stelle  $a$  nach allen  $N$  Variablen differenzierbar, so bezeichnet man die  $(M \times N)$ -Matrix

$$Df(a) := \left( \partial_1 f(a) \mid \partial_2 f(a) \mid \cdots \mid \partial_{N-1} f(a) \mid \partial_N f(a) \right)$$

$$= \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(a) & \partial_2 f_1(a) & \cdots & \partial_{N-1} f_1(a) & \partial_N f_1(a) \\ \partial_1 f_2(a) & \partial_2 f_2(a) & \cdots & \partial_{N-1} f_2(a) & \partial_N f_2(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \partial_1 f_{M-1}(a) & \partial_2 f_{M-1}(a) & \cdots & \partial_{N-1} f_{M-1}(a) & \partial_N f_{M-1}(a) \\ \partial_1 f_M(a) & \partial_2 f_M(a) & \cdots & \partial_{N-1} f_M(a) & \partial_N f_M(a) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{M \times N}$$

als **Funktionalmatrix** oder **Jacobi-Matrix** von  $f$  an der Stelle  $a$ .

**Bemerkung (zur Ableitung von Kurven).** Für  $N = 1$  und ein Intervall  $D = I \subset \mathbb{R}$  als Definitionsbereich erklärt die Definition insbesondere die Ableitung einer Kurve  $c: I \rightarrow \mathcal{Y}$  mit Werten im normierten Raum  $\mathcal{Y}$ . In diesem Fall handelt es sich bei der Ableitung  $c'(a) := \partial_1 c(a)$  in  $a \in \overset{\circ}{I}$  nach der einzig vorhandenen (ersten) Variablen einfach um einen „ganz normalen“ Limes von Differenzenquotienten; gegenüber Kapitel 4 ist inzwischen nur die Möglichkeit hinzugekommen, die Konvergenz der Differenzenquotienten als Normkonvergenz bei allgemeinen Wertebereich  $\mathcal{Y}$  anstelle von  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  zu erklären. **Geometrisch** kann man  $c'(a) \in \mathcal{Y}$  als **Tangentialvektor an das Bild der Kurve  $c$**  im Punkt  $c(a)$  interpretieren.

Die genauere Diskussion von partiellen Ableitungen und Funktionalmatrizen wird hier zurückgestellt und erfolgt im Kontext der nächsten allgemeineren Definitionen.

**Definition (Richtungsableitungen, Ableitungen entlang Vektorfeldern).** Sei  $f: D \rightarrow \mathcal{Y}$  eine Funktion von einer Teilmenge  $D$  eines normierten<sup>1</sup> Raums  $\mathcal{X}$  in einen weiteren normierten Raum  $\mathcal{Y}$ . Man vereinbart für einen inneren Punkt  $a$  von  $D$ :

- (I) Falls die Ableitung nach der reellen Variablen  $t$

$$\partial_v f(a) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(a+tv) = \lim_{\mathbb{R} \ni h \rightarrow 0} \frac{f(a+hv) - f(a)}{h} \in \mathcal{Y}$$

für einen Vektor  $v \in \mathcal{X}$  existiert (wobei der Limes auch hier in der Norm von  $\mathcal{Y}$  gebildet wird), so heißt  $f$  an der Stelle  $a$  **in Richtung  $v$  differenzierbar**, und  $\partial_v f(a)$  heißt die **Richtungsableitung** von  $f$  an der Stelle  $a$  **in Richtung  $v$** .

- (II) Unter der **Richtungsableitung** von  $f$  an der Stelle  $a$  **entlang eines Vektorfelds**<sup>2</sup>  $V: D \rightarrow \mathcal{X}$  versteht man, wenn diese existiert, die Richtungsableitung

$$\partial_V f(a) := \partial_{V(a)} f(a) \in \mathcal{Y}$$

Wichtige Spezialfälle sind die **Ableitung  $\partial_X f$  nach dem durch  $X(x) := x$  definierten Ortsvektorfeld  $X$**  und die **radiale Ableitung  $\partial_{\text{rad}} f := \partial_R f$  mit dem durch  $R(x) := \frac{x}{\|x\|_{\mathcal{X}}}$  definierten radialen Einheits-Vektorfeld  $R$  auf  $D \subset \mathcal{X} \setminus \{0\}$** .

<sup>1</sup>Die Definition der Richtungsableitung  $\partial_v f(a)$  macht auch dann Sinn, wenn  $\mathcal{X}$  kein normierter Raum, sondern nur ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum ist. Die Bedingung, dass  $a$  innerer Punkt von  $D$  ist, ist dann allerdings nicht mehr sinnvoll und ist durch die zu ersetzen, dass  $0$  innerer Punkt von  $\{t \in \mathbb{R} : a+tv \in D\}$  ist.

<sup>2</sup>Als Vektorfelder bezeichnet man Abbildungen  $V$  von einer Teilmenge von  $\mathbb{R}^N$  in denselben  $\mathbb{R}^N$  oder allgemeiner von einer Teilmenge eines normierten Raums in denselben normierten Raum. Man stellt sich vor, dass an jeden Punkt  $x$  des Definitionsbereichs der Vektor  $V(x)$  angeklebt wird.



**Bemerkungen** (zu Richtungsableitungen).

- (0) **Partielle Ableitungen sind spezielle Richtungsableitungen** im Fall von Definitionsbereichen in  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^N$ . Genauer handelt es sich bei

$$\partial_i f = \partial_{e_i} f$$

mit  $i \in \{1, 2, \dots, N\}$  um die Richtungsableitung in Richtung des  $i$ -ten kanonischen Basisvektors  $e_i := (0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^N$  (mit der einzelnen 1 an der  $i$ -ten Stelle). Deshalb überträgt sich alles Folgende von Richtungsableitungen auf partielle Ableitungen.

- (1) Eine **Richtungsableitung**  $\partial_v f$  von  $f: D \rightarrow \mathcal{Y}$  wird oft nicht nur an einer Stelle  $a$  betrachtet, sondern **wird selbst als Funktion**  $\partial_v f: D \rightarrow \mathcal{Y}$  **aufgefasst**, falls sie (z.B.) an allen Stellen eines offenen Definitionsbereichs  $D$  existiert. Dabei nehmen die Richtungsableitungen  $\partial_v f$  stets Werte im selben Raum  $\mathcal{Y}$  wie die abgeleitete Funktion  $f$  an, **Richtungsableitungen ändert also den Zielraum nicht**. Für  $Y = \mathbb{R}^M$  können Richtungsableitungen eines  $\mathbb{R}^M$ -wertigen  $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_M \end{pmatrix}$  komponentenweise gebildet werden, d.h. es gilt  $\partial_v f = \begin{pmatrix} \partial_v f_1 \\ \partial_v f_2 \\ \vdots \\ \partial_v f_M \end{pmatrix}$ .

- (2) Für eine Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  auf  $D \subset \mathbb{R}^N$  entspricht die **Richtungsableitung**  $\partial_v f(a)$  mit einem Einheitsvektor  $v \in \mathbb{R}^N$ ,  $|v| = 1$  **geometrisch** der **Steigung des Graphen von  $f$**  in  $\mathbb{R}^{N+1}$  in Richtung  $v$ . Am anschaulichsten ist dies (abgesehen vom schon früher verstandenen Fall  $N = 1$ ) natürlich im Fall  $N = 2$ , in dem man den Graph von  $f$  als Fläche in  $\mathbb{R}^3$  veranschaulichen kann.

- (3) **Ableitungsregeln für Richtungsableitungen** erhält man im  $\mathbb{K}$ -wertigen Fall aus den entsprechenden Regeln für Funktionen einer Variable, und auch im  $\mathcal{Y}$ -wertigen Fall ergeben sich solche Regeln mit identischen Beweisen. Zum Beispiel gilt die **Summen- und Faktorregel**  $\partial_v(rf+sg) = r\partial_v f + s\partial_v g$  für  $r, s \in \mathbb{K}$  und Funktionen  $f, g$  mit gleichem Definitionsbereich und Zielbereich; das bedeutet mit anderen Worten, dass Richtungsableiten eine  $\mathbb{K}$ -lineare Operation ist. Weiterhin gilt die **Produktregel**  $\partial_v(f * g) = f * (\partial_v g) + (\partial_v f) * g$  für  $f: D \rightarrow \mathcal{Y}$ ,  $g: D \rightarrow \tilde{\mathcal{Y}}$  und ein allgemeines Produkt (d.h. eine stetige bilineare Abbildung)  $*$ :  $\mathcal{Y} \times \tilde{\mathcal{Y}} \rightarrow \mathcal{Z}$  zwischen normierten Räumen  $\mathcal{Y}, \tilde{\mathcal{Y}}, \mathcal{Z}$ , das kann z.B. die Multiplikation zweier Zahlen, die Skalarmultiplikation einer Zahl und eines Vektor oder das Skalarprodukt zweier Vektoren sein. Für  $\mathcal{Y}$ -wertiges  $f$  und  $\mathbb{K}_{\neq 0}$ -wertiges  $g$  folgt die **Quotientenregel**  $\partial_v \left( \frac{f}{g} \right) = \frac{(\partial_v f)g - f(\partial_v g)}{g^2}$ . Subtiler sind allerdings die Fragen nach der Gültigkeit der Kettenregel und der Regel für die Ableitung der Umkehrfunktion; diese werden später in allgemeinerem Kontext beantwortet.

- (4) Für normierte Räume  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  und  $f: D \rightarrow \mathcal{Y}$  auf  $D \subset \mathcal{X}$  gilt ein **Schrankensatz mit Richtungsableitungen**: Ist  $a \neq b$  in  $D$ , bleibt die Strecke  $[a, b] := \{a + t(b-a) : t \in [0, 1]\}$  in  $\tilde{D}$  und ist  $f$  in jedem Punkt dieser Strecke in Richtung  $v := \frac{b-a}{\|b-a\|_{\mathcal{X}}}$  des Verbindungsvektors von  $a$  zu  $b$  differenzierbar, so gilt

$$\|f(b) - f(a)\|_{\mathcal{Y}} \leq \left( \sup_{x \in [a, b]} \|\partial_v f(x)\|_{\mathcal{Y}} \right) \|b - a\|_{\mathcal{X}}.$$

Um dies einzusehen, betrachtet man die Funktion  $g: [0, \|b-a\|_{\mathcal{X}}] \rightarrow \mathcal{Y}, t \mapsto f(a+tv)$  einer Variablen. Im Fall  $\mathcal{Y} = \mathbb{K}$  kann dann der Schrankensatz aus Abschnitt 4.3 direkt auf diese Funktion angewandt werden; für allgemeine Zielräume  $\mathcal{Y}$  funktioniert der in Abschnitt 4.3 gegebene Beweis nach Ersetzung von Beträgen durch Normen analog.

**Beispiele** (zu partiellen Ableitungen und Richtungsableitungen).

- (1) Eine affin lineare Funktion  $f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto a \cdot x + b$  mit  $a = (a_1, a_2, \dots, a_N) \in \mathbb{R}^N$  und  $b \in \mathbb{R}$  hat für alle  $i \in \{1, 2, \dots, N\}$  und  $v \in \mathbb{R}^N$  konstante Ableitungen

$$\partial_i f \equiv a_i \quad \text{und} \quad \partial_v f \equiv a \cdot v \quad \text{auf } \mathbb{R}^N.$$

- (2) Bei Benennung der Einzel-Variablen in  $\mathbb{R}^2$  als  $(x, y)$  beziehungsweise in  $\mathbb{R}^3$  als  $(x, y, z)$  gelten zum Beispiel

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} e^{yx^3+y} &= 3yx^2 e^{yx^3+y}, & \frac{\partial}{\partial y} e^{yx^3+y} &= (x^3+1)e^{yx^3+y}, \\ \frac{\partial}{\partial x} x^2 y^4 z &= 2xy^4 z, & \frac{\partial}{\partial y} x^2 y^4 z &= 4x^2 y^3 z, & \frac{\partial}{\partial z} x^2 y^4 z &= x^2 y^4. \end{aligned}$$

- (3) **Allgemeine Polynome**

$$p(x) = \sum_{|\alpha| \leq n} c_\alpha x^\alpha \quad \text{in } x \in \mathbb{R}^N$$

können mit Hilfe der **Multiindex-Schreibweise** übersichtlich aufgeschrieben werden. Dabei heißt  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{N}_0^N$  Multiindex der Ordnung  $|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N$  (Betragsstriche hier ausnahmsweise einmal für die 1-Norm, nicht wie sonst für die 2-Norm), und man vereinbart die Schreibweise  $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_N^{\alpha_N}$  für Monome. Als  $i$ -te partielle Ableitung,  $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ , des obigen  $p$  erhält man dann jedenfalls

$$\partial_i p(x) = \sum_{\substack{|\alpha| \leq n \\ \alpha_i \geq 1}} c_\alpha \alpha_i x^{\alpha - e_i} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^N.$$

- (4) Bei den rotationssymmetrischen Funktionen  $f: \mathbb{R}^N \setminus \{0_{\mathbb{R}^N}\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto |x|^s$  ergeben sich für Richtungsableitungen in Richtung  $v \in \mathbb{R}^N$ , Ableitung nach dem Ortsvektorfeld  $X$  und radiale Ableitung die Formeln

$$\partial_v f(x) = s|x|^{s-2} x \cdot v, \quad \partial_X f(x) = s|x|^s, \quad \partial_{\text{rad}} f(x) = s|x|^{s-1} \quad \text{für } 0 \neq x \in \mathbb{R}^N.$$

Viele weitere Beispiele finden sich in den Übungen.

**Bemerkungen und Beispiele (Verhalten und Limitation von Richtungsableitungen).**

- (1) **Im Normalfall hängen Richtungsableitungen  $\partial_v f(a)$  wie in den vorausgehenden Beispielen linear vom Richtungsvektor  $v$  ab**, das bedeutet genauer

$$\partial_v f(a) = \sum_{i=1}^N v_i \partial_i f(a) \quad \text{für alle } v = (v_1, v_2, \dots, v_N) \in \mathbb{R}^N$$

(vorausgesetzt,  $f$  ist im inneren Punkt  $a$  von  $D \subset \mathbb{R}^N$  in allen Richtungen differenzierbar). Tatsächlich liegt dieses wünschenswerte Verhalten aber *nicht immer* vor, und

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } x_1 = x_2 = 0 \\ \frac{x_1 x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{sonst} \end{cases}$$

ist ein Beispiel, in dem  $\partial_v f(0, 0) = \frac{v_1 v_2^2}{v_1^2 + v_2^2}$  nicht linear von  $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  abhängt.

- (2) Partielle Ableitungen und **Richtungsableitungen von  $f$  in  $a$  reichen zur Beschreibung des Verhaltens von  $f$  nahe  $a$  nicht aus.** Dies sieht man an den Beispielfunktionen  $f_1, f_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  zu

$$f_1(x_1, x_2) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x_1 = x_2 \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und} \quad f_2(x_1, x_2) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x_1^2 = x_2 \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ , denn bei  $f_1$  existieren alle partiellen Ableitungen an der Stelle  $(0, 0)$  mit Wert 0, bei  $f_2$  haben sogar alle Richtungsableitungen an der Stelle  $(0, 0)$  Wert 0, aber  $f_1$  und  $f_2$  sind im Punkt  $(0, 0)$  nicht einmal stetig.

Insgesamt scheinen Richtungsableitungen also noch nicht das „richtige“ Konzept von Differenzierbarkeit für Funktionen mehrerer Variablen zu liefern.

Eine Verbesserung bringt die nächste Definition:

**Definition (totale Differenzierbarkeit, totale Ableitungen).** Seien  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  normierte Räume und  $f: D \rightarrow \mathcal{Y}$  eine Funktion auf  $D \subset \mathcal{X}$ . Man nennt  $f$  **(total) differenzierbar** an der Stelle  $a \in D$ , wenn es eine stetige  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung  $L: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ ,  $v \mapsto Lv$  mit

$$\lim_{\mathcal{X} \ni v \rightarrow 0} \frac{\|f(a+v) - f(a) - Lv\|_{\mathcal{Y}}}{\|v\|_{\mathcal{X}}} = 0 \quad \text{bzw. äquivalent} \quad \lim_{\mathcal{X} \ni x \rightarrow a} \frac{\|f(x) - f(a) - L(x-a)\|_{\mathcal{Y}}}{\|x-a\|_{\mathcal{X}}} = 0$$

gibt. Dabei ist  $L$ , falls existent, stets eindeutig bestimmt, man bezeichnet die stetige  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung  $L$  mit  $f'(a)$  und nennt sie die **(totale) Ableitung** von  $f$  an der Stelle  $a$ .

*Beweis der behaupteten Eindeutigkeitsaussage.* Sind  $L, \tilde{L}: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  zwei Abbildungen mit der definierenden Eigenschaft der totalen Ableitung, so folgt per Dreiecksungleichung

$$\lim_{\mathcal{X} \ni v \rightarrow 0} \frac{\|Lv - \tilde{L}v\|_{\mathcal{Y}}}{\|v\|_{\mathcal{X}}} \leq \lim_{\mathcal{X} \ni v \rightarrow 0} \frac{\|Lv - f(a+v) + f(a)\|_{\mathcal{Y}}}{\|v\|_{\mathcal{X}}} + \lim_{\mathcal{X} \ni v \rightarrow 0} \frac{\|f(a+v) - f(a) - \tilde{L}v\|_{\mathcal{Y}}}{\|v\|_{\mathcal{X}}} = 0.$$

Sind  $L$  und  $\tilde{L}$  verschiedene lineare Abbildungen, so gibt es ein  $v_0 \in \mathcal{X} \setminus \{0\}$  mit  $Lv_0 \neq \tilde{L}v_0$  und folglich

$$\limsup_{\mathcal{X} \ni v \rightarrow 0} \frac{\|Lv - \tilde{L}v\|_{\mathcal{Y}}}{\|v\|_{\mathcal{X}}} \geq \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|Ltv_0 - \tilde{L}tv_0\|_{\mathcal{Y}}}{\|tv_0\|_{\mathcal{X}}} = \frac{\|Lv_0 - \tilde{L}v_0\|_{\mathcal{Y}}}{\|v_0\|_{\mathcal{X}}} > 0,$$

(wobei Linearität von  $L$  und  $\tilde{L}$  im vorletzten Schritt benutzt wurde). Aufgrund des Widerspruchs zwischen den abgesetzten Formeln müssen  $L$  und  $\tilde{L}$  tatsächlich übereinstimmen.  $\square$

**Bemerkungen** (zu totalen Ableitungen).

- (0) Im **Fall  $\mathcal{X} = \mathbb{R}$  einer Variablen** verallgemeinert die Definition „normale“ Ableitungen, wenn man die lineare Abbildung  $f'(a): \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{Y}$  aus der vorausgehenden Definition und den Vektor  $f'(a) \in \mathcal{Y}$  aus früheren Definitionen auf naheliegende Weise identifiziert — nämlich einfach die lineare Abbildung  $f'(a)$  mit dem Vektor  $f'(a)1$ , auf den sie die 1 abbildet, oder äquivalent den Vektor  $f'(a)$  mit seiner Linksmultiplikations-Abbildung  $\mathbb{R} \rightarrow \mathcal{Y}$ ,  $r \mapsto f'(a)r$ .
- (1) Auch bei mehr als einer Variablen ist totale Differenzierbarkeit aber das **„richtige“ Konzept von Differenzierbarkeit**. Dies liegt (unter anderem) daran, dass dieses Konzept die **grundlegende Idee der (affin) linearen Approximation verwirklicht**, d.h. dass

sich bei Existenz von  $f'(a)$  als einfache Umformulierung der Definition die Erster-Ordnung-Taylor-Formel

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(\|x-a\|_{\mathcal{X}}) \quad \text{bei } x \rightarrow a$$

ergibt.

**Geometrisch** entspricht  $(a, f(a)) + \text{Graph}(f'(a)) = \{(a+v, f(a)+f'(a)v) : v \in \mathcal{X}\} \subset \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$  einer **verallgemeinerten Tangentialebene** an  $\text{Graph}(f) = \{(x, f(x)) : x \in D\} \subset \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$  im Punkt  $(a, f(a)) \in \text{Graph}(f)$ . Speziell im Fall  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^N$ ,  $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^M$  handelt es sich hierbei um eine  $N$ -dimensionale Tangentialebene an eine  $N$ -dimensionale Fläche in  $\mathcal{X} \times \mathcal{Y} = \mathbb{R}^{N+M}$ , die man sich nur im Fall  $N = 2$ ,  $M = 1$  als Ebene im Anschauungsraum  $\mathbb{R}^3$  vorstellen kann.

- (2) Die Überlegenheit der totalen Differenzierbarkeit über die bisher betrachteten Begriffe besteht auch darin, dass **aus totaler Differenzierbarkeit** von  $f: D \rightarrow \mathcal{Y}$  an der Stelle  $a$  die **Stetigkeit** von  $f$  in  $a$  und die **Existenz aller partiellen Ableitungen und Richtungsableitungen** von  $f$  in  $a$  mit

$$\partial_v f(a) = f'(a)v \quad \text{für } v \in \mathcal{X}$$

und folglich **linearer Abhängigkeit vom Richtungsvektor**  $v \in \mathcal{X}$  folgen. Der Nachweis der Stetigkeit wird dabei in der Vorlesung erläutert, die Existenz der Richtungsableitungen wird in den Übungen verifiziert.

