

## 4. Elementare Kombinatorik

# Rechenregeln für endliche Mengen

# Rechenregeln für endliche Mengen

- **Erinnerung:** für endliche Mengen  $M$  ist  $|M|$  die Anzahl der Elemente von  $M$ , auch

# Rechenregeln für endliche Mengen

- **Erinnerung:** für endliche Mengen  $M$  ist  $|M|$  die Anzahl der Elemente von  $M$ , auch **Kardinalität von  $M$**  genannt

# Rechenregeln für endliche Mengen

- **Erinnerung:** für endliche Mengen  $M$  ist  $|M|$  die Anzahl der Elemente von  $M$ , auch **Kardinalität von  $M$**  genannt

$$|M| = n \Leftrightarrow M \text{ gleichmächtig wie } [n] = \{1, \dots, n\}$$

# Rechenregeln für endliche Mengen

- **Erinnerung:** für endliche Mengen  $M$  ist  $|M|$  die Anzahl der Elemente von  $M$ , auch **Kardinalität von  $M$**  genannt

$$|M| = n \Leftrightarrow M \text{ gleichmächtig wie } [n] = \{1, \dots, n\} \Leftrightarrow \exists \text{ Bijektion } M \rightarrow [n]$$

# Rechenregeln für endliche Mengen

- **Erinnerung:** für endliche Mengen  $M$  ist  $|M|$  die Anzahl der Elemente von  $M$ , auch **Kardinalität von  $M$**  genannt

$$|M| = n \Leftrightarrow M \text{ gleichmächtig wie } [n] = \{1, \dots, n\} \Leftrightarrow \exists \text{ Bijektion } M \rightarrow [n]$$

- falls  $A \cap B = \emptyset$  dann gilt  $|A \cup B| = |A| + |B|$

# Rechenregeln für endliche Mengen

- **Erinnerung:** für endliche Mengen  $M$  ist  $|M|$  die Anzahl der Elemente von  $M$ , auch **Kardinalität von  $M$**  genannt  
 $|M| = n \Leftrightarrow M$  gleichmächtig wie  $[n] = \{1, \dots, n\} \Leftrightarrow \exists$  Bijektion  $M \rightarrow [n]$
- falls  $A \cap B = \emptyset$  dann gilt  $|A \cup B| = |A| + |B|$  und im Allgemeinen für paarweise disjunkte endliche Mengen  $A_1, \dots, A_k$  gilt die **Additionsregel**

$$\left| \bigcup_{i=1}^k A_i \right| = |A_1 \cup \dots \cup A_k|$$



# Rechenregeln für endliche Mengen

- **Erinnerung:** für endliche Mengen  $M$  ist  $|M|$  die Anzahl der Elemente von  $M$ , auch **Kardinalität von  $M$**  genannt  
 $|M| = n \Leftrightarrow M$  gleichmächtig wie  $[n] = \{1, \dots, n\} \Leftrightarrow \exists$  Bijektion  $M \rightarrow [n]$
- falls  $A \cap B = \emptyset$  dann gilt  $|A \cup B| = |A| + |B|$  und im Allgemeinen für paarweise disjunkte endliche Mengen  $A_1, \dots, A_k$  gilt die **Additionsregel**

$$\left| \bigcup_{i=1}^k A_i \right| = |A_1 \cup \dots \cup A_k| = |A_1| + \dots + |A_k|$$

# Rechenregeln für endliche Mengen

- **Erinnerung:** für endliche Mengen  $M$  ist  $|M|$  die Anzahl der Elemente von  $M$ , auch **Kardinalität von  $M$**  genannt

$$|M| = n \Leftrightarrow M \text{ gleichmächtig wie } [n] = \{1, \dots, n\} \Leftrightarrow \exists \text{ Bijektion } M \rightarrow [n]$$

- falls  $A \cap B = \emptyset$  dann gilt  $|A \cup B| = |A| + |B|$  und im Allgemeinen für paarweise disjunkte endliche Mengen  $A_1, \dots, A_k$  gilt die **Additionsregel**

$$\left| \bigcup_{i=1}^k A_i \right| = |A_1 \cup \dots \cup A_k| = |A_1| + \dots + |A_k| = \sum_{i=1}^k |A_i|.$$

# Rechenregeln für endliche Mengen

- **Erinnerung:** für endliche Mengen  $M$  ist  $|M|$  die Anzahl der Elemente von  $M$ , auch **Kardinalität von  $M$**  genannt  
 $|M| = n \Leftrightarrow M$  gleichmächtig wie  $[n] = \{1, \dots, n\} \Leftrightarrow \exists$  Bijektion  $M \rightarrow [n]$
- falls  $A \cap B = \emptyset$  dann gilt  $|A \cup B| = |A| + |B|$  und im Allgemeinen für paarweise disjunkte endliche Mengen  $A_1, \dots, A_k$  gilt die **Additionsregel**

$$\left| \bigcup_{i=1}^k A_i \right| = |A_1 \cup \dots \cup A_k| = |A_1| + \dots + |A_k| = \sum_{i=1}^k |A_i|.$$

Wieso? Beweis?