- (3) Existiert  $f'(a)$  im Fall  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^N$ ,  $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^M$ , so folgt aus der vorigen Bemerkung, dass die  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung  $f'(a): \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$  bezüglich der kanonischen Basen von  $\mathbb{R}^N$  und  $\mathbb{R}^M$  **durch die Funktionalmatrix**  $Df(a) \in \mathbb{R}^{M \times N}$  **dargestellt** wird, d.h.

$$Df(a)v = f'(a)v = \partial_v f(a) \quad \text{für alle } v \in \mathcal{X}.$$

Weitere Eigenschaften totaler Ableitungen werden später behandelt, zuvor soll aber der begriffliche Rahmen etwas genauer abgesteckt werden:

**Einschub** (zu **stetigen linearen Abbildungen**). Für normierte Räume  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{Y}$  und eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung  $L: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ ,  $x \mapsto Lx$  bezeichnet man

$$\|L\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})} := \sup_{x \in B_1(0)} \|Lx\|_{\mathcal{Y}} = \sup_{x \in \partial B_1(0)} \|Lx\|_{\mathcal{Y}} = \sup_{x \in \mathcal{X} \setminus \{0\}} \frac{\|Lx\|_{\mathcal{Y}}}{\|x\|_{\mathcal{X}}} \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$$

(mit der Einheitskugel  $B_1(0)$  in  $\mathcal{X}$ ) als **Operatornorm der linearen Abbildung**  $L$ . Somit ist  $\|L\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}$  die kleinste Schranke für  $L$  auf  $B_1(0)$  und  $\partial B_1(0)$ , die kleinstmögliche Konstante in der Abschätzung  $\|Lx\|_{\mathcal{Y}} \leq \|L\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})} \|x\|_{\mathcal{X}}$  für  $x \in \mathcal{X}$  und die optimale Lipschitz-Konstante von  $L$  auf  $\mathcal{X}$ . Es ist auch leicht einzusehen, dass für  **$\mathbb{R}$ -lineares**  $L: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  gilt:

$$\begin{aligned} L \text{ stetig auf } \mathcal{X} &\iff L \text{ stetig in } 0 \iff L \text{ Lipschitz-stetig auf } \mathcal{X} \\ &\iff L \text{ beschränkt auf } B_1(0) \iff \|L\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})} < \infty. \end{aligned}$$

Insbesondere ist  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}$  endlich auf dem **Raum  $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  der stetigen  $\mathbb{R}$ -linearen Abbildungen  $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$** , und man sieht schnell, dass es sich bei der Operatornorm tatsächlich um eine Norm auf diesem Raum handelt, mit der er im Folgenden stets versehen wird.

Ist  $\mathcal{X}$  endlich-dimensional, also z.B.  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^N$ , so sind alle linearen Abbildungen  $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  automatisch stetig (denn dann gilt ja  $L(\sum_{i=1}^N x_i e_i) = \sum_{i=1}^N x_i L e_i$  mit einer Basis  $e_1, e_2, \dots, e_N$  von  $\mathcal{X}$ ), und  $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  ist dann der Raum *aller*  $\mathbb{R}$ -linearen Abbildungen  $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ . Die Operatornorm bleibt aber auch im endlich-dimensionalen Fall eine nicht-triviale und relevante Bildung.

Mit den gerade eingeführten Notationen lässt sich die totale Ableitung von  $f: \mathcal{X} \supset D \rightarrow \mathcal{Y}$  an der Stelle  $a \in \mathring{D}$  als Element  $f'(a) \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  von  $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  auffassen und die Operatornorm  $\|f'(a)\|_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  bilden. Hierbei ist es essentiell, dass in den Definitionen der totalen Ableitungen und des Raums  $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  mit  $\mathbb{R}$ -linearen und selbst im Fall normierter Räume  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  über  $\mathbb{C}$  nicht etwa mit  $\mathbb{C}$ -linearen Abbildungen gearbeitet wurde; dies unterscheidet nämlich die in diesem Kapitel untersuchten *reellen* Ableitungsbegriffe von stärkeren *komplexen* Ableitungsbegriffen mit ganz anderem Verhalten, das in der Funktionentheorie untersucht wird. Bei auf offenem  $D$  existenter totaler Ableitung  $f'$  ist es zudem möglich und üblich, diese als Funktion  $f': D \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  aufzufassen. Man beachte dabei aber, dass keineswegs die Abbildung  $f'$  von  $D$  nach  $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  linear sein muss, sondern nur jeder ihrer Werte selbst eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung  $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  ist. Mit anderen Worten hängt  $f'(x)v \in \mathcal{Y}$  i.A. nicht-linear von  $x \in D$ , aber stets  $\mathbb{R}$ -linear von  $v \in \mathcal{X}$  ab.

Nach noch einer kurzen Definition folgt jetzt mehr Grundlegendes zu totalen Ableitungen.

**Eingeschobene Definition (konvexe Mengen).** Eine Teilmenge  $A$  eines  $\mathbb{K}$ -Vektorraums heißt *konvex*, wenn für alle  $a, b \in A$  auch die Verbindungsstrecke  $[a, b] := \{(1-t)a + tb : t \in [0, 1]\}$  in  $A$  enthalten ist.

**Satz (Schränkensatz mit der totalen Ableitung).** Seien  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  normierte Räume,  $D$  eine **konvexe** und offene Teilmenge von  $\mathcal{X}$  und  $f: D \rightarrow \mathcal{Y}$  eine in jedem Punkt von  $D$  total differenzierbare Funktion. Dann gilt

$$\|f(b) - f(a)\|_{\mathcal{Y}} \leq \left( \sup_{x \in D} \|f'(x)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})} \right) \|b - a\|_{\mathcal{X}} \quad \text{für alle } a, b \in D.$$

Der Satz ist eine direkte Konsequenz des zuvor erwähnten Schränkensatzes mit Richtungsableitungen und der Identität  $\|\partial_v f(x)\|_{\mathcal{Y}} = \|f'(x)v\|_{\mathcal{Y}} \leq \|f'(x)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}$  für Einheitsvektoren  $v \in \mathcal{X}$ . Eine Konsequenz des Schränkensatzes ist, dass **auf** offenen und **konvexen Mengen** (genau wie in Abschnitt 4.3 auf Intervallen beobachtet) **die differenzierbaren Lipschitz-Funktionen genau die Funktionen mit beschränkter Ableitung sind**. Die Beschränktheit der Ableitung bedeutet dabei natürlich nichts anderes als Endlichkeit des im Satz auftretenden Supremums mit der Operatornorm.

Die Frage, wie man totale Differenzierbarkeit einer gegebenen Funktion überhaupt nachweist, wurde bislang überhaupt noch nicht angesprochen. Im Fall  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^N$  gibt es aber ein einfaches und für fast alle praktischen Zwecke ausreichendes Kriterium:

**Hauptsatz (hinreichendes Kriterium für totale Differenzierbarkeit).** Sei  $f: D \rightarrow \mathcal{Y}$  eine Funktion von  $D \subset \mathbb{R}^N$  in einen normierten Raum  $\mathcal{Y}$ . Existieren die partiellen Ableitungen von  $f$  nach allen  $N$  Variablen in einer Umgebung von  $a \in \mathring{D}$  und sind all diese **partiellen Ableitungen in  $a$  stetig**, so ist  $f$  in  $a$  total differenzierbar, insbesondere hängt  $\partial_v f(a) = f'(a)v$  linear von  $v \in \mathbb{R}^N$  ab.

Ein Beweis folgt unten.

**Definition (stetige Differenzierbarkeit,  $C^1$ -Funktionen).** Seien  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  normierte Räume und  $D$  eine offene Teilmenge von  $\mathcal{X}$ . Man nennt  $f: D \rightarrow \mathcal{Y}$  **stetig differenzierbar** auf  $D$  oder **Funktion der Klasse  $C^1$**  auf  $D$ , wenn die totale Ableitung  $f': D \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  auf ganz  $D$  existiert und stetig ist (natürlich bezüglich der Operatornorm auf  $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ ). Man schreibt  $C^1(D, \mathcal{Y})$  für den **Raum aller  $C^1$ -Funktionen**  $D \rightarrow \mathcal{Y}$ .

Aus dem Hauptsatz und dem Zusammenhang  $\partial_i f(x) = f'(x)e_i$  (bei Existenz von  $f'(x)$  für  $x \in D \subset \mathbb{R}^N$ ) ergibt sich folgendes kanonische Kriterium zum Nachweis der  $C^1$ -Eigenschaft:

**Korollar.** Für  $D \subset \mathbb{R}^N$ , einen normierten Raum  $\mathcal{Y}$  und  $f: D \rightarrow \mathcal{Y}$  gilt:

$$f \in C^1(D, \mathcal{Y}) \iff \partial_1 f, \partial_2 f, \dots, \partial_N f \text{ existieren und sind stetig auf } D.$$

*Beweis des Hauptsatzes.* Man definiert zunächst eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung  $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathcal{Y})$  durch  $Lv := \sum_{i=1}^N v_i \partial_i f(a)$  für  $v = (v_1, v_2, \dots, v_N) \in \mathbb{R}^N$ . Die Hilfsfunktion

$$g := f - L$$

hat dann auf einer Umgebung von  $a$  und für  $i = \{1, 2, \dots, n\}$  partielle Ableitungen  $\partial_i g = \partial_i f - \partial_i f(a)$ , die in  $a$  stetig sind mit  $\partial_i g(a) = 0$ . Zu beliebigem  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$  gibt es deshalb ein  $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$  mit  $\|\partial_i g\|_{\mathcal{Y}} \leq \frac{1}{N}\varepsilon$  auf  $B_\delta(a)$  für alle  $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ . Unter Verwendung des Schrankeinsatzes mit Richtungsableitungen (*nicht* die Version mit der totalen Ableitung, deren Existenz ja erst noch zu zeigen ist) ergibt sich

$$\begin{aligned} \|g(x) - g(a)\|_{\mathcal{Y}} &\leq \sum_{i=1}^N \|g(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_N) - g(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, x_{i+1}, \dots, x_N)\|_{\mathcal{Y}} \\ &\leq \sum_{i=1}^N \left( \sup_{B_\delta(0)} \|\partial_i g\|_{\mathcal{Y}} \right) |x_i - a_i| \leq \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} \varepsilon |x - a| = \varepsilon |x - a| \quad \text{für alle } x \in B_\delta(a), \end{aligned}$$

wobei benutzt wurde, dass für  $x \in B_\delta(a)$  die Strecke von  $(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_N)$  nach  $(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, x_{i+1}, \dots, x_N)$  stets in  $B_\delta(a)$  bleibt. Damit ist gezeigt, dass

$$\limsup_{x \rightarrow a} \frac{\|f(x) - f(a) - L(x-a)\|_{\mathcal{Y}}}{|x-a|} = \limsup_{x \rightarrow a} \frac{\|g(x) - g(a)\|_{\mathcal{Y}}}{|x-a|} \leq \varepsilon$$

gilt. Da  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$  beliebig war, ist der vorausgehende  $\limsup$  sogar gleich Null, und  $f$  ist an der Stelle  $a$  total differenzierbar mit Ableitung  $f'(a) = L$ .  $\square$

Wie für alle Ableitungsbegriffe gelten auch für totale Ableitungen naheliegende Summen-, Faktor- und Produktregeln, die hier aber nicht im Detail erörtert werden. Interessanter ist die folgende allgemein Kettenregel, auf die man alle anderen Regeln übrigens zurückführen kann:

**Satz (Kettenregel für totale Ableitungen).** Seien  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$  normierte Räume,  $f: D \rightarrow \mathcal{Y}$  eine Funktion auf  $D \subset \mathcal{X}$  und  $g: \tilde{D} \rightarrow \mathcal{Z}$  eine Funktion mit  $f(D) \subset \tilde{D} \subset \mathcal{Y}$  (so dass  $g \circ f$  wohldefiniert ist). Ist  $f$  in  $a$  total differenzierbar und ist  $g$  in  $f(a)$  total differenzierbar, so ist auch  $g \circ f$  in  $a$  total differenzierbar mit

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a) \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Z}),$$

wobei auf der rechten Seite die Komposition  $v \mapsto g'(f(a))(f'(a)v)$  der stetigen  $\mathbb{R}$ -linearen Abbildungen  $f'(a) \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  und  $g'(f(a)) \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$  zu bilden ist.

*Beweis.* Zunächst wird der Fall  $g'(f(a)) = 0$  behandelt. In diesem Fall erhält man durch

$$h(y) := \begin{cases} \frac{\|g(y) - g(f(a))\|_{\mathcal{Z}}}{\|y - f(a)\|_{\mathcal{Y}}} & \text{für } y \neq f(a) \\ 0 & \text{für } y = f(a) \end{cases}$$

eine in  $f(a)$  stetige Funktion  $h$ . Wegen  $\limsup_{\mathcal{X} \ni x \rightarrow a} \frac{\|f(x) - f(a)\|_{\mathcal{Y}}}{\|x - a\|_{\mathcal{X}}} \leq \|f'(a)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})} < \infty$  und  $h(f(a)) = 0$  folgt

$$\lim_{\mathcal{X} \ni x \rightarrow a} \frac{\|g(f(x)) - g(f(a))\|_{\mathcal{Z}}}{\|x - a\|_{\mathcal{X}}} = \lim_{\mathcal{X} \ni x \rightarrow a} h(f(x)) \frac{\|f(x) - f(a)\|_{\mathcal{Y}}}{\|x - a\|_{\mathcal{X}}} = 0.$$

Also ist  $g \circ f$  in  $a$  total differenzierbar mit  $(g \circ f)'(a) = 0$ , und die Behauptung ist im Fall  $g'(f(a)) = 0$  verifiziert.

Im allgemeinen Fall setzt man  $L := g'(f(a)) \in \mathcal{L}(Y, Z)$  und  $\tilde{g}(y) := g(y) - Ly$ . Für die so definierte Hilfsfunktion  $\tilde{g}$  gilt  $\tilde{g}'(f(a)) = g'(f(a)) - L = 0$  und dann auch  $(\tilde{g} \circ f)'(a) = 0$  gemäß dem Gezeigten. Anhand der Definition der totalen Ableitung verifiziert man  $(Lf)'(a) = Lf'(a)$ , und dann ergibt sich mit  $(g \circ f)'(a) = (\tilde{g} \circ f)'(a) + (Lf)'(a) = Lf'(a)$  die Behauptung.  $\square$

**Folgerungen (weitere Versionen der Kettenregel).** Aus der Kettenregel für totale Ableitungen kann man weitere Versionen der Kettenregel ableiten, die jedenfalls unter denselben Voraussetzungen an  $f$  und  $g$  gelten, aber tatsächlich (kleine Zusatzargumente) auch schon dann, wenn nur die jeweils auftretenden Ableitungen von  $f$  und die totale Ableitung  $g'(f(a))$  existieren.

- (1) Mit der  $f'(a)v = \partial_v f(a)$  gewinnt man die **Kettenregel für Richtungsableitungen** in Richtung  $v \in \mathcal{X}$

$$\partial_v(g \circ f)(a) = \partial_w g(f(a)) \in \mathcal{Z} \quad \text{mit } w := \partial_v f(a) \in \mathcal{Y}$$

- (2) Speziell im Fall  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^N$ ,  $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^M$ ,  $\mathcal{Z} = \mathbb{R}^L$  ergibt sich, weil die totale Ableitung ja dann durch die Funktionalmatrix dargestellt wird, die **Kettenregel für Funktionalmatrizen**

$$D(g \circ f)(a) = Dg(f(a))Df(a) \in \mathbb{R}^{L \times N},$$

bei der rechts das Produkt der Matrizen  $Dg(f(a)) \in \mathbb{R}^{L \times M}$  und  $Df(a) \in \mathbb{R}^{M \times N}$  steht.

- (3) Ebenfalls im Fall  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^N$ ,  $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^M$ ,  $\mathcal{Z} = \mathbb{R}^L$  erhält man durch Ausschreiben des Matrixprodukts in der vorigen Regel (oder alternativ auch aus der Version für Richtungsableitungen) die **Kettenregel für partielle Ableitungen**

$$\partial_k(g_i \circ f)(a) = \sum_{j=1}^M \partial_j g_i(f(a)) \partial_k f_j(a) \in \mathbb{R} \quad \text{für } i \in \{1, 2, \dots, L\}, k \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

**Beispiele** (zur Anwendung von Kettenregeln).

- (1) Für beliebiges differenzierbares  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^L$  gibt die Kettenregel (mit  $N = 3$ ,  $M = 2$ )

$$\frac{\partial}{\partial y} g(xy^3 e^z, z + \sin y) = \partial_1 g(xy^3 e^z, z + \sin y) 3xy^2 e^z + \partial_2 g(xy^3 e^z, z + \sin y) \cos y$$

für  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .

- (2) Auch die simultane Differentiation eines Integrals nach einer Integrationsgrenze und einem Parameter kann mit der Kettenregel durchgeführt werden. Zum Beispiel erhält man

$$\frac{d}{dt} \int_0^{t^2} e^{-ts^2} ds = e^{-t^5} 2t - \int_0^{t^2} s^2 e^{-ts^2} ds \quad \text{für } t \in \mathbb{R}$$

aus der Kettenregel mit  $N = L = 1$ ,  $M = 2$  und  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto \int_0^x e^{-ys^2} ds$ .

Neben den bereits behandelten Ableitungsgrößen gibt es noch einige weitere:

**Definition (Gradienten).** Seien  $D \subset \mathbb{R}^N$ ,  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  eine **R-wertige Funktion** und  $a \in \overset{\circ}{D}$ . Falls die Richtungsableitung  $\partial_v f(a)$  für alle  $v \in \mathbb{R}^N$  existiert und  $\mathbb{R}$ -linear von  $v \in \mathbb{R}^N$  abhängt, so gibt es stets einen Vektor  $\nabla f(a) \in \mathbb{R}^N$  mit

$$\partial_v f(a) = v \cdot \nabla f(a) \quad \text{für alle } v \in \mathbb{R}^N$$

(wobei  $\cdot$  das Euklidische Skalarprodukt auf  $\mathbb{R}^N$  bezeichnet), und tatsächlich kann

$$\nabla f(a) = (\partial_1 f(a), \partial_2 f(a), \dots, \partial_{N-1} f(a), \partial_N f(a)) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(a) \\ \partial_2 f(a) \\ \vdots \\ \partial_{N-1} f(a) \\ \partial_N f(a) \end{pmatrix}$$

konkret angegeben werden. Eine alternative Notation für  $\nabla f(a)$  ist  $\text{grad } f(a)$ .

**Bemerkungen** (zum Gradienten).

- (1) Der Gradient  $\nabla f(a) \in \mathbb{R}^N \equiv \mathbb{R}^{N \times 1}$  macht **nur bei R-wertigen Funktionen** Sinn und ist dann die transponierte Matrix der Funktionalmatrix  $Df(a) \in \mathbb{R}^{1 \times N}$ .

Allgemeiner kann man den Gradienten  $\nabla f(a) \in \mathcal{X}$  übrigens auch dann erklären, wenn  $\mathbb{R}^N$  in der Definition durch einen beliebigen Hilbert-Raum  $\mathcal{X}$  ersetzt wird, man kann ihn dann aber natürlich nicht mehr als expliziten Vektor mit endlich vielen Einträgen angeben. Trotzdem existiert  $\nabla f(a) \in \mathcal{X}$ , sobald  $\partial_v f(a)$  stetig und  $\mathbb{R}$ -linear von  $v \in \mathcal{X}$  abhängt, ein Beweis hierfür geht aber über den Rahmen der Vorlesung hinaus.

- (2) Aus der Definition des Gradienten folgt gemäß der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$-|v| |\nabla f(a)| \leq \partial_v f(a) \leq |v| |\nabla f(a)| \quad \text{für alle } v \in \mathbb{R}^N$$

mit „ $=$ “ in der linken/rechten Ungleichung genau dann, wenn  $v$  und  $\nabla f(a)$  negativ/positiv linear abhängig sind. Daraus erkennt man die **geometrische Bedeutung des Gradienten**: Der Vektor  $\nabla f(a)$  zeigt in die Richtung des stärksten Anstiegs des Graphen von  $f$  vom Punkt  $(a, f(a))$  aus, und  $|\nabla f(a)|$  ist die zugehörige stärkste Steigung in diesem Punkt. Entsprechend ist die Richtung von  $-\nabla f(a)$  natürlich die des stärksten Abfalls des Graphen von  $f$  von  $(a, f(a))$  aus.

- (3) Existiert  $\nabla f(a)$  an allen Stellen  $a$  eines offenen  $D \subset \mathbb{R}^N$ , so sieht man  $\nabla f: D \rightarrow \mathbb{R}^N$  als Vektorfeld auf  $D$  an und nennt dieses das **Gradienten(vektor)feld** von  $f$ .

**Definition (Ableitung längs Kurven).** Seien  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  normierte Räume,  $f: D \rightarrow \mathcal{Y}$  eine Funktion auf  $D \subset \mathcal{X}$  und  $c: I \rightarrow D$  eine auf einem Intervall  $I$  definierte (injektive) Kurve in  $D$ . Für  $t_0 \in \overset{\circ}{I}$  heißt dann

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} f(c(t)) \in \mathcal{Y},$$

falls diese Ableitung existiert, die **Ableitung** von  $f$  im Punkt  $a = c(t_0)$  **längs der Kurve**  $c$ .

Wird in der Definition keine Injektivität von  $c$  angenommen, so kann die Kurve  $c$  Selbstschnitte besitzen, es kann also  $c(t)$  für verschiedene  $t$  mit demselben  $a \in D$  übereinstimmen. Für solche Schnittpunkte  $a$  ist die Sprechweise der Definition „Ableitung von  $f$  im Punkt  $a$  längs  $c$ “, streng genommen, nicht wohldefiniert, bei zusätzlicher Angabe des zugrunde gelegten Parameterwerts  $t_0$  kann man das Konzept aber auch dann noch verwenden. In eher theoretischem Kontext vermeidet man das Problem meist einfach durch die (implizite) Voraussetzung, dass  $c$  injektiv oder zumindest  $a$  kein Schnittpunkt von  $c$  mit sich ist.



**Bemerkung** (zur Ableitung längs Kurven). Richtungsableitungen von  $f$  mit Richtungsvektor  $v \in \mathcal{X}$  sind ein Spezialfall der Ableitung von  $f$  längs Kurven; sie entsprechen der Wahl der Geraden  $c(t) := a + tv$  (für  $t$  in einem ausreichend kleinen Intervall  $I$  um  $t_0 = 0$ ).

**Folgerungen** (Konsequenzen der Kettenregel für Gradienten und Ableitungen längs Kurven).

- (1) Existieren, unter den Voraussetzungen der vorausgehenden Definition,  $c'(t_0)$  und die totale Ableitung  $f'(a)$  im inneren Punkt  $a = c(t_0)$  von  $D$ , so existiert auch die **Ableitung** von  $f$  in  $a$  **längs der Kurve**  $c$  und **stimmt mit der Richtungsableitung  $\partial_v f(a)$  in Richtung des Tangentialvektors  $v := c'(t_0) \in \mathcal{X}$  an die Kurve  $c$  im Punkt  $a$  überein.**
- (2) Ist  $\mathcal{Y} = \mathbb{R}$  und  $c: I \rightarrow D$  eine differenzierbare **Niveaukurve** von  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ , d.h. ist  $f \circ c$  konstant, so **steht**, jedenfalls dort wo  $f'$  auf  $c(I)$  existiert, **der Gradient  $\nabla f$  von  $f$  senkrecht auf dem Tangentialvektor  $c'$  an die Kurve**, das bedeutet genauer

$$c'(t) \cdot \nabla f(c(t)) = 0$$

für alle  $t \in I$ , für die  $f'(c(t))$  existiert. Grob gesprochen ist der **Gradient** also immer **orthogonal zu ausreichend regulären Niveaumengen** von  $f$ .

Zum Abschluss des Abschnitts führen wir noch ein:

**Definitionen (Divergenz, Rotation).** Sei  $V: D \rightarrow \mathbb{R}^N$  ein Vektorfeld auf  $D \subset \mathbb{R}^N$ , das an einer Stelle  $a \in \overset{\circ}{D}$  nach allen  $N$  Variablen differenzierbar ist.

- (1) Man nennt die Spur

$$\operatorname{div} V(a) := \operatorname{Spur}(DV(a)) = \sum_{i=1}^N \partial_i V_i(a) \in \mathbb{R}$$

der Funktionalmatrix  $DV(a)$  die **Divergenz** von  $V$  an der Stelle  $a$ .

- (2) Man nennt den doppelten antisymmetrischen Anteil

$$\operatorname{Rot} V(a) := DV(a) - DV(a)^T = (\partial_j V_i(a) - \partial_i V_j(a))_{i,j=1,2,\dots,N} \in \mathbb{R}^{N \times N}$$

der Funktionalmatrix  $DV(a)$  die **Rotation** oder **Rotationsmatrix** von  $V$  an der Stelle  $a$ . Ausgeschrieben hat diese Matrix die Form

$$\begin{pmatrix} 0 & \partial_2 V_1 - \partial_1 V_2 & \cdots & \partial_{N-1} V_1 - \partial_1 V_{N-1} & \partial_N V_1 - \partial_1 V_N \\ \partial_1 V_2 - \partial_2 V_1 & 0 & \cdots & \partial_{N-1} V_2 - \partial_2 V_{N-1} & \partial_N V_2 - \partial_2 V_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \partial_1 V_{N-1} - \partial_{N-1} V_1 & \partial_2 V_{N-1} - \partial_{N-1} V_2 & \cdots & 0 & \partial_N V_{N-1} - \partial_{N-1} V_N \\ \partial_1 V_N - \partial_N V_1 & \partial_2 V_N - \partial_N V_2 & \cdots & \partial_{N-1} V_N - \partial_N V_{N-1} & 0 \end{pmatrix} (a).$$

Speziell im **Fall  $N = 3$**  nennt man auch

$$\operatorname{rot} V(a) := \begin{pmatrix} \partial_2 V_3(a) - \partial_3 V_2(a) \\ \partial_3 V_1(a) - \partial_1 V_3(a) \\ \partial_1 V_2(a) - \partial_2 V_1(a) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

**Rotation** oder **Rotationsvektor** von  $V$  an der Stelle  $a$ , und im **Fall  $N = 2$**  nennt man

$$\operatorname{rot} V(a) := \operatorname{div}(V_2, -V_1)(a) = \partial_1 V_2(a) - \partial_2 V_1(a) \in \mathbb{R}$$

**Rotation** oder **Rotationskalar** von  $V$  an der Stelle  $a$ .

**Definition (Hesse-Matrizen).** Sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $\mathbb{R}$ -wertige Funktion auf  $D \subset \mathbb{R}^N$ , so dass das Gradientenfeld auf einer Umgebung von  $a \in \overset{\circ}{D}$  existiert und an der Stelle  $a$  nach allen  $N$  Variablen differenzierbar ist. Dann heißt

$$Hf(a) := D(\nabla f)(a) = (\partial_j(\partial_i f)(a))_{i,j=1,2,\dots,N} \in \mathbb{R}^{N \times N}$$

die **Hesse-Matrix** von  $f$  an der Stelle  $a$ . Ausgeschrieben hat diese Matrix die Form

$$\begin{pmatrix} \partial_1 \partial_1 f(a) & \partial_2 \partial_1 f(a) & \cdots & \partial_{N-1} \partial_1 f(a) & \partial_N \partial_1 f(a) \\ \partial_1 \partial_2 f(a) & \partial_2 \partial_2 f(a) & \cdots & \partial_{N-1} \partial_2 f(a) & \partial_N \partial_2 f(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \partial_1 \partial_{N-1} f(a) & \partial_2 \partial_{N-1} f(a) & \cdots & \partial_{N-1} \partial_{N-1} f(a) & \partial_N \partial_{N-1} f(a) \\ \partial_1 \partial_N f(a) & \partial_2 \partial_N f(a) & \cdots & \partial_{N-1} \partial_N f(a) & \partial_N \partial_N f(a) \end{pmatrix}.$$

**Bemerkungen** (zu Divergenz, Rotation und Hesse-Matrizen). Hier wird nur eine kleine Auswahl aus sehr vielen möglichen Kommentaren zu diesen Ableitungsgrößen angegeben:

- (1) Falls  $\operatorname{div} V$ ,  $\operatorname{Rot} V$ ,  $\operatorname{rot} V$ ,  $Hf$  an allen Stellen eines offenen  $D \subset \mathbb{R}^N$  existieren, können sie natürlich als Funktion oder Vektor-/Matrixfeld mit Werten in  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^{N \times N}$ ,  $\mathbb{R}^3$  bzw.  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^{N \times N}$  aufgefasst werden.
- (2) Mit dem **formalen Operator „Nabla“**

$$\nabla := (\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_{N-1}, \partial_N) = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \vdots \\ \partial_{N-1} \\ \partial_N \end{pmatrix}$$

schreibt man Gradient, Divergenz und Rotationsvektor (letzteren nur für  $N = 3$  und Vektorfelder auf Teilmengen von  $\mathbb{R}^3$ , wie er auch nur definiert wurde) alternativ als

$$\operatorname{grad} f = \nabla f, \quad \operatorname{div} V = \nabla \cdot V, \quad \operatorname{rot} V = \nabla \times V.$$

Diese besonders in der Physik verbreiteten Notationen betonen die Analogien zum Skalarprodukt  $\cdot$  des  $\mathbb{R}^N$  und zum sogenannten Kreuzprodukt  $v \times w := \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

von Vektoren  $v, w \in \mathbb{R}^3$ , das bilinear, aber nicht (!) kommutativ ist. Tatsächlich verschwindet  $v \times w = -w \times v$  bei linearer Abhängigkeit von  $v$  und  $w$  und ergibt sonst einen zu  $v$  und  $w$  orthogonalen Vektor, so dass  $v, w, v \times w$  positiv orientierte Basis des  $\mathbb{R}^3$  ist und  $|v \times w|^2 + |v \cdot w|^2 = |v|^2 |w|^2$  gilt.

- (3) Die **Divergenz**  $\operatorname{div} V$  kann man als **Quelldichte** (dort wo sie positiv ist) beziehungsweise **Senkendichte** (dort wo sie negativ ist) des Vektorfelds  $V$  interpretieren. Präziser wird dies in der höheren Analysis durch sogenannten Satz von Gauß oder Divergenzsatz erklärt.
- (4) Die **Rotationsmatrix** ist **stets antisymmetrisch/schiefsymmetrisch**, d.h. sie erfüllt  $(\operatorname{Rot} V)^T = -\operatorname{Rot} V$ . Tatsächlich kann jede Matrix  $A$  als Summe ihres symmetrischen Anteils  $\frac{1}{2}(A + A^T)$  und ihres antisymmetrischen/schiefsymmetrischen Anteils  $\frac{1}{2}(A - A^T)$  geschrieben

werden, und in diesem Sinn wurde  $\text{Rot } V$  bereits in der Definition als doppelter antisymmetrischer Anteil von  $DV$  bezeichnet. Insbesondere verschwinden die Diagonaleinträge einer  $(N \times N)$ -Rotationsmatrix, und die Einträge oberhalb und unterhalb der Diagonalen unterscheiden sich nur um Vorzeichen, so dass  $\frac{1}{2}N(N-1)$  unabhängige Einträge verbleiben (m.a.W. hat der Raum der antisymmetrischen  $(N \times N)$ -Matrizen Dimension  $\frac{1}{2}N(N-1)$ ). Speziell im Fall  $N = 3$  hat eine  $(3 \times 3)$ -Rotationsmatrix also 3 unabhängige Einträge, die den 3 Einträgen des Rotationsvektors entsprechen, im Fall  $N = 2$  bleibt nur ein unabhängiger Eintrag, der dem Rotationskalar entspricht.

- (5) Die **Hesse-Matrix**  $Hf$  ist im Normalfall **stets symmetrisch**, d.h. es gilt  $(Hf)^T = Hf$ . Die Gültigkeit dieser Aussage ist aber nicht offensichtlich und wird im späteren Abschnitt 8.4 noch als Satz (dann natürlich mit Angabe der genauen, für den Normalfall benötigten Voraussetzungen) formuliert und bewiesen. Symmetrie der  $(N \times N)$ -Matrix  $Hf$  bedeutet nichts anderes als **Vertauschbarkeit partieller Ableitungsoperatoren**  $\partial_j \partial_i f = \partial_i \partial_j f$  für  $i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$ , und mit anderen Worten verschwindet der doppelte antisymmetrische Anteil

$$\text{Rot}(\nabla f) \equiv 0$$

von  $Hf = D(\nabla f)$ . Deshalb ist das **Verschwinden der Rotation**  $\text{Rot } V \equiv 0$  ein **notwendiges Kriterium dafür, dass ein Vektorfeld  $V$  ein Gradientenfeld ist**.

- (6) Für  $\mathbb{R}$ -wertige Funktionen  $f$  und Vektorfelder  $V$  auf offenem  $D \subset \mathbb{R}^N$  gilt die **Produktregel für die Divergenz** (mit Skalarprodukt  $\cdot$  des  $\mathbb{R}^N$ )

$$\text{div}(fV) = f \text{div } V + V \cdot \nabla f \quad \text{auf } D,$$

falls die rechte Seite existiert. Diese Regel ist in der Analysis in ganz verschiedenen Zusammenhängen immer wieder einmal von Relevanz. Speziell für das Ortsvektorfeld  $X$  auf  $\mathbb{R}^N$  ergibt sich

$$\text{div}(fX) = Nf + \partial_X f \quad \text{auf } D,$$

und zum Beispiel verschwindet deshalb

$$\text{div}_x \left( |x|^s \frac{x}{|x|} \right) = (N+s-1)|x|^{s-1} \quad \text{mit Parameter } s \in \mathbb{R}$$

im Fall  $N = 3$  genau dann für alle  $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ , wenn  $s = -2$  ist. Letzteres kann als Hintergrund physikalischer Gesetzmäßigkeit wie beispielsweise des Coulomb-Gesetzes (Betrag der elektrischen Feldstärke fällt wie  $|x|^{-2}$ , wenn  $|x|$  der Abstand zu einer Punktladung ist) angesehen werden.

## 8.2 Extremstellenbestimmung bei Funktionen mehrerer Variablen

In diesem Abschnitt geht es um Kriterien und Verfahren der Differentialrechnung, die zur Extremstellenbestimmung bei Funktionen mehrerer Variablen dienen. Dabei wird nur der Fall von Funktionen  $D \rightarrow \mathbb{R}$  auf  $D \subset \mathbb{R}^N$  behandelt. Für Definitionsbereiche  $D$  in  $\infty$ -dimensionalen normierten Räumen/Banach-Räumen/Hilbert-Räumen gilt manches analog; derartige Verallgemeinerungen werden hier aber nicht diskutiert.

Als Erstes werden einige von Funktionen einer Variablen bekannte Begriffe verallgemeinert:

**Definitionen (lokale Extremstellen, kritische Punkte).** Seien  $D$  eine Teilmenge von  $\mathbb{R}^N$  und  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $\mathbb{R}$ -wertige Funktion auf  $D$ .

- Man nennt  $a \in D$  eine **lokale Minimalstelle** von  $f$  auf  $D$ , wenn es eine Umgebung  $U$  von  $a$  in  $D$  gibt, so dass  $f(a) \leq f(x)$  für alle  $x \in U$  gilt. Kann  $U$  sogar so gewählt werden, dass die strikte Ungleichung  $f(a) < f(x)$  für alle  $x \in U \setminus \{a\}$  eintritt, so spricht man von einer **strikten lokalen Minimalstelle**  $a$  von  $f$  auf  $D$ .
- Eine (**strikte**) **lokale Maximalstelle**  $a \in D$  von  $f$  auf  $D$  erklärt man völlig analog mit umgekehrten Ungleichungen.
- Eine (**strikte**) **lokale Extremstelle** von  $f$  auf  $D$  ist eine Stelle, die entweder (**strikte**) lokale Minimalstelle oder (**strikte**) lokale Maximalstelle ist.
- Man bezeichnet eine innere Stelle  $a$  von  $D$  als **kritischen Punkt** von  $f$ , wenn  $f$  in  $a$  differenzierbar<sup>3</sup> ist und  $\nabla f(a) = 0_{\mathbb{R}^N}$  gilt, d.h. der **Gradient** von  $f$  in  $a$  **verschwindet**.

Neue Definitionen absoluter Extremstellen werden hier übrigens nicht benötigt, denn solche konnten bereits in Abschnitt 3.3 für Funktionen auf völlig beliebigen Definitionsbereichen erklärt werden.

Ein erstes, sehr einfaches und zugleich sehr grundlegendes Kriterium für Extremstellen ist:

**Satz (notwendiges Kriterium für innere Extremstellen).** Sei  $D \subset \mathbb{R}^N$ . Ist  $a \in \overset{\circ}{D}$  lokale Extremstelle von  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  auf  $D$ , und ist  $f$  in  $a$  differenzierbar, so **ist**  $a$  **notwendig** ein **kritischer Punkt** von  $f$ .

*Beweis.* Für jedes  $i \in \{1, 2, \dots, N\}$  ist die  $i$ -te Komponente  $a_i$  des Vektors  $a$  eine lokale Extremstelle von  $f(a_1, \dots, a_{i-1}, \cdot, a_i, \dots, a_N)$ . Die Differentialrechnung einer Variablen liefert also  $\partial_i f(a) = (f(a_1, \dots, a_{i-1}, \cdot, a_i, \dots, a_N))'(a_i) = 0$  für alle  $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ . Folglich verschwindet auch  $\nabla f(a) = (\partial_1 f(a), \partial_2 f(a), \dots, \partial_N f(a))$ .  $\square$

**Bemerkung.** Liegt in einer lokalen  $\begin{matrix} \text{Minimal} \\ \text{Maximal} \end{matrix}$ stelle  $a$  von  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  auf  $D \subset \mathbb{R}^N$  keine totale Differenzierbarkeit vor, aber existiert die Richtungsableitung oder zumindest die einseitige Richtungsableitung (das ist gerade der folgende Ausdruck) in Richtung eines Vektors  $v \in \mathbb{R}^N$ , so ergibt sich aus der Differentialrechnung einer Variablen das notwendige Kriterium

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0+} f(a+tv) \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 0.$$

Auf dem vorausgehenden Satz baut ein vom Prinzip her sehr einfaches Verfahren auf:

**Verfahren (zur Bestimmung absoluter Extremstellen bei mehreren Variablen).** Sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion auf  $D \subset \mathbb{R}^N$ . Zur Bestimmung der Extremstellen von  $f$  auf einer Teilmenge  $A$  von  $D$  empfiehlt sich das Vorgehen in folgenden drei Schritten:

<sup>3</sup>Soweit nicht anders spezifiziert, ist Differenzierbarkeit fortan immer als totale Differenzierbarkeit zu verstehen.

(I) **Existenz sicherstellen:**

Ist  $A$  kompakt und ist  $f$  stetig auf  $A$ , so folgt die Existenz einer absoluten Minimal- und einer absoluten Maximalstelle von  $f$  auf  $A$  aus dem allgemeinen **Extremalsatz** des Abschnitts 6.3.

Andernfalls untersucht man das Verhalten von  $f$  bei Grenzübergängen gegen nicht zu  $A$  gehörige Randpunkte in  $(\partial A) \setminus A$ , den unendlichen fernen Punkt  $\infty_{\mathbb{R}^N}$  und/oder Unstetigkeitsstellen; meist folgt dann Existenz aus dem Zusatz zum Extremalsatz, oder Nicht-Existenz wird offensichtlich.

(II) **Vollständige Kandidatenliste aufstellen:**

In diese Liste sind einerseits **Nichtdifferenzierbarkeitsstellen** und **kritische Punkte** von  $f$  **im Innern**  $\overset{\circ}{A}$  von  $A$  aufzunehmen. Zur Berechnung kritischer Punkte  $x \in \overset{\circ}{A}$  geht man dabei vom Gleichungssystem  $\nabla f(x) = 0$ , d.h. ausgeschrieben  $\partial_1 f(x) = 0, \partial_2 f(x) = 0, \dots, \partial_N f(x) = 0$ , aus. Dieses System von  $N$  im Allgemeinen nicht-linearen Gleichungen für die  $N$  Variablen  $x_1, x_2, \dots, x_N$  kann keine, eine, mehrere oder gar unendlich viele Lösungen haben.

Andererseits sind in die Kandidatenliste auch **gewisse zu  $A$  gehörige Randpunkte** in  $A \cap \partial A$  aufzunehmen. In glücklichen Fällen (beispielsweise, wenn  $A$  offen ist, wenn nur endlich viele Randpunkte zu  $A$  gehören, oder, wenn die Menge der zugehörigen Funktionswerte überschaubar bleibt) kann man einfach alle solchen Punkte in die Kandidatenliste aufnehmen und zum letzten Schritt des Verfahrens übergehen. Im Allgemeinen braucht man aber **Kriterien zur Auswahl der Randkandidaten**, die **im Verlauf dieses Abschnitts** noch behandelt werden.

(III) **Wertevergleich durchführen:**

Man berechnet und vergleicht die **Funktionswerte in allen auf die Kandidatenliste genommenen Punkten**. Die Punkte mit den kleinsten und größten Funktionswerten sind damit — so die Existenz gesichert und die Liste korrekt aufgestellt wurde — als **absolute Extremstellen identifiziert**.

**Beispiele** (zur Extremstellenbestimmung).

(1) Als erstes Beispiel wird die stetige Funktion  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  zu

$$f(x, y, z) := x + y + yz - y^2 - z^2 - 2x^4 \quad \text{auf ganz } \mathbb{R}^3$$

betrachtet und obiges Verfahren auf diese angewandt:

- (I) Da  $\mathbb{R}^3$  nicht kompakt ist, ist der Extremalsatz nicht direkt anwendbar. Aufgrund von<sup>4</sup>  $\lim_{(x,y,z) \rightarrow \infty_{\mathbb{R}^3}} f(x, y, z) = -\infty$  ist aber klar, dass es keine absolute Minimalstelle von  $f$  auf  $\mathbb{R}^3$  gibt, während mindestens eine absolute Maximalstelle gemäß dem Zusatz zum Extremalsatz existiert.
- (II) Man berechnet  $\nabla f(x, y, z) = (1 - 8x^3, 1 + z - 2y, y - 2z)$  und erhält das Gleichungssystem  $1 - 8x^3 = 0, 1 + z - 2y = 0, y - 2z = 0$  für innere kritische Punkte. Die einzige Lösung dieses Gleichungssystems ist  $(x, y, z) = (\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ . Nichtdifferenzierbarkeitsstellen oder Randkandidaten gibt es hier nicht, da  $f$  glatt und  $\mathbb{R}^3$  offen ist.

<sup>4</sup>Zum Nachweis der Konvergenz schätzt man mit Hilfe der Youngschen Ungleichung  $yz \leq \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}z^2$  und  $-2x^4 \leq -\frac{1}{4}x^4 \leq -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}$  ab und erhält  $f(x, y, z) \leq 2|(x, y, z)| - \frac{1}{2}|(x, y, z)|^2 + \frac{1}{4} \rightarrow -\infty$  bei  $|(x, y, z)| \rightarrow \infty$ .

(III) Da es nur einen Kandidaten gibt, ist kein Wertevergleich nötig.

Insgesamt ist nachgewiesen, dass es keine absolute Minimalstelle von  $f$  auf  $\mathbb{R}^3$  gibt, während  $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$  die einzige absolute Maximalstelle von  $f$  auf  $\mathbb{R}^3$  ist.

(2) Als zweites Beispiel wird die stetige Funktion  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  zu

$$f(x, y) := x(1-x^2-y^2) \quad \text{auf der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe } \overline{B}_1^2(0)$$

betrachtet und obiges Verfahren erneut angewandt:

(I) Da  $\overline{B}_1^2(0)$  kompakt ist, garantiert der Extremalsatz die Existenz mindestens einer absoluten Minimal- und mindestens einer absoluten Maximalstelle von  $f$  auf  $\overline{B}_1^2(0)$ .

(II) Man berechnet  $\nabla f(x, y) = (1-3x^2-y^2, -2xy)$  und erhält das Gleichungssystem  $1-3x^2-y^2 = 0$ ,  $xy = 0$  für innere kritische Punkte. Es kommen nur Lösungen mit  $x = 0$  oder  $y = 0$  in Frage. Der erste Fall führt formal auf die beiden Lösungen  $(x, y) = (0, \pm 1)$ , die aber nicht im Innern  $B_1^2(0)$  von  $\overline{B}_1^2(0)$  liegen, der zweite Fall führt auf die beiden Kandidaten  $(\pm \frac{1}{3}\sqrt{3}, 0) \in B_1^2(0)$ . Zudem sind (im Moment; mangels bekannter Randkriterien) alle Punkte in  $\partial B_1^2(0)$  auf die Kandidatenliste zu nehmen.