# Rechenregeln für endliche Mengen

- **Erinnerung:** für endliche Mengen  $M$  ist  $|M|$  die Anzahl der Elemente von  $M$ , auch **Kardinalität von  $M$**  genannt

$$|M| = n \Leftrightarrow M \text{ gleichmächtig wie } [n] = \{1, \dots, n\} \Leftrightarrow \exists \text{ Bijektion } M \rightarrow [n]$$

- falls  $A \cap B = \emptyset$  dann gilt  $|A \cup B| = |A| + |B|$  und im Allgemeinen für paarweise disjunkte endliche Mengen  $A_1, \dots, A_k$  gilt die **Additionsregel**

$$\left| \bigcup_{i=1}^k A_i \right| = |A_1 \cup \dots \cup A_k| = |A_1| + \dots + |A_k| = \sum_{i=1}^k |A_i|.$$

Wieso? Beweis?

klar ✓

# Rechenregeln für endliche Mengen

- **Erinnerung:** für endliche Mengen  $M$  ist  $|M|$  die Anzahl der Elemente von  $M$ , auch **Kardinalität von  $M$**  genannt

$$|M| = n \Leftrightarrow M \text{ gleichmächtig wie } [n] = \{1, \dots, n\} \Leftrightarrow \exists \text{ Bijektion } M \rightarrow [n]$$

- falls  $A \cap B = \emptyset$  dann gilt  $|A \cup B| = |A| + |B|$  und im Allgemeinen für paarweise disjunkte endliche Mengen  $A_1, \dots, A_k$  gilt die **Additionsregel**

$$\left| \bigcup_{i=1}^k A_i \right| = |A_1 \cup \dots \cup A_k| = |A_1| + \dots + |A_k| = \sum_{i=1}^k |A_i|.$$

Wieso? Beweis?

klar ✓

- für beliebige endliche Mengen  $A, B$  gilt  $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

# Rechenregeln für endliche Mengen

- **Erinnerung:** für endliche Mengen  $M$  ist  $|M|$  die Anzahl der Elemente von  $M$ , auch **Kardinalität von  $M$**  genannt

$$|M| = n \Leftrightarrow M \text{ gleichmächtig wie } [n] = \{1, \dots, n\} \Leftrightarrow \exists \text{ Bijektion } M \rightarrow [n]$$

- falls  $A \cap B = \emptyset$  dann gilt  $|A \cup B| = |A| + |B|$  und im Allgemeinen für paarweise disjunkte endliche Mengen  $A_1, \dots, A_k$  gilt die **Additionsregel**

$$\left| \bigcup_{i=1}^k A_i \right| = |A_1 \cup \dots \cup A_k| = |A_1| + \dots + |A_k| = \sum_{i=1}^k |A_i|.$$

Wieso? Beweis?

klar ✓

- für beliebige endliche Mengen  $A, B$  gilt  $|A \times B| = |A| \cdot |B|$  und im Allgemeinen für endliche Mengen  $A_1, \dots, A_k$  gilt die **Multiplikationsregel**

$$\left| \prod_{i=1}^k A_i \right| = |A_1 \times \dots \times A_k|$$

# Rechenregeln für endliche Mengen

- **Erinnerung:** für endliche Mengen  $M$  ist  $|M|$  die Anzahl der Elemente von  $M$ , auch **Kardinalität von  $M$**  genannt

$$|M| = n \Leftrightarrow M \text{ gleichmächtig wie } [n] = \{1, \dots, n\} \Leftrightarrow \exists \text{ Bijektion } M \rightarrow [n]$$

- falls  $A \cap B = \emptyset$  dann gilt  $|A \cup B| = |A| + |B|$  und im Allgemeinen für paarweise disjunkte endliche Mengen  $A_1, \dots, A_k$  gilt die **Additionsregel**

$$\left| \bigcup_{i=1}^k A_i \right| = |A_1 \cup \dots \cup A_k| = |A_1| + \dots + |A_k| = \sum_{i=1}^k |A_i|.$$

Wieso? Beweis?

klar ✓

- für beliebige endliche Mengen  $A, B$  gilt  $|A \times B| = |A| \cdot |B|$  und im Allgemeinen für endliche Mengen  $A_1, \dots, A_k$  gilt die **Multiplikationsregel**

$$\left| \prod_{i=1}^k A_i \right| = |A_1 \times \dots \times A_k| = |A_1| \cdot \dots \cdot |A_k|$$