(III) Es reicht hier,  $f(\frac{1}{3}\sqrt{3}, 0) > 0 > f(-\frac{1}{3}\sqrt{3}, 0)$  und (glückliches Zusammentreffen!)  $f(x, y) = 0$  für alle  $(x, y) \in \partial B_1^2(0)$  zu bemerken.

Damit sind  $(-\frac{1}{3}\sqrt{3}, 0)$  als einzige absolute Minimalstelle von  $f$  auf  $\overline{B}_1^2(0)$  und  $(\frac{1}{3}\sqrt{3}, 0)$  als einzige absolute Maximalstelle von  $f$  auf  $\overline{B}_1^2(0)$  identifiziert.

Es gibt auch Möglichkeiten zur Untersuchung des lokalen Verhaltens nahe kritischer Punkte:

**Bemerkung** (zu **Zweiter-Ordnung-Kriterien für Extremstellen**). Ähnlich wie im Fall einer Variablen kann auch bei mehreren Variablen der **Typ eines kritischen Punkts** mit Hilfe von Zweiter-Ordnung-Kriterien untersucht werden. Genauer gelten für  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  auf  $D \subset \mathbb{R}^N$  und eine Stelle  $a \in \overset{\circ}{D}$ , an der  $(f')'(a)$  existiert:

- **Notwendiges Kriterium:** Ist  $a$  lokale  $\begin{matrix} \text{Minimal} \\ \text{Maximal} \end{matrix}$ stelle von  $f$  auf  $D$ , so gilt  $\nabla f(a) = 0$ , und die **Hesse-Matrix**  $Hf(a)$  von  $f$  an der Stelle  $a$  ist  $\begin{matrix} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{matrix}$  **semidefinit**.
- **Hinreichendes Kriterium:** Gilt  $\nabla f(a) = 0$  und ist die **Hesse-Matrix**  $Hf(a)$  von  $f$  an der Stelle  $a$   $\begin{matrix} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{matrix}$  **definit**, so ist  $a$  **strikte** lokale  $\begin{matrix} \text{Minimal} \\ \text{Maximal} \end{matrix}$ stelle von  $f$  auf  $D$ .

Die Zweiter-Ordnung-Kriterien sind in verschiedenen theoretischen Zusammenhängen nützlich, **für die Rechenpraxis** ist ihr Einsatz aber **kaum empfehlenswert**, da die Berechnung der Hesse-Matrix (aus allen zweiten Ableitungen!) und die Prüfung ihrer Definitheit (z.B. durch Determinanten-Berechnungen bis  $N \times N$  mit dem Hauptminorenkriterium!) einen beträchtlichen Rechenaufwand erfordern — und dies, ohne dass der Gewinn einer Information a priori überhaupt garantiert werden kann.

Die Beweise der Zweiter-Ordnung-Kriterien fügen sich gut in den Rahmen des späteren Abschnitts 8.4 ein und werden dort nachgetragen.

Das nächste Thema ist die Bestimmung von Extremstellen auf nieder-dimensionalen Teilmengen von  $\mathbb{R}^N$ . In diesen Kontext werden sich auch die (schon angekündigten) Kriterien für Extremstellen am Rand ergeben. Zunächst werden nun ein formaler Rahmen abgesteckt und verschiedene mögliche Betrachtungsweisen erläutert:

**Formaler Rahmen (Extremstellenbestimmung auf nieder-dimensionalen Mengen).**

Sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $\mathbb{R}$ -wertige Funktion auf offenem  $D \subset \mathbb{R}^N$ . Für  $L \in \{1, 2, \dots, N-1, N\}$  macht die Frage nach Extremstellen von  $f$  dann Sinn ...

- (I) ... auf einer „ $L$ -dimensionalen“<sup>5</sup> Menge der Form

$$B = D \cap u(\Sigma).$$

Man spricht von einer **parametrischen Darstellung** von  $B$  als (Teil-)Bild eines offenen Parameterbereichs  $\Sigma \subset \mathbb{R}^L$  unter einer Funktion  $u: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^N$ . Ist  $u$  zumindest stetig, so kann man diesen Fall auf die Untersuchung von  $f \circ u$  auf der offenen Menge  $u^{-1}(D) \subset \Sigma \subset \mathbb{R}^L$  und damit **auf die Bestimmung innerer Extremstellen zurückführen**; deshalb wird die Extremstellenbestimmung mittels parametrischer Darstellungen im Folgenden nicht weiter thematisiert.

- (II) ... auf einer „ $L$ -dimensionalen“ Menge der Form

$$S = \{x \in D : g_i(x) = 0 \text{ für } i = 1, 2, \dots, M\} \quad \text{mit } M := N - L.$$

Man spricht von einer **impliziten Darstellung** von  $S$  durch  $M$  **Nebenbedingungen** der Form  $g_i = 0$  mit Funktionen  $g_1, g_2, \dots, g_M: D \rightarrow \mathbb{R}$ . Schlagkräftige Kriterien für diesen Fall werden **im nächsten Satz** bereitgestellt.

Insbesondere gibt es bei (Teilen von) „ $(N-1)$ -dimensionalen“ Rändern  $\partial A$  oft eine solche Darstellung mit  $M = 1$ , typischerweise gilt für eine Funktion  $g: D \rightarrow \mathbb{R}$  dann sogar

$$\begin{aligned} D \cap \overset{\circ}{A} &= \{x \in D : g(x) > 0\}, \\ D \cap \partial A &= \{x \in D : g(x) = 0\}, \\ D \setminus \bar{A} &= \{x \in D : g(x) < 0\}. \end{aligned}$$

- (III) ... auf einer **allgemeinen „geometrischen“ Menge**  $G \subset D$  (die keine speziellen Eigenschaften und vielleicht gar keine offensichtliche Dimension haben muss). Ein Kriterium, das selbst diese allgemeine Situation erfasst, wird **im übernächsten Satz** formuliert.

Es folgt das angekündigte Kriterium für Extremstellen auf Mengen des Typs  $S$  aus (II):

**Satz (notwendiges Kriterium für Extremstellen bei Nebenbedingungen).** *Unter den Voraussetzungen von (II) sei  $f$  an der Stelle  $a \in S$  differenzierbar, und  $g_1, g_2, \dots, g_M$  seien von der Klasse  $C^1$  auf einer offenen Umgebung von  $a$ . Ist dann  $a$  eine **lokale Extremstelle** von  $f$  auf  $S$ , so sind die **Gradienten**  $\nabla f(a), \nabla g_1(a), \nabla g_2(a), \dots, \nabla g_M(a)$  über  $\mathbb{R}$  **linear abhängig**.*

Ein Beweis des Satzes (der allerdings einen Vorgriff beinhaltet) wird am Ende des aktuellen Abschnitts ausgeführt.

<sup>5</sup>Die hier betrachteten Mengen sind im Allgemeinen keine (Unter-)Vektorräume, so dass der Dimensionsbegriff der linearen Algebra nicht anwendbar ist. Vielmehr wird an dieser Stelle auf die naive Vorstellung von Dimension Bezug genommen, in der eine „normale“ Kurve 1-dimensional, eine „normale“ Fläche 2-dimensional, der „normale“ Raum 3-dimensional ist.

**Bemerkungen** (zur **Extremstellenbestimmung bei Nebenbedingungen und am Rand**).

- (1) Von Bedeutung ist der Satz insbesondere in dem **Fall**, dass für  $x \in S$  die  $M$  zu den Nebenbedingungen gehörigen Gradienten  $\nabla g_1(x), \nabla g_2(x), \dots, \nabla g_M(x)$  **linear unabhängig** sind. Man kann sich dann vorstellen, dass diese  $M$  Vektoren an der Stelle  $x$  senkrecht auf der Niveaumenge  $S$  von  $(g_1, g_2, \dots, g_M)$  stehen und einen  $M$ -dimensionalen Untervektorraum  $V_x$  von  $\mathbb{R}^N$  aufspannen, so  $V_x$  (oder eigentlich der affine Unterraum  $x+V_x$ ) an der Stelle  $x$  senkrecht auf  $S$  steht. Für lokale Extremstellen  $x$  von  $f$  auf  $S$  besagt das Kriterium des Satzes dann  $\nabla f(x) \in V_x$  oder, ausgeschrieben,

$$\nabla f(x) = \lambda_1 \nabla g_1(x) + \lambda_2 \nabla g_2(x) + \dots + \lambda_M \nabla g_M(x) \quad \text{für gewisse } \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M \in \mathbb{R}. \quad (*)$$

**Geometrisch** entspricht<sup>6</sup> dies der sehr plausiblen<sup>7</sup> Aussage, dass  $\nabla f(x)$  **an der Stelle  $x$  senkrecht auf  $S$  steht**.

Zur **praktischen Berechnung von Kandidaten**  $x$  für Extremstellen fasst man  $(*)$  zusammen mit den  $S$  definierenden Gleichungen

$$g_1(x) = 0, \quad g_2(x) = 0, \quad \dots, \quad g_M(x) = 0$$

als **System von  $N+M$  im Allgemeinen nicht-linearen Gleichungen für die  $N+M$  Variablen**  $x_1, x_2, \dots, x_N, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M \in \mathbb{R}$  auf. Man versucht dieses System durch sukzessive Elimination von Variablen zu **lösen**. Das Ziel besteht dabei in der Bestimmung von  $x_1, x_2, \dots, x_N$ , während die sogenannten **Lagrange-Multiplikatoren**  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M$  nur Hilfsvariablen sind und möglichst schnell eliminiert werden sollten. Prinzipiell kann man als Lösungen (und damit Kandidaten für Extremstellen) übrigens eine beliebige Anzahl von Punkten  $x \in S$  erhalten (keinen, genau einen, endlich oder unendlich viele), und anders als bei den linearen Gleichungssystemen der linearen Algebra bilden die Lösungen hier im Allgemeinen auch keinen (affinen) Unterraum.

**Zusätzlich** zu den derart bestimmten Lösungen des Gleichungssystems sind in die Liste der Kandidaten noch **Nicht- $C^1$ -Stellen** von  $f$  und den  $g_i$  sowie **Stellen linearen Abhängigkeit von  $\nabla g_1, \nabla g_2, \dots, \nabla g_M$**  aufzunehmen; in diese Kategorie fallen auch Ecken, Kanten und andere geometrisch ausgezeichnete Stellen von  $S$ .

- (2) Man kann das Kriterium für Extremstellen bei einer einzelnen Nebenbedingung ( $M = 1$ ) oft **zur Bestimmung von Randkandidaten für Extremstellen nutzen**. Diese **vielleicht wichtigste Anwendung** erfasst Ränder  $\partial A$ , die (teilweise) in  $A$  enthalten sind und eine implizite Darstellung

$$D \cap \partial A = \{x \in D : g(x) = 0\}$$

erlauben (wie sie sich oft zugleich mit  $D \cap A = \{x \in D : g(x) \geq 0\}$  ergibt). Es folgt dann, dass  $C^1$ -Stellen  $x \in D \cap \partial A$  nur als lokale Extremstellen von  $f$  auf  $A$  in Frage kommen, wenn  $\nabla f(x)$  und  $\nabla g(x)$  linear abhängig sind. Mit anderen Worten gilt es in die Kandidatenliste als

<sup>6</sup>Genau genommen wird hier unterstellt, dass  $V_x$  alle zu  $S$  an der Stelle  $a$  orthogonalen Vektoren beinhaltet. Unter der gemachten Annahme, dass  $\nabla g_1(x), \nabla g_2(x), \dots, \nabla g_M(x)$  linear unabhängig sind, ist dies auch richtig, es ist aber nicht trivial und wird sich erst mit dem Beweis des Satzes herausstellen.

<sup>7</sup>Direkt einzusehen ist jedenfalls, dass die Ableitung  $\partial_v f(x) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_x} f(c(t)) = 0$  an der Stelle  $x = c(t_x)$  in Richtung jedes Tangentialvektors  $v := c'(t_x)$  an eine in  $S$  durch  $x$  verlaufende Kurve  $c$  verschwindet und daher  $\nabla f(x)$  senkrecht auf solchen Tangentialvektoren steht.



**Randkandidaten** im Randteil  $D \cap \partial A$  neben eventuellen Nicht- $C^1$ -Stellen alle **Nullstellen von  $\nabla g$**  in  $D \cap \partial A$  und alle **Lösungen  $x \in D$  des Gleichungssystems**

$$\nabla f(x) = \lambda \nabla g(x), \quad g(x) = 0$$

(aus  $N+1$  Gleichungen für  $N+1$  Variablen inklusive eines einzelnen Lagrange-Multiplikators  $\lambda \in \mathbb{R}$ ) aufzunehmen.

**Beispiel** (zur Extremstellenbestimmung am Rand). Als (vielleicht zu) einfaches Beispiel zur Bestimmung von Randkandidaten für Extremstellen wird die Funktion  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  zu

$$f(x, y) := x^3 - y^2 \quad \text{auf dem Dreieck } A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x+y \geq 0, \max\{x, y\} \leq 1\}$$

betrachtet und anhand der bisher entwickelten Verfahrensweisen untersucht:

- (I) Da  $A$  kompakt ist, wird die Existenz einer absoluten Minimal- und einer absoluten Maximalstelle durch den Extremalsatz sichergestellt
- (II) Der Gradient  $\nabla f(x, y) = (3x^2, -2y)$  verschwindet nur für  $(x, y) = (0, 0)$ . Da  $(0, 0)$  nicht im Innern, sondern auf dem Rand von  $A$  liegt, gibt es keine inneren Kandidaten für Extremstellen.

Als Nächstes wird das Randstück  $\partial_{(1)}A := \{(x, y) \in ]-1, 1[^2 : x+y = 0\}$  ins Auge gefasst. Eine Vorgehensweise besteht darin,  $\partial_{(1)}A$  durch  $u(t) := (t, -t)$  über  $\Sigma = ]-1, 1[$  zu parametrisieren; dann zeigt einfache Differentialrechnung einer Variablen, dass die kritischen Punkte von  $f(u(t)) = t^3 - t^2$  genau bei  $t = 0$  und  $t = \frac{2}{3}$  liegen, und man erhält für Randextremstellen von  $f$  in  $\partial_{(1)}A$  die Kandidaten  $u(0) = (0, 0)$  und  $u(\frac{2}{3}) = (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$ . Alternativ kann man  $\partial_{(1)}A$  implizit über die Nebenbedingung  $g(x, y) := x+y = 0$  darstellen. Dann ist  $\nabla g \equiv (1, 1)$ , und  $\nabla f(x, y) = (3x^2, -2y)$  ist genau dann linear abhängig von  $(1, 1)$ , wenn die beiden Einträge von  $\nabla f(x, y)$  übereinstimmen. Aus dem resultierenden Gleichungssystem  $3x^2 = -2y, x+y = 0$  erhält man die gleichen Kandidaten  $(x, y) = (0, 0)$  und  $(x, y) = (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$ .

Die Kandidaten auf den Randstücken  $\partial_{(2)}A := ]-1, 1[ \times \{1\}$  und  $\partial_{(3)}A := \{1\} \times ]-1, 1[$  kann man analog berechnen. Da es sich um achsenparallele Strecken handelt, laufen alle Vorgehensweise einfach darauf hinaus, die Nullstellen von  $\partial_1 f$  auf  $\partial_{(2)}A$  und von  $\partial_2 f$  auf  $\partial_{(3)}A$  zu bestimmen. Man erhält die Kandidaten  $(0, 1) \in \partial_{(2)}A$  und  $(1, 0) \in \partial_{(3)}A$ .

Um den Rand  $\partial A = \partial_{(1)}A \dot{\cup} \partial_{(2)}A \dot{\cup} \partial_{(3)}A \dot{\cup} \{(-1, 1), (1, -1), (1, 1)\}$  zu komplettieren, sind als letztes noch die drei Ecken  $(-1, 1)$ ,  $(1, -1)$  und  $(1, 1)$  des Dreiecks  $A$  in die Kandidatenliste aufzunehmen.

- (III) Schließlich sind die Funktionswerte in den sieben ermittelten Kandidaten zu vergleichen:

$$\begin{aligned} f(0, 0) &= 0, & f\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) &= -\frac{4}{27}, & f(0, 1) &= -1, & f(1, 0) &= 1, \\ f(-1, 1) &= -2, & f(1, -1) &= 0, & f(1, 1) &= 0. \end{aligned}$$

Man liest ab, dass  $(-1, 1)$  die einzige absolute Minimalstelle und  $(1, 0)$  die einzige absolute Maximalstelle von  $f$  auf dem Dreieck  $A$  ist.

Vor dem Beweis der Kriterien für Extremstellen unter Nebenbedingungen wird jetzt noch ein damit zusammenhängendes Kriterium für Extremstellen auf allgemeinen „geometrischen“ Mengen (Fall (III) des formalen Rahmens) behandelt:

**Satz (notwendiges geometrisches Kriterium für Extremstellen).** *Seien  $D$  offen in  $\mathbb{R}^N$  und  $a \in G \subset D$ . Ist  $a$  eine lokale  $\begin{matrix} \text{Minimal} \\ \text{Maximal} \end{matrix}$ stelle von  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  auf  $G$  und ist  $f$  in  $a$  differenzierbar, so gilt*

$$\partial_v f(a) \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 0 \quad \text{für alle } v \in \text{Tan}(G, a) := \left\{ \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_k - a}{r_k} \in \mathbb{R}^N : \begin{matrix} (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ Folge in } G, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a, \\ (r_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ Folge in } \mathbb{R}_{>0} \end{matrix} \right\}.$$

Dass man in diesem Satz nur eine Ungleichung und keine Gleichung als notwendiges Kriterium erhält, ist — bei richtiger Betrachtungsweise — ein vertrautes Phänomen. Tatsächlich traten bereits in der Differentialrechnung einer Variablen Ungleichungen als Kriterien auf, wenn entweder nur einseitige Differenzierbarkeit in einer Extremstelle angenommen wurde oder diese am Rand des betrachteten Intervalls lag. Beide diese Situationen gibt es natürlich auch in der Differentialrechnung mehrerer Variablen. Zu der einen, in der man mit einseitiger Richtungs-Differenzierbarkeit als Annahme auskommt, wurde bereits am Anfang dieses Abschnitts eine Bemerkung gemacht. Die andere, in der die Extremstelle  $a$  am Rand des betrachteten Bereichs  $G$  liegen darf, behandelt der gerade angegebene Satz; er identifiziert dann die Richtungen, die von  $a$  aus „einigermaßen“ in/bei  $G$  bleiben und in denen man obige Bedingung daher überhaupt erwarten darf, als die Richtungen  $v$  in  $\text{Tan}(G, a)$ .

**Bemerkungen und Beispiele** (zum geometrischen Kriterium für Extremstellen).

- (1) Man bezeichnet die im Satz definierte Menge  $\text{Tan}(G, a)$  als **Tangentialkegel** an  $G$  in  $a \in G$  und  $a + \text{Tan}(G, a)$  als **affinen Tangentialkegel** an  $G$  in  $a \in G$ . Geometrisch ist  $a + \text{Tan}(G, a)$  der abgeschlossene Kegel<sup>8</sup> mit Spitze  $a$ , der das Verhalten von  $G$  nahe  $a$  am besten widerspiegelt, und kann genauer als der kleinste abgeschlossene Kegel mit Spitze  $a$  charakterisiert werden, der  $G$  bei  $a$  von erster Ordnung enthält<sup>9</sup>.

Falls es sich bei  $\text{Tan}(G, a)$  um einen Untervektorraum von  $\mathbb{R}^N$  handelt, schreibt man für  $\text{Tan}(G, a)$  auch  $T_a G$  und nennt  $T_a G$  den **Tangentialraum** an  $G$  in  $a \in G$  sowie  $a + T_a G$  den **affinen Tangentialraum** an  $G$  in  $a \in G$ .

- (2) Bei der **praktischen Berechnung** von Extremstellen nützt dieses Kriterium vor allem **auf einfachen Mengen  $G$  mit bekannten** (oder leicht zu erahnenden) **Tangentialkegeln**. Dies ist zum Beispiel bei  $(N-1)$ -dimensionalen Sphären  $S_r^{N-1}(a) \subset \mathbb{R}^N$  sowie  $N$ -dimensionalen, abgeschlossenen Kugeln  $\bar{B}_r^N(a) \subset \mathbb{R}^N$  und Würfeln  $a + [-r, r]^N \subset \mathbb{R}^N$  mit Mittelpunkt  $a \in \mathbb{R}^N$  und Radius/halber Seitenlänge  $r \in \mathbb{R}_{>0}$  der Fall:

- In Punkten  $x \in S_r^{N-1}(a)$  der Sphäre ist der Tangentialkegel an diese ein  $(N-1)$ -dimensionaler Tangentialraum, und zwar ist  $T_x(S_r^{N-1}(a)) = \{x-a\}^\perp$  der zu  $x-a$  orthogonale Unterraum.

<sup>8</sup>Eine Menge  $K$  in  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^N$  oder einem normierten Raum  $\mathcal{X}$  bezeichnet man als Kegel mit Spitze  $a \in \mathcal{X}$ , wenn für  $x \in K$ ,  $r \in \mathbb{R}_{>0}$  stets  $a + r(x-a) \in K$  gilt. Im Allgemeinen wird nicht festgelegt, ob die Spitze im Kegel enthalten sein muss oder nicht, in einem nicht-leeren abgeschlossenen Kegel ist sie aber automatisch enthalten. Wird die Spitze nicht explizit benannt, so ist normalerweise von einem Kegel mit Spitze 0 auszugehen.

<sup>9</sup>Die Terminologie, dass eine Menge  $K$  eine Menge  $G$  bei  $a$  von erster Ordnung enthält, soll hier bedeuten, dass  $a \in K$  ist und  $\sup_{x \in G \cap B_r(a)} \text{dist}(x, K) \in o(r)$  bei  $r \searrow 0$  gilt.

- In inneren Punkten  $x \in B_r^N(a)$  hat die Kugel  $\overline{B}_r^N(a)$  natürlich den Tangentialraum  $T_x(\overline{B}_r^N(a)) = \mathbb{R}^N$ . In Randpunkten  $x \in S_r^{N-1}(a)$  der Kugel  $\overline{B}_r^N(a)$  ist ihr Tangentialkegel  $\text{Tan}(\overline{B}_r^N(a), x) = \{v \in \mathbb{R}^N : v \cdot (x-a) \leq 0\}$  ein Halbraum.
- In inneren Punkten  $x \in a+[-r, r]^N$  hat der Würfel  $a+[-r, r]^N$  natürlich den Tangentialraum  $\mathbb{R}^N$ . In Randpunkten  $x$ , die zu einer  $k$ -dimensionalen Facette  $F_k$  des Würfels  $a+[-r, r]^N$  gehören, ist sein Tangentialkegel allgemein ein  $2^{N-k}$ -tant, z.B. für  $x \in F_{N-1}$  ein Halbraum, für  $x \in F_{N-2}$  ein Quadrant, für  $x \in F_{N-3}$  ein Oktant, ..., für  $x \in F_2$  (Seitenfläche) ein  $2^{N-2}$ -tant, für  $x \in F_1$  (Kante) ein  $2^{N-1}$ -tant, für  $x \in F_0$  (Ecke) ein  $2^N$ -tant. Genauer gilt  $\text{Tan}(a+[-r, r]^N, x) = I_1(x_1) \times I_2(x_2) \times \dots \times I_N(x_N)$  wobei  $I_j(x_j) := \mathbb{R}_{\geq 0}$  für  $x_j = a_j - r$ ,  $I_j(x_j) := \mathbb{R}$  für  $a_j - r < x_j < a_j + r$  und  $I_j(x_j) := \mathbb{R}_{\leq 0}$  für  $x_j = a_j + r$  vereinbart werden.

Schließlich folgen die Beweise der beiden letzten Sätze, wozu erst einmal folgendes Hilfsresultat gezeigt wird:

**Lemma.** Seien  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathbb{R}^N$  und  $(r_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathbb{R}_{>0}$ , so dass  $b := \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$  und  $v := \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_k - b}{r_k}$  in  $\mathbb{R}^N$  existieren. Für jede in  $b$  differenzierbare Funktion  $h$  (von einer Umgebung von  $b$  in  $\mathbb{R}^N$  in einen normierten Raum  $\mathcal{Y}$ ) existiert dann  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{h(x_k) - h(b)}{r_k} = \partial_v h(b)$ .

*Beweis des Lemmas.* Aus der Abschätzung mit der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} \left\| \frac{h(x_k) - h(b)}{r_k} - \partial_v h(b) \right\|_{\mathcal{Y}} &= \left\| \frac{h(x_k) - h(b)}{r_k} - h'(b)v \right\|_{\mathcal{Y}} \\ &\leq \underbrace{\frac{|x_k - b|}{r_k}}_{\xrightarrow{k \rightarrow \infty} |v|} \cdot \underbrace{\frac{\|h(x_k) - h(b) - h'(b)(x_k - b)\|_{\mathcal{Y}}}{|x_k - b|}}_{\xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0} + \|h'(b)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathcal{Y})} \underbrace{\left| \frac{x_k - b}{r_k} - v \right|}_{\xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0} \end{aligned}$$

entnimmt man  $\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \frac{h(x_k) - h(b)}{r_k} - \partial_v h(b) \right\|_{\mathcal{Y}} = 0$ . □

*Beweis des letzten Satzes (geometrisches Kriterium für Extremstellen).* Sei  $v \in \text{Tan}(G, a)$ . Nach Definition des Tangentialkegels  $\text{Tan}(G, a)$  gibt es dann eine Folge  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $G$  und eine Folge  $(r_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{R}_{>0}$  mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$  und  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_k - a}{r_k} = v$ . Gemäß dem Lemma (mit  $h = f$  und  $b = a$ ) folgt

$$\partial_v f(a) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(x_k) - f(a)}{r_k} \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 0,$$

wobei im letzten Schritt benutzt wurde, dass  $a$  lokale  $\begin{matrix} \text{Minimal} \\ \text{Maximal} \end{matrix}$ stelle von  $f$  auf  $G$  ist und  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $G$  gegen  $a$  konvergiert. □

*Beweis des vorletzten Satzes (Kriterium für Extremstellen bei Nebenbedingungen).* Zuerst werden die  $S$  definierenden Funktionen  $g_1, g_2, \dots, g_M: D \rightarrow \mathbb{R}$  zu einer  $\mathbb{R}^M$ -wertigen Funktion  $g := (g_1, g_2, \dots, g_M): D \rightarrow \mathbb{R}^M$  mit Nullstellenmenge  $S = \{x \in D : g(x) = 0\}$  und insbesondere mit  $g(a) = 0$  für den Punkt  $a \in S$  zusammengefasst. Außerdem sei an die Vereinbarung  $N = L + M$  erinnert. Ohne Einschränkung wird angenommen (andernfalls ist nichts zu zeigen), dass die  $M$  Vektoren  $\nabla g_1(a), \nabla g_2(a), \dots, \nabla g_M(a)$  über  $\mathbb{R}$  linear unabhängig sind, also mit anderen Worten  $Dg(a)$  den maximalen Rang  $M$  hat. Unter **Vorgriff auf den Satz über implizite Funktionen** — der erst im Folge-Abschnitt 8.3 behandelt wird — gibt es dann lokal bei  $a$  eine Parametrisierung  $u$  von  $S$  mit vollem Rang  $L$ . Hier reicht es zu wissen, dass dazu ein  $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$  und eine  $C^1$ -Funktion  $u: B_\delta^L(0) \rightarrow D$  in  $L$  Variablen gehören, so dass  $u(0) = a$  ist,  $Du(0)$  maximalen Rang  $L$  hat und

$$u(x) \in S \text{ bzw. äquivalent } g(u(x)) = 0 \quad \text{für alle } x \in B_\delta^L(0)$$

gilt. Gemäß der Kettenregel folgt  $Dg(a)Du(0) = 0$ , also  $\text{Bild } Du(0) \subset \text{Kern } Dg(a)$ . Wegen der Rangbedingungen haben  $\text{Bild } Du(0)$  und  $\text{Kern } Dg(a)$  die gleiche Dimension  $L$  (wobei die Dimensionsformel  $\dim \text{Kern}(Dg(a)) = N - \dim \text{Bild}(Dg(a)) = N - M = L$  der linearen Algebra und implizit auch die Übereinstimmung von Zeilenrang und Spaltenrang benutzt wurden), und dann folgt für den Unterraum  $\text{Bild } Du(0)$  voller Dimension auch gleich die Übereinstimmung

$$\text{Bild } Du(0) = \text{Kern } Dg(a).$$

Für  $w \in \text{Kern } Dg(a)$  gibt es damit stets ein  $v \in \mathbb{R}^L$  mit  $w = Du(0)v$ . Gemäß dem vorausgehenden Lemma (mit  $h = u$  und  $b = 0$ ) folgt aus  $\lim_{k \rightarrow \infty} v/k = 0$  und  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{v/k - 0}{1/k} = v$  dann  $\partial_v u(0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{u(v/k) - u(0)}{1/k} \in \text{Tan}(S, a)$ , wobei auch  $u(0) = a \in S$  und  $u(v/k) \in S$  für  $k \gg 1$  benutzt wurden. Insgesamt ergibt sich  $w = Du(0)v = \partial_v u(0) \in \text{Tan}(S, a)$ , und mit dieser Argumentation ist

$$\text{Kern } Dg(a) \subset \text{Tan}(S, a)$$

gezeigt. (Tatsächlich lässt sich jetzt auch  $T_a S = \text{Kern } Dg(a)$  leicht zeigen; für die weitere Argumentation ist dies aber irrelevant). Gemäß dem zuvor bewiesenen Satz gilt bei einer lokalen Minimalstelle  $a$  von  $f$  auf  $S$  nun  $Df(a)w = \partial_w f(a) \geq 0$  für alle  $w \in \text{Tan}(S, a)$  und damit insbesondere für alle  $w \in \text{Kern } Dg(a)$ . Da mit  $w$  aber stets auch  $-w$  im Unterraum  $\text{Kern } Dg(a)$  enthalten ist, folgt auch  $-Df(a)w = \partial_{-w} f(a) \geq 0$ , also insgesamt

$$Df(a)w = 0 \quad \text{für alle } w \in \text{Kern } Dg(a).$$

Im Fall einer lokalen Maximalstelle  $a$  von  $f$  auf  $S$  ergibt sich die letzte Gleichheit ganz analog, sie gilt also allgemein für die im Satz betrachteten Extremstellen. In jedem Fall ist damit  $Df(a)$  Element von  $V_g := \{A \in \mathbb{R}^{1 \times N} : Aw = 0 \text{ für alle } w \in \text{Kern } Dg(a)\}$ . Weil  $\text{Kern } Dg(a)$  Dimension  $L$  hat, ist  $V_g$  ein Vektorraum der Dimension  $N - L = M$ , der außerdem (klar per Definition) die  $M$  Matrizen  $Dg_1(a), Dg_2(a), \dots, Dg_M(a)$  enthält. Aus Dimensionsgründen folgt, dass die  $M+1$  Funktionalmatrizen  $Df(a), Dg_1(a), Dg_2(a), \dots, Dg_M(a)$  aus  $V_g$  linear abhängig sind. Damit sind auch die Gradienten  $\nabla f(a), \nabla g_1(a), \nabla g_2(a), \dots, \nabla g_M(a)$  als Transponierte der Funktionalmatrizen linear abhängig.  $\square$

### 8.3 Der Umkehrsatz und der Satz über implizite Funktionen

In diesem Abschnitt geht es zuerst um die Regel für die Ableitung der Umkehrfunktion und damit die letzte Ableitungsregel, die hier auf Funktionen mehrerer Variablen ausgedehnt wird. Natürlich wird die allgemeinere Regel immer noch der in Abschnitt 4.1 für den Fall einer Variablen formulierten ähneln. Ein prinzipieller Unterschied besteht aber darin, dass schon die Existenz einer *stetigen* Umkehrabbildung bei mehreren Variablen nicht mehr nur auf Monotonie-Betrachtungen zurückgeführt werden kann und soll. Jedenfalls gilt:

**Hauptsatz (Umkehrsatz).** *Seien  $D$  eine Teilmenge von  $\mathbb{R}^N$ ,  $a \in \overset{\circ}{D}$ , und  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^N$  sei (zumindest auf einer Umgebung von  $a$ ) eine  $C^1$ -Funktion. Ist die lineare Abbildung  $f'(a)$  in  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$  **invertierbar**, so gibt es offene Umgebungen  $U$  von  $a$  und  $V$  von  $f(a)$ , so dass  $U$  durch  $f$  bijektiv auf  $V$  abgebildet wird und die zugehörige **Umkehrfunktion**  $f^{-1}: V \rightarrow U$  von der Klasse  $C^1$  ist. Außerdem gilt dann die **Regel für die Ableitung der Umkehrfunktion***

$$(f^{-1})'(y) = [f'(f^{-1}(y))]^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \quad \text{für alle } y \in V.$$

**Bemerkungen** (zum Umkehrsatz).

- (1) Natürlich kann die **Regel für die Ableitung der Umkehrfunktion** auch mit **Funktionalmatrizen** geschrieben werden und lautet dann analog

$$D(f^{-1})(y) = [Df(f^{-1}(y))]^{-1} \in \mathbb{R}^{N \times N} \quad \text{für } y \in V.$$

Der Exponent **−1 an der eckigen Klammer steht dabei für die Bildung der inversen Matrix** (die eine „punktweise“ Operation nach Einsetzen eines festen  $y$  ist) und spielt somit eine fundamental andere Rolle als der Exponent  $-1$  bei  $f$  (der ja für die Bildung der Umkehrfunktion steht). Für den Fall einer Variablen, in dem das Invertieren der Matrix sich zu einer Reziproken-Bildung reduziert, war dies schon bekannt, und auch bei der im Satz formulierten Version der Regel verhält es sich ähnlich: Dort steht die  $-1$  an der eckigen Klammer für das Invertieren der linearen Abbildung  $f'(f^{-1}(y))$  in  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ , also schon für die Bildung von deren Umkehrfunktion, aber es empfiehlt sich in der Analysis meist, Operationen mit linearen Abbildungen als prinzipiell andere und viel einfachere Operationen anzusehen als solche mit eventuell nicht-linearen Abbildungen.

Vor diesem Hintergrund sollte man auch möglichst vermeiden, die Regel für die Ableitung der Umkehrfunktion als Gleichheit von Funktionen  $(f^{-1})' = [f' \circ f^{-1}]^{-1}$ ,  $(f^{-1})' = f'^{-1} \circ f^{-1}$ ,  $D(f^{-1}) = [(Df) \circ f^{-1}]^{-1}$  oder  $D(f^{-1}) = (Df)^{-1} \circ f^{-1}$  auf  $V$  zu schreiben. Zwar haben all diese Gleichheiten eine korrekte Interpretation, aber sie bergen auch große Gefahr, die rechten Seiten im Sinn einer Umkehr von  $f' \circ f^{-1}$ ,  $f'$ ,  $(Df) \circ f^{-1}$  oder  $Df$  misszuverstehen, obwohl *deren* Umkehrfunktionen eben *nicht* gemeint sind und gar *nicht* sinnvoll gebildet werden können.

- (2) Die **im Satz vorausgesetzte Invertierbarkeit** der linearen Abbildung  $f'(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$  von  $\mathbb{R}^N$  in sich oder, äquivalent, der zugehörigen quadratischen Matrix  $Df(a) \in \mathbb{R}^{N \times N}$  **ist wesentlich**. Gemäß linearer Algebra ist **für diese Invertierbarkeit notwendig und hinreichend**, dass für die Funktionaldeterminante

$$\boxed{\det(Df(a)) \neq 0}$$

gilt.

- (3) Der Satz gilt analog für Banach-Räume  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{Y}$  und Funktionen  $f: D \rightarrow \mathcal{Y}$  auf  $D \subset \mathcal{X}$ . In diesem Fall muss man wissen, dass  $f'(a) \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  eine stetig-lineare<sup>10</sup> Umkehrabbildung  $[f'(a)]^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$  besitzt. Ein einfaches Kriterium hierfür (wie im endlich-dimensionalen Fall das mit der Funktionaldeterminante) gibt es bei unendlicher Dimension allerdings nicht.
- (4) Seien  $D$ ,  $B$  offene Mengen in normierten Räumen. Man nennt eine bijektive  $C^1$ -Abbildung  $f$  von  $D$  auf  $B$  mit (natürlich auch bijektiver)  $C^1$ -Umkehrabbildung  $f^{-1}$  von  $B$  auf  $D$  einen **( $C^1$ -)Diffeomorphismus** von  $D$  auf  $B$ . Gilt Entsprechendes nur für jedes  $a \in D$  zwischen offenen Umgebungen  $U$  von  $a$ ,  $V$  von  $f(a)$  (wie im Umkehrsatz), so nennt  $f$  einen **lokalen ( $C^1$ -)Diffeomorphismus** von  $D$  auf (die dann auch offene Menge)  $f(D)$ . Der Umkehrsatz

<sup>10</sup>Tatsächlich ist, wenn es überhaupt eine Umkehrabbildung einer stetigen linearen Abbildung  $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  zwischen Banach-Räumen  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{Y}$  gibt, diese Umkehrabbildung automatisch linear (einfaches Resultat der linearen Algebra) und stetig (nicht-triviales Resultat der Funktionalanalysis, das auf der Vollständigkeit von  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{Y}$  beruht und auch als Banachscher Isomorphiesatz bekannt ist).

identifiziert also **Invertierbarkeit von  $f'(a)$  bzw.  $Df(a)$  an jeder Stelle  $a$**  eines offenen  $D \subset \mathbb{R}^N$  als hinreichendes (und übrigens auch notwendiges) **Kriterium** dafür, dass eine  $C^1$ -Funktion  $D \rightarrow \mathbb{R}^N$  ein **lokaler Diffeomorphismus** von  $D$  auf  $f(D)$  ist.

- (5) Ein **lokaler Diffeomorphismus muss nicht auf dem ganzen Definitionsbereich injektiv und deshalb kein (globaler) Diffeomorphismus sein**. Dies zeigt das Beispiel der komplexen Exponentialfunktion (in reellen Koordinaten)

$$\exp: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (e^x \cos y, e^x \sin y),$$

die lokaler Diffeomorphismus von  $\mathbb{R}^2$  auf  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , aber nicht global injektiv ist (denn  $\det(D \exp(x, y)) = e^x \neq 0$  für alle  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , aber z.B.  $\exp(0, 0) = 1 = \exp(0, 2\pi)$ ).

Kriterien, die ein solches Verhalten ausschließen und sicherstellen, dass ein globaler Diffeomorphismus vorliegt, sollen hier nur am Rande erwähnt werden:

**Satz (Kriterien für globale Umkehrbarkeit).** Sei  $D$  offen in  $\mathbb{R}^N$ , und  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^N$  sei eine  $C^1$ -Funktion auf  $D$ , die eine der folgenden Eigenschaften aufweist:

- (a) **Kleine Störung der Identität:** Für alle  $x \in D$  gilt  $\|f'(x) - \text{id}_{\mathbb{R}^N}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)} < 1$ .  
 (b) **Dreiecksgestalt:**  $D$  ist konvex, und für jedes  $i \in \{1, 2, \dots, N\}$  kann die  $i$ -te Komponentenfunktion  $f_i$  durch  $f_i(x) = \varphi_i(x_i, x_{i+1}, \dots, x_N)$  mit  $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}(x) \neq 0$  für alle  $x \in D$  dargestellt werden.  
 (c) **Positive Ableitung:**  $D$  ist konvex, und  $Df(x)$  ist für alle  $x \in D$  positiv definit.  
 (d) **Globaler Umkehrsatz von Hadamard:** Für  $D = \mathbb{R}^N$  ist  $f$  lokaler  $C^1$ -Diffeomorphismus von  $D$  auf  $f(D)$  mit  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} |f(x)| = \infty$ .

Dann ist  $f$  globaler  $C^1$ -Diffeomorphismus von  $D$  auf  $f(D)$ .

Falls bei (a) sogar  $D = \mathbb{R}^N$ ,  $\sup_{x \in \mathbb{R}^N} \|f'(x) - \text{id}_{\mathbb{R}^N}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)} < 1$  gelten, und generell im Fall (d) folgt  $f(D) = \mathbb{R}^N$ .

Zum Beweis ist in allen Fällen Injektivität von  $f$  nachzuweisen. Bei (a), (b), (c) ergibt sich globale  $C^1$ -Umkehrbarkeit von  $f$  dann aus dem Umkehrsatz; im Fall (d) folgt sie dann aus der Voraussetzung, dass  $f$  lokaler Diffeomorphismus ist. Abgesehen davon verläuft die Argumentation in den verschiedenen Fällen aber recht unterschiedlich: Im Fall (a) erhält man Injektivität von  $f$  aus dem Schrankensatz, und die Behauptung  $f(D) = \mathbb{R}^N$  ergibt sich man (unter der stärkeren Voraussetzung), indem man den unten folgenden Beweis des Umkehrsatzes als globales statt lokales Argument ausführt.

Im Fall (b) ist  $\varphi_i$  streng monoton in  $x_i$ , aufgrund der speziellen Struktur kann man bei  $f(x) = y$  dann sukzessive nach  $x_N, x_{N-1}, \dots, x_2, x_1$  lösen und Injektivität sicherstellen. Im Fall (c) ist  $\partial_v(v \cdot f(x)) = v \cdot Df(x)v > 0$  für  $x \in D$  und  $0 \neq v \in \mathbb{R}^N$ , folglich ist  $t \mapsto v \cdot f(a+tv)$  für  $a \neq b$  in  $D$  und  $v := b-a \neq 0$  streng monoton wachsend in  $t \in [0, 1]$ , und es gilt  $v \cdot (f(b) - f(a)) > 0$ , also sicher  $f(a) \neq f(b)$ ; damit ist in diesem Fall Injektivität nachgewiesen. Im Fall (d) schließlich kann man elementar einsehen, dass  $f(D)$  zugleich offen und abgeschlossen, also  $f(D) = \mathbb{R}^N$  gilt. Der Nachweis der Injektivität ist dagegen aufwendiger und geht über den Rahmen der Grundvorlesung hinaus; für den Fall von  $C^2$ -Funktionen  $f$ , ergänzende Kommentare und weitere Literaturhinweise wird auf das spezialisierte Buch [5] und genauer auf das Umfeld von [5, Theorem 6.2.3] verwiesen.

Es folgt ein Beweis des Umkehrsatzes, der wesentlich auf dem aus Abschnitt 6.1 bekannten Banachschen Fixpunktsatz aufbaut.

*Beweis des Umkehrsatzes.* Zum Nachweis der Bijektivität und der Existenz einer differenzierbaren Umkehrfunktion lässt sich ohne Einschränkung

$$a = 0, \quad f(0) = 0, \quad f'(0) = \text{id}_{\mathbb{R}^N}$$

annehmen, denn andernfalls kann man zur Betrachtung von  $\tilde{f}(x) := f'(a)^{-1}[f(a+x) - f(a)]$  übergehen (Invertierbarkeit von  $f'(a)$  benutzt!). Unter diesen Annahmen gibt es wegen der Stetigkeit von  $f'$  nahe 0 ein  $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$  mit  $\|f'(x) - \text{id}_{\mathbb{R}^N}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)} \leq \frac{1}{2}$  für alle  $x \in \overline{B}_\delta^N(0)$ . Für fixiertes  $y \in B_{\delta/2}^N(0)$  wird nun  $f_y: D \rightarrow \mathbb{R}^N$  durch

$$f_y(x) := y - f(x) + x \quad \text{für } x \in D$$

eingeführt. Wegen

$$\|f'_y(x)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)} = \|f'(x) - \text{id}_{\mathbb{R}^N}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)} \leq \frac{1}{2} \quad \text{für alle } x \in \overline{B}_\delta^N(0)$$

ist dann  $f$  Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante  $\frac{1}{2}$  auf  $\overline{B}_\delta^N(0)$ , und es gilt

$$|f_y(x)| \leq |f_y(0)| + \frac{1}{2}|x| = |y| + \frac{1}{2}|x| < \delta \quad \text{für alle } x \in \overline{B}_\delta^N(0).$$

Damit ist  $f_y$  strikte Kontraktion von  $\overline{B}_\delta^N(0)$  in sich, sogar mit Werten  $f_y(x) \in B_\delta^N(0)$  im Innern für alle  $x \in \overline{B}_\delta^N(0)$ . Nach dem Banachschen Fixpunktsatz gibt es genau einen Fixpunkt  $x$  von  $f_y$  in  $\overline{B}_\delta^N(0)$ , der — wegen der Beobachtung über die Werte — sogar in  $B_\delta^N(0)$  liegt. Da das Argument alle  $y \in B_{\delta/2}(0)$  erfasst und die Fixpunktgleichung  $f_y(x) = x$  nichts anders bedeutet als  $f(x) = y$ , ist damit gezeigt, dass  $U := B_\delta^N(0) \cap f^{-1}(B_{\delta/2}^N(0))$  durch  $f$  bijektiv auf  $V := B_{\delta/2}^N(0)$  abgebildet wird, und nach Konstruktion sind  $U$  und  $V$  offene Nullumgebungen.

Da die vorausgehende Argumentation für alle ausreichend kleinen positiven  $\delta$  funktioniert, und das eindeutige Urbild  $x = f^{-1}(y)$  von  $y \in B_{\delta/2}(0)$  in  $B_\delta(0)$  gefunden wurde, ist die Umkehrfunktion  $f^{-1}: V \rightarrow U$  stetig in 0 (und erfüllt tatsächlich sogar die Lipschitz-artige Bedingung  $|f^{-1}(y)| \leq 2|y|$  für  $y \in V$ ). Jetzt lässt sich die Existenz von  $(f^{-1})'(0) = \text{id}_{\mathbb{R}^N}$  nachrechnen: Über die Definition der totalen Ableitung, mit der Substitution  $x = f^{-1}(y)$  und unter Verwendung der gerade nachgewiesenen Stetigkeit sowie von  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = \text{id}_{\mathbb{R}^N}$  erhält man

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{|f^{-1}(y) - y|}{|y|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x - f(x)|}{|f(x)|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x) - x|}{|x|} \left[ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)|}{|x|} \right]^{-1} = 0 \cdot 1^{-1} = 0.$$

Weil die Voraussetzungen des Umkehrsatzes auch nahe jedem anderen Punkt der offenen Menge  $U$  erfüllt sind, folgt Differenzierbarkeit (und insbesondere Stetigkeit) von  $f^{-1}$  nun auf ganz  $V$ .

Damit bleiben nur noch Stetigkeit von  $(f^{-1})'$  und die Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion nachzuweisen, was nun allgemein, ohne die am Anfang des Beweises gemachten Zusatzannahmen, geschehen soll: Aus  $f(f^{-1}(y)) = y$  für  $y \in V$  (definierende Eigenschaft der Umkehrfunktion) erhält man mit der Kettenregel und der Differenzierbarkeit von  $f$  auf  $U$  und  $f'$  auf  $V$

$$Df(f^{-1}(y))D(f^{-1})(y) = \mathbb{I}_N \quad \text{für } y \in V$$

mit der Einheitsmatrix  $\mathbb{I}_N \in \mathbb{R}^{N \times N}$ . Mit anderen Worten ist  $Df(f^{-1}(y))$  invertierbar, und für die Funktionalmatrizen gilt

$$D(f^{-1})(y) = [Df(f^{-1}(y))]^{-1} \quad \text{für } y \in V,$$

was der behaupteten Regel für die totalen Ableitungen entspricht. Wegen der Stetigkeit von  $f^{-1}$  auf  $V$  und  $Df$  auf  $U = f^{-1}(V)$  hängt auch  $Df(f^{-1}(y))$  stetig von  $y \in V$  ab. Der Übergang zur inversen Matrix erhält diese Stetigkeit; dies sieht man z.B. an der Formel  $A^{-1} = (\det A)^{-1} \text{Ad}(A)$  für invertierbare (!)  $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$  mit der Adjunkten  $\text{Ad}(A) \in \mathbb{R}^{N \times N}$  zu  $A$ , die sich aus den Minoren der Ordnung  $(N-1)$  von  $A$  zusammensetzt. Deshalb ist auch  $D(f^{-1})$  stetig auf  $V$ , und gemäß Abschnitt 8.1 folgt die  $C^1$ -Eigenschaft von  $f^{-1}$  auf  $V$ .  $\square$

Als Nächstes folgt eine wichtige Erweiterung des Umkehrsatzes, auf die bereits im vorigen Abschnitt zurückgegriffen wurde:

**Hauptsatz (Satz über implizite Funktionen).** *Sei  $D$  eine Teilmenge von  $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^L \times \mathbb{R}^M$ , wobei  $L, M \in \{1, 2, \dots, N-2, N-1\}$  mit  $L+M = N$  fixiert sind, sei  $a = (a', a'') \in \overset{\circ}{D} \subset \mathbb{R}^L \times \mathbb{R}^M$ , und sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^M$  (zumindest auf einer Umgebung von  $a$ ) eine  $C^1$ -Funktion mit Nullstelle in  $a$ , d.h. mit  $f(a) = 0$ . Ist die „partielle totale Ableitung“  $\frac{\partial f}{\partial x''}(a)$  nach den letzten  $M$  Variablen  $x'' \in \mathbb{R}^M$  (gemeint ist damit die totale Ableitung von  $\mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^M$ ,  $x'' \mapsto f(a', x'')$*

an der Stelle  $a''$ ) in  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^M, \mathbb{R}^M)$  **invertierbar**, so gibt es offene Umgebungen  $U'$  von  $a'$  in  $\mathbb{R}^L$  und  $U''$  von  $a'' \in \mathbb{R}^M$  sowie eine  **$C^1$ -Funktion**  $g: U' \rightarrow U''$ , so dass für alle  $x' \in U'$  gilt:

$$\boxed{x'' \in U'', f(x', x'') = 0 \iff x'' = g(x').}$$

**Bemerkungen** (zum Satz über implizite Funktionen).

- (1) Der Satz besagt, dass man das **unterbestimmte System**  $f(x', x'') = 0$  **von**  $M$  im Allgemeinen **nicht-linearen** (Komponenten-) **Gleichungen** für die  $N = L + M$  Variablen  $x = (x', x'')$  zumindest **lokal eindeutig nach** den  $M$  Variablen  $x''$  **auflösen** kann. Ähnlich wie in der linearen Algebra bei unterbestimmten linearen Gleichungssystemen kann man also einen Teil der Variablen, hier die  $L$  Variablen  $x'$ , vorgeben und daraus die anderen Variablen, hier die  $M$  Variablen  $M$  berechnen. Anders als in der linearen Algebra kann man für nicht-lineare Gleichungssysteme aber **auch bei gegebenem  $x'$  keine globale Eindeutigkeit von  $x''$ , sondern nur lokale Eindeutigkeit** innerhalb der (tendenziell) kleinen Umgebung  $U''$  erwarten. Dies ist der Grund, warum man bei obiger Äquivalenz weitere Lösungen außerhalb von  $U''$  ausschließen und auf der linken Seite explizit  $x'' \in U''$  fordern muss.
- (2) Die Funktion  $g$  des Satzes heißt (nach  $x''$ ) **auflösende Funktion** des Gleichungssystems  $f(x', x'') = 0$  oder **implizit** durch  $f(x', x'') = 0$  **gegebene Funktion**. Sie erfüllt insbesondere  $g(a') = a''$  und

$$f(x', g(x')) = 0 \quad \text{für alle } x' \in U'.$$

- (3) Die Invertierbarkeit der partiellen totalen Ableitung  $\frac{\partial f}{\partial x''}(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^M, \mathbb{R}^M)$  ist wesentliche Voraussetzung des Satzes und ist äquivalent zur Invertierbarkeit der zugehörigen „partiellen Funktionalmatrix“  $D_{x''} f(a) \in \mathbb{R}^{M \times M}$ , die aus den letzten  $M$  Spalten, also den  $x''$ -Spalten, der vollen Funktionalmatrix  $Df(a) \in \mathbb{R}^{M \times N}$  besteht. Die lineare Algebra liefert **für diese Invertierbarkeit das notwendige und hinreichende Kriterium**

$$\boxed{\det(D_{x''} f(a)) \neq 0.}$$

- (4) Ist  $\frac{\partial f}{\partial x''}(a)$  nicht invertierbar, aber hat die **totale Ableitung**  $f'(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$  **beziehungsweise** die **Funktionalmatrix**  $Df(a) \in \mathbb{R}^{M \times N}$  den **maximal möglichen Rang**  $M$ , so kann man stets  $M$  linear unabhängige Spalten von  $Df(a)$  finden. Analog zum Satz kann man dann **nach den zu diesen Spalten gehörigen Variablen** (statt nach den letzten  $M$  Variablen  $x''$ ) **auflösen**. Formal ergibt folgt dies durch Anwendung des Satzes nach geeigneter Permutation der Variablen.
- (5) Der Satz bleibt allgemeiner für Banach-Räume  $\mathcal{X}'$ ,  $\mathcal{X}''$ ,  $\mathcal{Y}$  und Funktionen  $f: D \rightarrow \mathcal{Y}$  auf  $D \subset \mathcal{X}' \times \mathcal{X}''$  richtig. Wie beim Umkehrsatz muss man dann allerdings wissen, dass  $\frac{\partial f}{\partial x''}(a) \in \mathcal{L}(\mathcal{X}'', \mathcal{Y})$  eine Inverse in  $\mathcal{L}(\mathcal{Y}, \mathcal{X}'')$  besitzt.
- (6) **Geometrisch** besagt der Satz, dass die **Nullstellenmenge**  $\{(x', x'') \in D : f(x', x'') = 0\}$  der  $C^1$ -Funktion  $f: \mathbb{R}^N \supset D \rightarrow \mathbb{R}^M$  zumindest lokal (d.h. geschnitten mit  $U' \times U''$ ) **als Graph**  $\{(x', g(x')) : x' \in U'\}$  der  $C^1$ -Funktion  $g: \mathbb{R}^L \supset U' \rightarrow \mathbb{R}^M$  dargestellt werden kann. Mit anderen Worten ist die **Graphenabbildung**  $u: \mathbb{R}^L \supset U' \rightarrow \mathbb{R}^N$ ,  $x' \mapsto (x', u(x'))$  eine **lokale  $C^1$ -Parametrisierung** der Nullstellenmenge mit maximalem Rang; sie erfüllt



$u(a') = a$  sowie  $f(u(x')) = 0$  und  $\text{Rang}(Du(x')) = L$  für alle  $x' \in U'$ , wie es im vorigen Abschnitt benutzt wurde (nur dass dort mit einer Umgebung der 0 in  $\mathbb{R}^L$  statt der Umgebung  $U'$  von  $a'$  in  $\mathbb{R}^L$  gearbeitet wurde; dabei handelt es sich aber nur um eine Verschiebung, die keinen echten Unterschied macht).

Diese geometrischen Aussagen sind übrigens keineswegs selbstverständlich. Sie gelten im Allgemeinen nicht global und in Stellen nicht-maximalen Rangs von  $Df$  auch nicht lokal.

- (7) Unter den gleichen Voraussetzungen an  $f$  (abgesehen nur davon, dass  $f(a) = 0$  nicht mehr benötigt wird) kann man auch die **Gleichung  $f(x', x'') = y$  mit allgemeiner rechter Seite  $y \in \mathbb{R}^M$  lokal zu  $x'' = \tilde{g}(x', y)$  auflösen**, wobei  $\tilde{g}: U' \times V \rightarrow U''$  eine  $C^1$ -Funktion ist,  $U'$  und  $U''$  dieselben Umgebungen wie zuvor bezeichnen und  $V$  eine jetzt zusätzlich benötigte Umgebung von  $f(a)$  ist. Insbesondere gelten damit  $\tilde{g}(a', f(a)) = a''$  und  $f(x', \tilde{g}(x', y)) = y$  für alle  $(x', y) \in U' \times V$ , und geometrisch hat man damit nicht nur die Nullstellenmenge, sondern eine ganze Schar von Niveaumengen  $\{x \in D : f(x) = y\}$  mit  $|y - f(a)| \ll 1$  als Graphen von  $C^1$ -Funktionen dargestellt.

Diese Version des Satzes, die auch  **$C^1$ -Abhängigkeit** der Lösung und der Graphendarstellung **von der rechten Seite  $y$**  beinhaltet, gewinnt man problemlos durch Anwendung der oben formulierten Version auf  $\tilde{f}((x', y), x'') := f(x', x'') - y$  (oder kann sie alternativ direkt durch marginale Modifikation des unten folgenden Beweises erhalten). Ein Vorteil dieser Betrachtungsweise besteht darin, dass man den Umkehrsatz als genaues Analogon des Satzes über implizite Funktionen im Fall  $L = 0$ ,  $M = N$  erkennt: Streicht man nämlich alle Auftreten von  $x'$ , so entspricht  $\tilde{g}$  gerade einer lokalen Umkehrfunktion zu  $f$ .

- (8) Für  $x' \in U'$  erhält man durch Ableiten von  $f(x', g(x')) = 0$  mit der Kettenregel und Auflösen die Formeln

$$g'(x') = - \left[ \frac{\partial f}{\partial x''}(x', g(x')) \right]^{-1} \frac{\partial f}{\partial x'}(x', g(x')),$$

$$Dg(x') = - [D_{x''} f(x', g(x'))]^{-1} D_{x'} f(x', g(x'))$$

für die Ableitung von  $g$ . Analog kann man im allgemeineren Rahmen der Bemerkung (7) Formeln für  $\frac{\partial g}{\partial x'}$ ,  $\frac{\partial g}{\partial y}$  beziehungsweise  $D_{x'} \tilde{g}$ ,  $D_y \tilde{g}$  herleiten.

**Beispiele** (zum Satz über implizite Funktionen). Im Fall  $L = N - 1$ ,  $M = 1$  identifiziert man  $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  und  $\mathbb{R}^{1 \times 1}$  mit  $\mathbb{R}$ , daher reduziert sich die Invertierbarkeitsvoraussetzung des Satzes darauf, dass die partielle Ableitung  $\frac{\partial f}{\partial x''}(a) \in \mathbb{R}$  einer skalaren Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  auf  $D \subset \mathbb{R}^N$  nach der letzten Variablen  $x'' \in \mathbb{R}$  von  $x = (x', x'') \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}$  nahe einer Nullstelle  $a \in \overset{\circ}{D}$  von  $f$  nicht Null ist. Für diesen Fall werden folgende Beispiele betrachtet:

- (1) Die Gleichung

$$f(x) := (x'')^2 - |x'|^3 = 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^N$$

kann wegen  $\frac{\partial f}{\partial x''}(x) = 2x''$  nahe allen Nullstellen  $x = (x', x'') \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}$  von  $f$  mit  $x'' \neq 0$  lokal durch eine  $C^1$ -Funktion nach  $x''$  aufgelöst werden. Die aufgelöste Gleichung lautet  $x'' = \pm |x'|^{3/2} := g(x')$ , wobei für  $x'' > 0$  das Vorzeichen Plus, für  $x'' < 0$  das Vorzeichen Minus zu wählen ist. Global gibt es also zu  $x' \neq 0$  stets zwei Lösungen  $x''$ , nur lokal ist  $x''$  eindeutig. Die Nullstelle  $0_{\mathbb{R}^N}$  von  $f$  dagegen ist auch Nullstelle von  $f'$ , und nahe ihr ist kein Auflösen möglich (auch nicht nach einer der  $x'$ -Variablen). Dies kann man für  $N = 2$  oder

$N = 3$  auch an einer Skizze der Nullstellenmenge erkennen, denn diese Menge verzweigt sich im Ursprung und hat dort eben nicht die lokale Struktur eines Graphen.

(2) Die Gleichung

$$f(x) := |x'| - x'' \log |x''| = 0 \quad \text{für } x \in D \subset \mathbb{R}^N$$

wird hier auf dem Definitionsbereich  $D := \{(x', x'') \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R} : x' \neq 0, x'' \neq 0\}$  betrachtet, auf dem eine  $C^1$ -Funktion  $f$  vorliegt. Wegen  $\frac{\partial f}{\partial x''}(x) = -\log |x''| - 1$  ist nahe allen Nullstellen  $x = (x', x'') \in D$  von  $f$  mit  $|x''| \neq \frac{1}{e}$  das lokale Auflösen zu  $x'' = g(x')$  möglich, die auflösende Funktion  $g$  kann hier aber nicht ohne Weiteres explizit angegeben werden. Nahe den beiden verbleibenden Nullstellen  $(\frac{1}{e}, -\frac{1}{e}), (-\frac{1}{e}, -\frac{1}{e}) \in D$  kann man nicht nach  $x''$  auflösen, ersatzweise ist dort aber ein lokales Auflösen nach jeder der  $x'$ -Variablen möglich, denn die zugehörigen Ableitungen  $\frac{\partial f}{\partial x'_1}, \frac{\partial f}{\partial x'_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x'_{N-1}}$  sind an diesen Stellen alle ungleich Null. Auch hier ist eine Skizze der Nullstellenmenge instruktiv.

Man kann den Satz über implizite Funktionen aus dem Umkehrsatz ableiten, indem man Komponentenfunktionen ergänzt und so ein voll bestimmtes Gleichungssystem herstellt. Dies wird nun ausgeführt.

*Beweis des Satzes über implizite Funktionen.* Durch

$$\tilde{f}(x', x'') := (x', f(x', x'')) \quad \text{für } (x', x'') \in D$$

erhält man eine Funktion  $\tilde{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^N$  mit  $\tilde{f}(a) = (a', 0)$ , die  $C^1$  nahe  $a$  ist und dort eine invertierbare Funktionalmatrix  $D\tilde{f}(a) \in \mathbb{R}^{N \times N}$  (nämlich eine von Block-Dreiecks-Gestalt mit den invertierbaren Blöcken  $\mathbb{I}_L \in \mathbb{R}^{L \times L}$  und  $\frac{\partial f}{\partial x''}(a) \in \mathbb{R}^{M \times M}$  auf der Diagonale) besitzt. Nach dem Umkehrsatz gibt es dann Umgebungen  $U$  von  $a$  in  $\mathbb{R}^N$  und  $W$  von  $(a', 0)$  in  $\mathbb{R}^N$  sowie eine  $C^1$ -Umkehrfunktion  $\tilde{f}^{-1}: W \rightarrow U$  zu  $\tilde{f}$  mit  $\tilde{f}^{-1}(a', 0) = a$ . Aufgrund der speziellen Wahl von  $\tilde{f}$  mit Erhaltung der  $x'$ -Variablen hat diese Umkehrfunktion notwendig die Gestalt

$$\tilde{f}^{-1}(x', y) = (x', \tilde{g}(x', y)) \quad \text{für } (x', y) \in W,$$

wobei  $\tilde{g}: W \rightarrow \mathbb{R}^M$  eine  $C^1$ -Funktion mit  $\tilde{g}(a', 0) = a''$  ist. Man wählt<sup>11</sup> jetzt offene Umgebungen  $U'$  von  $a'$  in  $\mathbb{R}^L$  und  $U''$  von  $a''$  in  $\mathbb{R}^M$  mit  $U' \times U'' \subset U$  und  $U' \times \{0\} \subset W$  und  $\tilde{g}(U' \times \{0\}) \subset U''$ . Für  $x' \in U'$  ergibt sich dann

$$\begin{aligned} x'' \in U'', f(x', x'') = 0 &\iff x'' \in U'', \tilde{f}(x', x'') = (x', 0) \\ &\iff (x', x'') = (x', \tilde{g}(x', 0)) \iff x'' = \tilde{g}(x', 0). \end{aligned}$$

Dies ist die Behauptung für die  $C^1$ -Funktion  $g := \tilde{g}(\cdot, 0): U' \rightarrow U''$ . □

<sup>11</sup>Wie diese Wahl erfolgen kann, wird klarer, wenn man sie in zwei Schritten vornimmt: Man wählt erst offene Umgebungen  $\tilde{U}'$  von  $a'$  und  $U''$  von  $a''$  mit  $\tilde{U}' \times U'' \subset U$  und dann — bei schon fixiertem  $U''$  — eine eventuell kleinere offene Umgebung  $U' \subset \tilde{U}'$  von  $a'$  mit  $U' \times \{0\} \subset W$  und  $\tilde{g}(U' \times \{0\}) \subset U''$ . Der zweite Schritt beruht dabei auf der Stetigkeit von  $\tilde{g}$  in  $(a', 0)$  mit  $g(a', 0) = a''$ .

## 8.4 Ableitungen zweiter und höherer Ordnung, Satz von Taylor, konvexe Funktionen

Im finalen Abschnitt dieser Notizen werden auch für Funktionen mehrerer Variablen Ableitungen zweiter und, allgemein,  $m$ -ter Ordnung mit beliebigem  $m \in \mathbb{N}$  untersucht. Zwar trat auch zuvor mit der Hesse-Matrix schon ein Konzept in dieser Richtung auf, deren genauere Untersuchung und der Nachweis ihrer Symmetrie folgen aber erst jetzt.

Als Erstes wird die (sehr naheliegende) Definition von partiellen Ableitungen und Richtungsableitungen höherer Ordnung vorgestellt:

**Definition (partielle Ableitungen und Richtungsableitungen höherer Ordnung).** Seien  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  normierte Räume,  $f: D \rightarrow \mathcal{Y}$  eine Funktion auf  $D \subset \mathcal{X}$  und  $a \in \overset{\circ}{D}$ . Für  $m \in \mathbb{N}$  und  $v_1, v_2, \dots, v_{m-1}, v_m \in \mathcal{X}$  nennt man

$$\partial_{v_m} \partial_{v_{m-1}} \dots \partial_{v_2} \partial_{v_1} f(a) := \partial_{v_m} (\partial_{v_{m-1}} (\dots \partial_{v_2} (\partial_{v_1} f) \dots)) (a) \in \mathcal{Y}$$

(falls die iterierte Ableitung auf der rechten Seite existiert, was insbesondere die Existenz von  $\partial_{v_1} f, \partial_{v_2} (\partial_{v_1} f), \dots, \partial_{v_{m-1}} (\dots \partial_{v_2} (\partial_{v_1} f) \dots)$  auf einer Umgebung von  $a$  voraussetzt) eine **Richtungsableitung  $m$ -ter Ordnung** von  $f$  an der Stelle  $a$ .

Speziell für  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^N$  und  $i_1, i_2, \dots, i_{m-1}, i_m \in \{1, 2, \dots, N-1, N\}$ , mit zugehörigen Vektoren  $e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_{m-1}}, e_{i_m}$  aus der kanonischen Basis von  $\mathbb{R}^N$ , heißt

$$\partial_{i_m} \partial_{i_{m-1}} \dots \partial_{i_2} \partial_{i_1} f(a) := \partial_{e_{i_m}} \partial_{e_{i_{m-1}}} \dots \partial_{e_{i_2}} \partial_{e_{i_1}} f(a)$$

(wenn existent) eine **partielle Ableitung  $m$ -ter Ordnung** von  $f$  an der Stelle  $a$ .

Wird  $m$ -mal in der gleichen Richtung  $v \in \mathcal{X}$  oder  $m$ -mal nach der gleichen  $i$ -ten Variablen abgeleitet, so bezeichnet man die zugehörigen Ableitungen

$$\partial_v^m f(a) := \underbrace{\partial_v \partial_v \dots \partial_v \partial_v}_{m\text{-mal}} f(a) \quad \text{beziehungsweise} \quad \partial_i^m f(a) := \underbrace{\partial_i \partial_i \dots \partial_i \partial_i}_{m\text{-mal}} f(a)$$

als **reine Richtungsableitungen  $m$ -ter Ordnung** beziehungsweise **reine partielle Ableitungen  $m$ -ter Ordnung**, in allen anderen Fällen spricht man von **gemischten Ableitungen  $m$ -ter Ordnung**.

Im Normalfall ist die Reihenfolge, in der die einzelnen Operatoren  $\partial_{v_j}$  beziehungsweise  $\partial_{i_j}$  bei den gerade definierten Ableitungen auftreten, irrelevant:

**Satz (über Vertauschbarkeit von Richtungsableitungen).** Seien  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  normierte Räume,  $f: D \rightarrow \mathcal{Y}$  eine Funktion auf  $D \subset \mathcal{X}$  und  $a \in \overset{\circ}{D}$ . Existieren für  $v, w \in \mathcal{X}$  die Richtungsableitungen  $\partial_v f$  und  $\partial_w f$  auf einer Umgebung von  $a$ , so gilt

$$\partial_v \partial_w f(a) = \partial_w \partial_v f(a),$$

vorausgesetzt dass eine der folgenden schwachen Zusatzvoraussetzungen erfüllt ist:

- (a)  $\partial_w \partial_v f$  existiert auf einer Umgebung von  $a$  und ist in  $a$  stetig;
- (b) Die totalen Ableitungen  $(\partial_v f)'(a)$  und  $(\partial_w f)'(a)$  existieren.

Unter Voraussetzung (a) ist der Satz als **Satz von Schwarz** (nach H.A. Schwarz) bekannt.

*Beweis.* Es reicht, den Satz für den Spezialfall partieller Ableitungen und genauer im Fall  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^2$ ,  $a = (0, 0)$ ,  $v = (1, 0)$ ,  $w = (0, 1)$  zu beweisen, denn der allgemeine Fall kann durch Betrachtung der Funktion  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{Y}$ ,  $(x, y) \mapsto f(a+xv+yw)$  darauf reduziert werden. Im Folgenden wird deshalb nur der speziellere Fall behandelt:

Für den Beweis unter Voraussetzung (a) wird die durch  $g(x, y) := f(x, y) - \partial_2 \partial_1 f(0, 0)xy$  definierte Hilfsfunktion  $g$  mit  $\partial_2 \partial_1 g(0, 0) = 0$  betrachtet, und es ist dann zu zeigen, dass  $\partial_1 \partial_2 g(0, 0)$  existiert und ebenfalls den Wert 0 hat. Hierzu entnimmt aus der vorausgesetzten Stetigkeit von  $\partial_2 \partial_1 f$  in  $(0, 0)$  zuerst, dass

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \partial_2 \partial_1 g(x, y) = 0$$

gilt. Mit dem Schrankensatz folgt

$$\partial_1 g(x, y) - \partial_1 g(x, 0) = o(|y|) \quad \text{bei } (x, y) \rightarrow (0, 0),$$

wobei das Landau-Symbol  $o$  beim Grenzübergang  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  völlig analog zum in Abschnitt 4.4 betrachteten Fall von Grenzübergängen mit einzelnen reellen Variablen verwendet wird. Eine erneute Anwendung des Schrankensatzes ergibt nun

$$[g(x, y) - g(x, 0)] - [g(0, y) - g(0, 0)] = o(|x||y|) \quad \text{bei } (x, y) \rightarrow (0, 0).$$

Die partielle Ableitung  $\partial_2 g$  (die nahe  $(0, 0)$  wegen der vorausgesetzten Existenz von  $\partial_2 f$  existiert) schreibt man als Differenzenquotient aus und erhält

$$\partial_2 g(x, 0) - \partial_2 g(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{g(x, y) - g(x, 0) - g(0, y) + g(0, 0)}{y} = o(|x|) \quad \text{bei } x \rightarrow 0.$$

Die letzte Formel bedeutet aber nichts anderes als die erstrebte Existenz von

$$\partial_1 \partial_2 g(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial_2 g(x, 0) - \partial_2 g(0, 0)}{x} = 0.$$

Unter Voraussetzung (b) existiert insbesondere die partielle Ableitung  $\partial_2 \partial_1 f(0, 0)$ . Außerdem existiert für obiges  $g$  mit  $g(x, y) := f(x, y) - \partial_2 \partial_1 f(0, 0)xy$  die totale Ableitung  $(\partial_1 g)'(0, 0)$ , und wegen  $\partial_2 \partial_1 g(0, 0) = 0$  gilt  $(\partial_1 g)'(0, 0)(x, y) = \partial_1^2 g(0, 0)x$  für  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Gemäß der Definition der totalen Ableitung bedeutet dies nichts anderes als

$$\partial_1 g(x, y) - \partial_1 g(0, 0) - \partial_1^2 g(0, 0)x = o(|x| + |y|) \quad \text{bei } (x, y) \rightarrow (0, 0)$$

Wendet man diese Aussage einmal wie angegeben und einmal für  $(x, y) = (x, 0)$  an, so bekommt man insgesamt

$$\partial_1 g(x, y) - \partial_1 g(x, 0) = o(|x| + |y|) \quad \text{bei } (x, y) \rightarrow (0, 0).$$

Mit dem Schrankensatz folgt

$$[g(x, y) - g(x, 0)] - [g(0, y) - g(0, 0)] = o(|x|(|x| + |y|)) \quad \text{bei } (x, y) \rightarrow (0, 0).$$

Verwendet man dies speziell für  $(x, y) = (t, t)$  und kehrt von  $g$  zu  $f$  zurück, so erhält man

$$f(t, t) - f(t, 0) - f(0, t) + f(0, 0) - \partial_2 \partial_1 f(0, 0)t^2 = o(t^2) \quad \text{bei } \mathbb{R} \ni t \rightarrow 0.$$

Aus der Voraussetzung erhält man auch die Existenz von  $\partial_1 \partial_2 f(0, 0)$  und kann dann völlig analog zu  $g$  die durch  $h(x, y) := f(x, y) - \partial_1 \partial_2 f(0, 0)xy$  definierte Hilfsfunktion  $h$  mit  $(\partial_2 h)'(0, 0)(x, y) = \partial_2^2 h(0, 0)y$  für  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  behandeln. Auf diese Weise gelangt man zu

$$f(t, t) - f(0, t) - f(t, 0) + f(0, 0) - \partial_1 \partial_2 f(0, 0)t^2 = o(t^2) \quad \text{bei } \mathbb{R} \ni t \rightarrow 0.$$

Der Vergleich der beiden  $o(t^2)$ -Bedingungen gibt die Behauptung  $\partial_1 \partial_2 f(0, 0) = \partial_2 \partial_1 f(0, 0)$ .  $\square$

**Folgerungen** (aus der Vertauschbarkeit von Richtungsableitungen).

- (1) Für  $f: D \rightarrow \mathcal{Y}$  auf  $D \subset \mathbb{R}^N$  mit nahe  $a \in \overset{\circ}{D}$  existenten partiellen Ableitungen  $\partial_i f, \partial_j f$  erhält man als Spezialfall des vorigen Satzes die **Vertauschbarkeit partieller Ableitungen**

$$\partial_i \partial_j f(a) = \partial_j \partial_i f(a)$$

unter den (a) und (b) entsprechenden schwachen Voraussetzungen. Sind diese Voraussetzungen für alle  $i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$  erfüllt und hat  $f$  Werte in  $\mathcal{Y} = \mathbb{R}$ , so folgen die **Symmetrie der Hesse-Matrix**  $Hf(a)$  und die Regel  $\text{Rot}(\nabla f)(a) = 0$ .

- (2) Als Konsequenz aus (1) können partielle Ableitungsoperatoren bei ausreichend oft differenzierbaren Funktionen  $f$  stets „umsortiert“ werden. **Jede partielle Ableitung  $m$ -ter Ordnung** kann daher mit Hilfe eines Multiindex  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{N-1}, \alpha_N) \in \mathbb{N}_0^N$  der Ordnung  $|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{N-1} + \alpha_N = m$  in der **Multiindex-Notation**

$$\partial^\alpha f := \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \dots \partial_{N-1}^{\alpha_{N-1}} \partial_N^{\alpha_N} f$$

ausgedrückt werden.

Als Nächstes werden totale Ableitungen höherer Ordnung definiert, was naheliegenderweise durch einfache Iteration dieses Konzepts geschehen könnte. Da die totale Ableitung von  $f: D \rightarrow \mathcal{Y}$  auf  $D \subset \mathcal{X}$  (wenn existent) aber eine Funktion  $f': D \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  ergibt, ist deren Ableitung (wenn ebenfalls existent) eine Funktion  $(f')': D \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}))$ . Ist ein weiteres Ableiten möglich, so bekommt man  $((f')')': D \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})))$ . Man erkennt hieran zwar wesentliche Eigenschaften totaler Ableitungen  $m$ -ter Ordnung wie die, dass sie von  $m$  Argumenten aus  $\mathcal{X}$  jeweils stetig und  $\mathbb{R}$ -linear abhängen, formal wird der Wertebereich aber sehr kompliziert. Es erweist sich daher als übersichtlicher, die Bildung geringfügig abzuändern und mit  $m$  gleichberechtigten Argumenten zu arbeiten:

**Definition (totale Ableitungen höherer Ordnung).** Seien  $\mathcal{X}$  und  $\mathcal{Y}$  normierte Räume,  $f: D \rightarrow \mathcal{Y}$  eine Funktion auf  $D \subset \mathcal{X}$  und  $a \in \overset{\circ}{D}$ . Für  $m \in \mathbb{N}_0$  wird die **totale Ableitung  $m$ -ter Ordnung**  $f^{(m)}(a)$  von  $f$  an der Stelle  $a$  rekursiv definiert: Für  $m \in \{0, 1\}$  vereinbart man formal  $f^{(0)}(a) := f(a)$  und  $f^{(1)}(a) := f'(a)$ . Für  $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$  wird  $f^{(m)}(a)$  genau dann erklärt, wenn  $(f^{(m-1)})'(a)$  (bezüglich der Norm der nächsten Bemerkung auf dem Wertebereich von  $f^{(m-1)}$ ) existiert, und dann ist  $f^{(m)}(a)$  die  $m$ -lineare<sup>12</sup> Abbildung  $\mathcal{X}^m \rightarrow \mathcal{Y}$  mit

$$f^{(m)}(a)(v_1, v_2, \dots, v_{m-1}, v_m) := [\partial_{v_m}(f^{(m-1)})(a)](v_1, v_2, \dots, v_{m-1}) \in \mathcal{Y}$$

für  $(v_1, v_2, \dots, v_{m-1}, v_m) \in \mathcal{X}^m$ .

**Bemerkungen** (zu totalen Ableitungen höherer Ordnung).

- (1) Für normierte Räume  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  wird mit  $\mathcal{L}^m(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  der **Raum der stetigen  $m$ -linearen Abbildungen  $Q: \mathcal{X}^m \rightarrow \mathcal{Y}$**  bezeichnet. Stetigkeit eines  $m$ -linearen  $Q$  ist dabei äquivalent zu einer Produkt-Abschätzung  $\|Q(v_1, v_2, \dots, v_{m-1}, v_m)\|_{\mathcal{Y}} \leq C \|v_1\|_{\mathcal{X}} \|v_2\|_{\mathcal{X}} \dots \|v_{m-1}\|_{\mathcal{X}} \|v_m\|_{\mathcal{X}}$  für alle  $v_1, v_2, \dots, v_{m-1}, v_m \in \mathcal{X}$  mit festem  $C \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ , und deshalb wird  $\mathcal{L}^m(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  durch die zugehörige Operatornorm  $\|Q\|_{\mathcal{L}^m(\mathcal{X}, \mathcal{Y})} := \sup_{v_1, \dots, v_m \in \mathcal{X} \setminus \{0\}} \frac{\|Q(v_1, v_2, \dots, v_{m-1}, v_m)\|_{\mathcal{Y}}}{\|v_1\|_{\mathcal{X}} \|v_2\|_{\mathcal{X}} \dots \|v_{m-1}\|_{\mathcal{X}} \|v_m\|_{\mathcal{X}}}$  auf  $Q \in \mathcal{L}^m(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  normiert.

<sup>12</sup>Mit  $m$ -linearen Abbildungen sind hier und im Folgenden immer solche gemeint, die in jedem ihrer  $m$  Argumente  $\mathbb{R}$ -linear sind, d.h. die  $m$ -Linearität wird immer auf die reellen Zahlen als Grundkörper bezogen.

Wenn nun — in der Situation der Definition — die **totale Ableitung  $m$ -ter Ordnung**  $f^{(m)}(a)$  existiert, ist sie ein **Element von  $\mathcal{L}^m(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$** ; dies ergibt<sup>13</sup> sich aus der früheren Definition der totalen Ableitung (erster Ordnung). Existiert die totale Ableitung  $m$ -ter Ordnung an allen Stellen eines offenen Definitionsbereich  $D$ , so lässt sie sich als Funktion  $f^{(m)}: D \rightarrow \mathcal{L}^m(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  auffassen.

- (2) Ausgehend von<sup>14</sup>  $[\partial_{v_m}(f^{(m-1)})(a)](v_1, v_2, \dots, v_{m-1}) = \partial_{v_m}[f^{(m-1)}(\cdot)(v_1, v_2, \dots, v_{m-1})](a)$  sieht man mit Induktion nach  $m \in \mathbb{N}$ : Existiert die totale Ableitung  $f^{(m)}(a)$ , so **existieren alle Richtungsableitungen  $m$ -ter Ordnung**, und

$$\partial_{v_m} \partial_{v_{m-1}} \dots \partial_{v_2} \partial_{v_1} f(a) = f^{(m)}(a)(v_1, v_2, \dots, v_{m-1}, v_m)$$

**hängt stetig und  $m$ -linear von den Richtungsvektoren**  $(v_1, v_2, \dots, v_{m-1}, v_m) \in \mathcal{X}^m$  ab. Im Fall  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^N$  bedeutet dies insbesondere

$$\partial_{v_m} \dots \partial_{v_2} \partial_{v_1} f(a) = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_m=1}^N (v_1)_{i_1} (v_2)_{i_2} \dots (v_m)_{i_m} (\partial_{i_m} \dots \partial_{i_2} \partial_{i_1} f)(a),$$

wobei  $(v_j)_i$  die  $i$ -te Komponente des Vektors  $v_j \in \mathbb{R}^N$  bezeichnet.

- (3) Aufgrund des Satzes über die Vertauschbarkeit von Richtungsableitungen (der in der Version mit Voraussetzung (b) stets anwendbar ist) ist die stetige  $m$ -lineare Abbildung  $f^{(m)}(a)$  **immer symmetrisch**, d.h. sie liegt im Unterraum  $\mathcal{L}_{\text{sym}}^m(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  derjenigen  $Q \in \mathcal{L}^m(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  mit  $Q(v_1, v_2, \dots, v_{m-1}, v_m) = Q(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(m-1)}, v_{\sigma(m)})$  für alle  $v_1, v_2, \dots, v_{m-1}, v_m \in \mathcal{X}$  und alle Permutationen  $\sigma$  von  $\{1, 2, \dots, m-1, m\}$ .
- (4) Für **reine Richtungsableitungen** in Richtung  $v \in \mathcal{X}$  erhält man aus (2) einerseits

$$\partial_v^m f(a) = f^{(m)}(a) \underbrace{(v, v, \dots, v, v)}_{m\text{-mal}}$$

und im Fall  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^N$  durch Zählen gleicher Terme  $v_{i_1} v_{i_2} \dots v_{i_m}$  andererseits die **Multinomialformel**

$$\partial_v^m f(a) = \sum_{|\alpha|=m} \binom{m}{\alpha} v^\alpha \partial^\alpha f(a),$$

mit den Multiindex-Konventionen  $v^\alpha := v_1^{\alpha_1} v_2^{\alpha_2} \dots v_N^{\alpha_N}$ ,  $\alpha! := \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_N!$ ,  $\binom{m}{\alpha} := \frac{m!}{\alpha!}$ .

<sup>13</sup>Tatsächlich ist  $m$ -Linearität einfach einzusehen, die Stetigkeit der  $m$ -linearen Abbildung  $f^{(m)}(a)$  begründet man durch Induktion nach  $m$  und die formale Abschätzung (mit beliebigen  $v_1, v_2, \dots, v_{m-1}, v_m \in \mathcal{X}$ )

$$\begin{aligned} \|f^{(m)}(a)(v_1, v_2, \dots, v_{m-1}, v_m)\|_{\mathcal{Y}} &= \|[\partial_{v_m}(f^{(m-1)})(a)](v_1, v_2, \dots, v_{m-1})\|_{\mathcal{Y}} \\ &= \|[(f^{(m-1)})'(a)v_m](v_1, v_2, \dots, v_{m-1})\|_{\mathcal{Y}} \\ &\leq \|(f^{(m-1)})'(a)v_m\|_{\mathcal{L}^{m-1}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})} \|v_1\|_{\mathcal{X}} \|v_2\|_{\mathcal{X}} \dots \|v_{m-1}\|_{\mathcal{X}} \\ &\leq \|(f^{(m-1)})'(a)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{L}^{m-1}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}))} \|v_1\|_{\mathcal{X}} \|v_2\|_{\mathcal{X}} \dots \|v_{m-1}\|_{\mathcal{X}} \|v_m\|_{\mathcal{X}}. \end{aligned}$$

<sup>14</sup>Diese zunächst kompliziert anmutende Identität reduziert sich auf die einfache Regel  $L\partial_v g(a) = \partial_v(Lg)(a)$  für an der Stelle  $a \in D \subset \mathcal{X}$  in Richtung  $v \in \mathcal{X}$  differenzierbare  $g: D \rightarrow \mathcal{Z}$  und  $L \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}, \mathcal{Y})$  und kann daher als spezieller Fall der Kettenregel angesehen oder direkt mit der Definition der Richtungsableitung verifiziert werden. Man wählt dazu  $g := f^{(m-1)}$  und betrachtet die Auswertungsabbildung  $L \in \mathcal{L}(\mathcal{L}^{m-1}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}), \mathcal{Y})$  mit  $LQ := Q(v_1, v_2, \dots, v_{m-1})$  bei festen Richtungen  $v_1, v_2, \dots, v_{m-1} \in \mathcal{X}$ .

(5) Speziell im **Fall  $m = 2$  zweiter Ordnung** ist  $f''(a) := f^{(2)}(a) \in \mathcal{L}_{\text{sym}}^2(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  bilinear mit

$$\partial_w \partial_v f(a) = f''(a)(v, w), \quad \partial_v^2 f(a) = f''(a)(v, v)$$

für  $v, w \in \mathcal{X}$ . Im Fall  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^N$  gelten auch

$$\partial_w \partial_v f(a) = \sum_{i,j=1}^N v_i w_j \partial_j \partial_i f(a), \quad \partial_v^2 f(a) = 2 \sum_{1 \leq i < j \leq N} v_i v_j \partial_j \partial_i f(a) + \sum_{i=1}^N v_i^2 \partial_i^2 f(a)$$

für  $v, w \in \mathbb{R}^N$ , und für  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^N, \mathcal{Y} = \mathbb{R}$  **repräsentiert die Hesse-Matrix  $\text{H}f(a) \in \mathbb{R}^{N \times N}$  die symmetrische Bilinearform  $f''(a) \in \mathcal{L}_{\text{sym}}^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$  im Sinn von**

$$f''(a)(v, w) = v \cdot \text{H}f(a)w \quad \text{für } v, w \in \mathbb{R}^N.$$

**Definition ( $C^m$ -Funktionen).** Seien  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  normierte Räume und  $D$  offene Teilmenge von  $\mathcal{X}$ .

- Für  $m \in \mathbb{N}_0$  heißt  $f: D \rightarrow \mathcal{Y}$  eine  $m$ -fach stetig differenzierbare Funktion, eine  **$C^m$ -Funktion** oder eine **Funktion der Klasse  $C^m$**  auf  $D$ , wenn  $f^{(m)}$  auf ganz  $D$  existiert und stetig ist. Der Raum aller  $\mathcal{Y}$ -wertigen  $C^m$ -Funktionen auf  $D$  wird mit  $C^m(D, \mathcal{Y})$  bezeichnet.
- Hat  $f$  die  $C^m$ -Eigenschaft für alle  $m \in \mathbb{N}_0$ , so heißt  $f$  beliebig oft differenzierbare Funktion,  **$C^\infty$ -Funktion** oder **Funktion der Klasse  $C^\infty$**  auf  $D$ . Für den Raum aller  $\mathcal{Y}$ -wertigen  $C^\infty$ -Funktionen auf  $D$  schreibt man  $C^\infty(D, \mathcal{Y})$ .

**Bemerkung (Kriterium für  $C^m$ -Funktionen).** Notwendig und hinreichend für die  $C^m$ -Eigenschaft,  $m \in \mathbb{N}_0$ , einer Funktion  $f: D \rightarrow \mathcal{Y}$  auf einem offenen Definitionsbereich  $D \subset \mathbb{R}^N$  ist, dass alle partiellen Ableitungen  $\partial^\alpha f$  mit einem Multiindex  $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$  der Ordnung  $|\alpha| = m$  auf  $D$  existieren und stetig sind. Dies ist für  $m = 1$  bereits aus Abschnitt 8.1 bekannt und folgt für beliebiges  $m$  durch Induktion aus den zuvor behandelten Zusammenhängen.

Auch für Funktionen mehrerer Variablen macht das Konzept der Taylor-Entwicklung Sinn:

**Definition (Taylor-Polynome).** Sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^M$  eine Funktion auf  $D \subset \mathbb{R}^N$ , so dass  $f^{(m)}(a)$  mit  $m \in \mathbb{N}_0$  an der Stelle  $a \in \overset{\circ}{D}$  existiert. Dann wird das  $m$ -te Taylor-Polynom  $T_a^m f$  von  $f$  zur Stelle  $a$  definiert durch

$$T_a^m f(x) := \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} f^{(k)}(a) \underbrace{(x-a, x-a, \dots, x-a, x-a)}_{k\text{-mal}} = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^N \\ |\alpha| \leq m}} \frac{\partial^\alpha f(a)}{\alpha!} (x-a)^\alpha \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^N,$$

wobei  $f^{(k)}(a)$  als Element von  $\mathcal{L}_{\text{sym}}^k(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$  auf die folgenden  $k$  Argumente anzuwenden ist.

**Beispiel** (spezieller Taylor-Polynome). Speziell im Fall von  $N = 2$  Variablen ist das Taylor-Polynom  $T_0^3 f$  von  $f$  der Ordnung  $m = 3$  zur Stelle  $a = (0, 0) =: \mathbf{0}$  durch

$$f(x, y) = f(\mathbf{0}) + f'(\mathbf{0}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2} f''(\mathbf{0}) \left( \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) + \frac{1}{6} f^{(3)}(\mathbf{0}) \left( \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \quad \text{für } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

gegeben, wobei die ausgeschriebenen Terme die Gestalt

$$\begin{aligned} f'(\mathbf{0}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \partial_1 f(\mathbf{0})x + \partial_2 f(\mathbf{0})y, \\ \frac{1}{2} f''(\mathbf{0}) \left( \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) &= \frac{1}{2} \partial_1^2 f(\mathbf{0})x^2 + \partial_1 \partial_2 f(\mathbf{0})xy + \frac{1}{2} \partial_2^2 f(\mathbf{0})y^2, \\ \frac{1}{6} f^{(3)}(\mathbf{0}) \left( \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) &= \frac{1}{6} \partial_1^3 f(\mathbf{0})x^3 + \frac{1}{2} \partial_1^2 \partial_2 f(\mathbf{0})x^2 y + \frac{1}{2} \partial_1 \partial_2^2 f(\mathbf{0})x y^2 + \frac{1}{6} \partial_2^3 f(\mathbf{0})y^3 \end{aligned}$$

annehmen. Im Fall  $M = 1$  einer  $\mathbb{R}$ -wertigen Funktion können die Terme erster und zweiter Ordnung auch mit dem Gradienten  $\nabla f(\mathbf{0})$  und der Hesse-Matrix  $Hf(\mathbf{0})$  als

$$f'(\mathbf{0})\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \nabla f(\mathbf{0}), \quad \frac{1}{2}f''(\mathbf{0})\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot Hf(\mathbf{0})\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

geschrieben werden.

**Bemerkung** (zu Taylor-Polynomen). Die **entscheidende Eigenschaft des Taylor-Polynoms**  $T_a^m f$  ist — genau wie im Fall einer Variablen — die, dass  $T_a^m f$  **an der Entwicklungsstelle  $a$  und für alle Ordnungen  $\leq m$  dieselben Ableitungen wie  $f$  selbst** hat und das eindeutige Polynom vom Grad  $\leq m$  mit dieser Eigenschaft ist; dies gilt sowohl für partielle Ableitungen und Richtungsableitungen als auch für totale Ableitungen.

**Hauptsatz (Satz von Taylor für Funktionen mehrerer Variablen)**. Sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^M$  eine Funktion auf  $D \subset \mathbb{R}^N$ , und seien  $a \in \overset{\circ}{D}$ ,  $m \in \mathbb{N}_0$ . Dann gelten:

- **Taylor-Formel (qualitativ)**: Existiert  $f^{(m)}(a)$ , so ist  $T_a^m f$  das eindeutige Polynom vom Grad  $\leq m$  mit

$$f(x) = T_a^m f(x) + o(|x-a|^m) \quad \text{bei } x \rightarrow a.$$

- **Verschärfte Taylor-Formel (qualitativ)**: Existiert  $f^{(m+1)}(a)$ , so ist  $T_a^m f$  sogar das eindeutige Polynome vom Grad  $\leq m$  mit

$$f(x) = T_a^m f(x) + \mathcal{O}(|x-a|^{m+1}) \quad \text{bei } x \rightarrow a.$$

- **Lagrange-Restglied-Abschätzung (quantitativ)**: Existiert  $f^{(m+1)}$  auf einer Strecke  $[a, x] \subset D$ , so gilt

$$|f(x) - T_a^m f(x)| \leq \frac{|x-a|^{m+1}}{(m+1)!} \sup_{[a,x]} \|f^{(m+1)}\|_{\mathcal{L}^{m+1}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)}.$$

- **Integral-Restglied-Formel (quantitativ)**: Existiert  $f^{(m+1)}$  auf einer Strecke  $[a, x] \subset D$  und ist auf dieser Strecke stetig, so gilt

$$f(x) - T_a^m f(x) = \frac{1}{m!} \int_0^1 (1-t)^m f^{(m+1)}(a+t(x-a)) \underbrace{(x-a, x-a, \dots, x-a, x-a)}_{(m+1)\text{-mal}} dt,$$

wobei das Integral im Fall  $M = 1$  als normales Riemann-Integral zu verstehen ist, aber auch im Fall  $M \geq 2$  durch komponentenweise Integration<sup>15</sup> erklärt werden kann.

**Bemerkung** (zum Satz von Taylor). Auch die weiteren, aus dem Fall einer Variablen bekannten Restglied-Formeln und Restglied-Abschätzungen gelten bei mehreren Variablen analog. Außerdem machen Taylor-Polynome und all diese Resultate sogar für Banach-Räume  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{Y}$  und Funktionen  $f: D \rightarrow \mathcal{Y}$  auf  $D \subset \mathcal{X}$  Sinn; in dieser Allgemeinheit empfiehlt es sich aber, mit totalen Ableitungen zu arbeiten und nicht mit Multiindizes und höheren partiellen Ableitungen, die dann nicht mehr ohne Weiteres definiert sind.

<sup>15</sup>Mit komponentenweiser Integration ist hier gemeint, dass man für  $\mathbb{R}^M$ -wertiges  $g = \sum_{i=1}^M g_i e_i$  mit  $\mathbb{R}$ -wertigen, über  $[a, b]$  Riemann-integrierbaren Komponentenfunktionen  $g_1, g_2, \dots, g_M$  bezüglich einer beliebigen (zum Beispiel der kanonischen) Basis  $e_1, e_2, \dots, e_M$  des  $\mathbb{R}^M$  die Vereinbarung  $\int_a^b g(t) dt := \sum_{i=1}^M \left( \int_a^b g_i(t) dt \right) e_i \in \mathbb{R}^M$  trifft.



*Beweisskizze für den Hauptsatz.* Die qualitativen Teile des Hauptsatzes basieren wesentlich auf der Eigenschaft<sup>16</sup>

$$\frac{d^j}{dx^j} \Big|_{x=a} \underbrace{f^{(k)}(a)(x-a, x-a, \dots, x-a, x-a)}_{k\text{-mal}} = \begin{cases} k! f^{(k)}(a) & \text{falls } j = k \\ 0 & \text{falls } j \neq k \end{cases}$$

für  $k \in \{0, 1, 2, \dots, m\}$ ,  $j \in \mathbb{N}_0$  und die totale Ableitung  $j$ -ter Ordnung in der  $x$ -Variablen. Bei dieser Eigenschaft handelt es sich tatsächlich um nichts anderes als die oben schon einmal angesprochene Übereinstimmung  $(T_a^m f)^{(j)}(a) = f^{(j)}(a)$  für  $j \in \{0, 1, 2, \dots, m\}$ , und genau wie im Fall einer Variablen kann man dann mit dem Schrankensatz die Mehr-als- $m$ -ter-Ordnung-Übereinstimmung bzw. Mindestens- $(m+1)$ -ter-Ordnung-Übereinstimmung von  $f$  bei  $a$  mit  $T_a^m f$  beweisen und die qualitativen Teile des Hauptsatzes erhalten.

Die quantitativen Teile des Hauptsatzes ergeben sich direkter aus den entsprechenden Aussagen über die Funktion  $t \mapsto f(a+t(x-a))$  der einen reellen Variablen  $x$ . Um die Beweise der Lagrange-Abschätzung und der Integral-Formel in der größeren Allgemeinheit zu vervollständigen, gilt es dabei lediglich auf den rechten Seiten mittels

$$\frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}} f(a+t(x-a)) = \partial_{x-a}^{m+1} f(a+t(x-a)) = f^{(m+1)}(a+t(x-a)) \underbrace{(x-a, x-a, \dots, x-a, x-a)}_{(m+1)\text{-mal}}$$

zu vereinfachen (wobei die erste Gleichheit jedenfalls für  $m = 1$  in den Übungen behandelt wird und die zweite sich aus Bemerkung (2) oder (4) zu höheren totalen Ableitungen ergibt). □

Eine kanonische Anwendung des Satzes von Taylor besteht im Beweis der schon früher erwähnten Zweiter-Ordnung-Ableitungskriterien für Extremstellen:

*Beweis der Zweiter-Ordnung-Kriterien für Extremstellen aus Abschnitt 8.2.* Aufgrund der Existenz von  $(f')'(a)$  (und damit auch  $f''(a)$ ), die bei der Formulierung der Kriterien vorausgesetzt wurde, liefert der Satz von Taylor

$$f(x) = f(a) + (x-a) \cdot \nabla f(a) + (x-a) \cdot \mathbf{H}f(a)(x-a) + o(|x-a|^2) \quad \text{bei } x \rightarrow a.$$

Die Kriterien werden nun o.E. nur für den Fall von Minimalstellen behandelt:

Die Notwendigkeit von  $\nabla f(a) = 0$  für lokale Minimalstellen  $a$  ist bereits bekannt. Dass auch positive Semidefinitheit von  $\mathbf{H}f(a)$  notwendig ist, wird nun begründet. Läge diese nicht vor, so gäbe es ein  $v_0 \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$  mit  $v_0 \cdot \mathbf{H}f(a)v_0 < 0$  und daher  $tv_0 \cdot \mathbf{H}f(a)tv_0 \leq -C|tv_0|^2$  für alle  $t \in \mathbb{R}$

<sup>16</sup>Zum Beweis bestimmt man für  $h(x) := f^{(k)}(a)(x-a, \dots, x-a)$  und  $v_1, v_2, \dots, v_j \in \mathbb{R}^N$  die Richtungsableitung

$$\begin{aligned} \partial_{v_j} \dots \partial_{v_2} \partial_{v_1} h(a) &= \frac{d}{dt_j} \Big|_{t_j=0} \dots \frac{d}{dt_2} \Big|_{t_2=0} \frac{d}{dt_1} \Big|_{t_1=0} f^{(k)}(a) \left( \sum_{i_1=1}^j t_{i_1} v_{i_1}, \dots, \sum_{i_k=1}^j t_{i_k} v_{i_k} \right) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^j \underbrace{\frac{d}{dt_j} \Big|_{t_j=0} \dots \frac{d}{dt_2} \Big|_{t_2=0} \frac{d}{dt_1} \Big|_{t_1=0} t_{i_1} \dots t_{i_k} f^{(k)}(a)(v_{i_1}, \dots, v_{i_k})}_{=1 \text{ wenn } i_1, \dots, i_k \text{ Permutation von } \{1, 2, \dots, j\}; =0 \text{ sonst}} \\ &= \begin{cases} k! f^{(k)}(a)(v_1, v_2, \dots, v_j) & \text{falls } j = k \\ 0 & \text{falls } j \neq k \end{cases} \end{aligned}$$

Nach Bemerkung (2) zu höheren totalen Ableitungen folgt  $h^{(j)}(a) = k! f^{(k)}(a)$  für  $j = k$  und  $h^{(j)}(a) = 0$  für  $j \neq k$ .

und ein positives  $C \in \mathbb{R}_{>0}$ . Es folgte  $f(a+tv_0) = f(a) + tv_0 \cdot \mathbf{H}f(a)tv_0 + o(|tv_0|^2) \leq f(a) - \frac{1}{2}C|tv_0|^2$  für  $|t| \ll 1$ , also wäre  $a$  keine lokale Minimalstelle von  $f$ .

Für das hinreichende Kriterium betrachtet man den Fall, dass  $\nabla f(a) = 0$  gilt und  $\mathbf{H}f(a)$  positiv definit ist. Dann gilt  $v \cdot \mathbf{H}f(a)v \geq C|v|^2$  für alle  $v \in \mathbb{R}^N$  und ein positives  $C \in \mathbb{R}_{>0}$ . Es folgt  $f(a+v) = f(a) + v \cdot \mathbf{H}f(a)v + o(|v|^2) \geq f(a) + \frac{1}{2}C|v|^2$  für  $|v| \ll 1$ , also ist  $a$  strikte lokale Minimalstelle von  $f$ .  $\square$

Auch die Begriffe konvexer und konkaver Funktionen lassen sich in natürlicher Weise auf Funktionen mehrerer Variablen, die auf konvexen Mengen definiert sind, übertragen. Dies wird jetzt ausgeführt, und ähnlich wie in Abschnitt 4.2 werden hierfür Ableitungskriterien erster und zweiter Ordnung angegeben.

**Definitionen (konvexe Funktionen, konkave Funktionen, monotone Vektorfelder).**

Seien  $\mathcal{X}$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und  $D$  eine **konvexe** Teilmenge von  $\mathcal{X}$ .

- (1) Man nennt  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  eine **konvexe Funktion** auf  $D$ , wenn

$$f(\lambda y + (1-\lambda)x) \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} \lambda f(y) + (1-\lambda)f(x) \quad \text{für alle } x, y \in D \text{ und } \lambda \in [0, 1]$$

gilt.

- (2) Ist  $\mathcal{X}$  ein Skalarproduktraum, so bezeichnet man  $V: D \rightarrow \mathcal{X}$  als **monotones Vektorfeld** auf  $D$ , wenn

$$(y-x) \cdot (V(y) - V(x)) \geq 0 \quad \text{für alle } x, y \in D$$

gilt.

- (3) Tritt in den vorigen Bedingungen für  $x \neq y$  und  $0 < \lambda < 1$  stets die strikte Ungleichung „ $<$ “ beziehungsweise „ $>$ “ ein, so spricht man von einer **strikt konvexen Funktion** beziehungsweise einer **strikt konkaven Funktion** oder einem **strikt monotonen Vektorfeld**.

**Satz (Monotoniesatz für Vektorfelder).** Sei  $D$  konvex und offen in  $\mathbb{R}^N$  und  $V: D \rightarrow \mathbb{R}^N$  sei auf  $D$  total differenzierbar. Dann sind **folgende Aussagen äquivalent** (und zwar sowohl dann, wenn alle Ergänzungen in geschweiften Klammern mit gelesen, als auch wenn diese alle ignoriert werden):

- (I) Das **Vektorfeld**  $V$  ist auf  $D$  {strikt} **monoton**.
- (II) Für alle  $x \in D$  ist die **Funktionalmatrix**  $DV(x) \in \mathbb{R}^{N \times N}$  **positiv semidefinit** {und für keine Strecke  $[a, b]$  positiver Länge in  $D$  gilt  $(b-a) \cdot DV(x)(b-a) = 0$  für alle  $x \in [a, b]$ }.

*Beweis.* Man beobachtet zuerst, dass {strikte} Monotonie von  $V$  auf  $D$  nicht anderes bedeutet, als dass für alle  $x \in D$  und  $w \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$  die Funktion  $t \mapsto w \cdot V(x+tw)$  der reellen Variablen  $t$  {streng} monoton wachsend ist. Nach dem Monotoniesatz aus Abschnitt 4.2 und der Kettenregel aus Abschnitt 8.1 ist dies gleichbedeutend damit, dass für alle  $x \in D$ ,  $w \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$  und  $t \in \mathbb{R}$  mit  $x+tw \in D$  stets  $0 \leq \frac{d}{dt} w \cdot V(x+tw) = w \cdot DV(x+tw)w$  gilt {und nicht für alle  $t$  eines Intervalls positiver Länge Gleichheit eintritt}. Letzteres ist offensichtlich äquivalent zur positiven Semidefinitheit von  $DV(x)$  für alle  $x \in D$  {samt der in (II) angegebenen Zusatzbedingung}.  $\square$

**Satz (Konvexitätssatz für Funktionen mehrerer Variablen).** Sei  $D$  konvex und offen in  $\mathbb{R}^N$  und  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  sei auf  $D$  total differenzierbar. Dann sind (bei gleicher Interpretation der geschweiften Klammern wie im vorigen Satz) **folgende Aussagen äquivalent:**

- (I)  $f$  ist *{strikt} konvex* auf  $D$ .
- (II) Das **Gradientenfeld**  $\nabla f$  ist ein *{strikt} monoton*es **Vektorfeld** auf  $D$ .
- (III) Es gilt die **Stützfunktionsungleichung**

$$f(x) \geq f(x_0) + (x-x_0) \cdot \nabla f(x_0) \quad \text{für alle } x_0, x \in D$$

*{mit Gleichheit einzig für }  $x = x_0$  }.*

Falls sogar  $f''$  auf  $D$  existiert, so ist **außerdem äquivalent:**

- (IV) Für alle  $x \in D$  ist die **Hesse-Matrix**  $\mathbf{H}f(x) \in \mathbb{R}^{N \times N}$  **positiv semidefinit** *{und für keine Strecke }  $[a, b]$  **positiver Länge** in  $D$  gilt  $(b-a) \cdot \mathbf{H}f(x)(b-a) = 0$  für alle  $x \in [a, b]$  }.*

*Beweis.* Man beobachtet, dass die Bedingungen (I), (II), (III) für  $f$  in Bedingungen an die Hilfsfunktionen  $t \mapsto f(x+tw)$  einer reellen Variablen  $t$  mit festem  $x \in D$  und  $w \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$  übersetzt werden können: Tatsächlich sieht man anhand der Konvexitätsungleichung, dass (I) äquivalent zu *{strenger} Konvexität* all dieser Hilfsfunktionen ist. Die Bedingung (II) besagt, dass die Ableitungen  $\frac{d}{dt}f(x+tw) = w \cdot \nabla f(x+tw)$  aller Hilfsfunktionen *{streng} monoton wachsend* in  $t$  sind, und (III) bedeutet gerade, dass für alle Hilfsfunktionen die Stützfunktionsungleichung  $f(x+tw) \geq f(x+t_0w) + (t-t_0)w \cdot \nabla f(x_0+t_0w) = f(x+t_0w) + (t-t_0)\frac{d}{ds}\Big|_{s=t_0}f(x_0+sw)$  *{mit Gleichheit einzig für }  $t = t_0$  } gilt. In Anbetracht dieser Umformulierungen folgt die Äquivalenz der Bedingungen (I), (II), (III) durch Anwendung des Konvexitätssatzes aus Abschnitt 4.2 auf die Hilfsfunktionen.*

Falls  $f''$  existiert, liefert eine direkte Anwendung des vorausgehenden Monotoniesatzes auf das differenzierbare Gradientenfeld  $\nabla f$  außerdem die Äquivalenz von (II) und (IV).  $\square$

**Bemerkung.** Ähnlich können Konvexität und Monotonie auf einem allgemeinen normierten Raum  $\mathcal{X}$  (je nach Auffassungsweise mit oder ohne Skalarprodukt) charakterisiert werden.

ENDE DER ANALYSIS!



# Literaturverzeichnis

Die vorliegende Ausarbeitung basiert auf Vorlesungsskripten von C. SCHEVEN und K. STEFFEN sowie den folgenden Standard-Werken zur Analysis:

- [1] H. AMANN, J. ESCHER, *Analysis I* und *Analysis II*. Birkhäuser, 2006
- [2] O. FORSTER, *Analysis 1* und *Analysis 2*. Vieweg, 2011.
- [3] H. HEUSER, *Lehrbuch der Analysis*, Teile 1 und 2. Teubner, 2004.
- [4] K. KÖNIGSBERGER, *Analysis 1* und *Analysis 2*. Springer, 2004.
- [5] S.G. KRANTZ, H.R. PARKS, *The Implicit Function Theorem*, Birkhäuser, 2013
- [6] W. WALTER, *Analysis 1* und *Analysis 2*. Springer, 2002.