# Rechenregeln für endliche Mengen

- **Erinnerung:** für endliche Mengen  $M$  ist  $|M|$  die Anzahl der Elemente von  $M$ , auch **Kardinalität von  $M$**  genannt

$$|M| = n \Leftrightarrow M \text{ gleichmächtig wie } [n] = \{1, \dots, n\} \Leftrightarrow \exists \text{ Bijektion } M \rightarrow [n]$$

- falls  $A \cap B = \emptyset$  dann gilt  $|A \cup B| = |A| + |B|$  und im Allgemeinen für paarweise disjunkte endliche Mengen  $A_1, \dots, A_k$  gilt die **Additionsregel**

$$\left| \bigcup_{i=1}^k A_i \right| = |A_1 \cup \dots \cup A_k| = |A_1| + \dots + |A_k| = \sum_{i=1}^k |A_i|.$$

Wieso? Beweis?

klar ✓

- für beliebige endliche Mengen  $A, B$  gilt  $|A \times B| = |A| \cdot |B|$  und im Allgemeinen für endliche Mengen  $A_1, \dots, A_k$  gilt die **Multiplikationsregel**

$$\left| \prod_{i=1}^k A_i \right| = |A_1 \times \dots \times A_k| = |A_1| \cdot \dots \cdot |A_k| = \prod_{i=1}^k |A_i|.$$



# Rechenregeln für endliche Mengen

- **Erinnerung:** für endliche Mengen  $M$  ist  $|M|$  die Anzahl der Elemente von  $M$ , auch **Kardinalität von  $M$**  genannt

$$|M| = n \Leftrightarrow M \text{ gleichmächtig wie } [n] = \{1, \dots, n\} \Leftrightarrow \exists \text{ Bijektion } M \rightarrow [n]$$

- falls  $A \cap B = \emptyset$  dann gilt  $|A \cup B| = |A| + |B|$  und im Allgemeinen für paarweise disjunkte endliche Mengen  $A_1, \dots, A_k$  gilt die **Additionsregel**

$$\left| \bigcup_{i=1}^k A_i \right| = |A_1 \cup \dots \cup A_k| = |A_1| + \dots + |A_k| = \sum_{i=1}^k |A_i|.$$

Wieso? Beweis?

klar ✓

- für beliebige endliche Mengen  $A, B$  gilt  $|A \times B| = |A| \cdot |B|$  und im Allgemeinen für endliche Mengen  $A_1, \dots, A_k$  gilt die **Multiplikationsregel**

$$\left| \prod_{i=1}^k A_i \right| = |A_1 \times \dots \times A_k| = |A_1| \cdot \dots \cdot |A_k| = \prod_{i=1}^k |A_i|.$$

Wieso? Beweis?

# Rechenregeln für endliche Mengen

- **Erinnerung:** für endliche Mengen  $M$  ist  $|M|$  die Anzahl der Elemente von  $M$ , auch **Kardinalität von  $M$**  genannt

$$|M| = n \Leftrightarrow M \text{ gleichmächtig wie } [n] = \{1, \dots, n\} \Leftrightarrow \exists \text{ Bijektion } M \rightarrow [n]$$

- falls  $A \cap B = \emptyset$  dann gilt  $|A \cup B| = |A| + |B|$  und im Allgemeinen für paarweise disjunkte endliche Mengen  $A_1, \dots, A_k$  gilt die **Additionsregel**

$$\left| \bigcup_{i=1}^k A_i \right| = |A_1 \cup \dots \cup A_k| = |A_1| + \dots + |A_k| = \sum_{i=1}^k |A_i|.$$

Wieso? Beweis?

klar ✓

- für beliebige endliche Mengen  $A, B$  gilt  $|A \times B| = |A| \cdot |B|$  und im Allgemeinen für endliche Mengen  $A_1, \dots, A_k$  gilt die **Multiplikationsregel**

$$\left| \prod_{i=1}^k A_i \right| = |A_1 \times \dots \times A_k| = |A_1| \cdot \dots \cdot |A_k| = \prod_{i=1}^k |A_i|.$$

Wieso? Beweis?

z. B. Induktion nach  $k$  und  $|A_k|$  ✓

# Rechenregeln für endliche Mengen

- **Erinnerung:** für endliche Mengen  $M$  ist  $|M|$  die Anzahl der Elemente von  $M$ , auch **Kardinalität von  $M$**  genannt

$$|M| = n \Leftrightarrow M \text{ gleichmächtig wie } [n] = \{1, \dots, n\} \Leftrightarrow \exists \text{ Bijektion } M \rightarrow [n]$$

- falls  $A \cap B = \emptyset$  dann gilt  $|A \cup B| = |A| + |B|$  und im Allgemeinen für paarweise disjunkte endliche Mengen  $A_1, \dots, A_k$  gilt die **Additionsregel**

$$\left| \bigcup_{i=1}^k A_i \right| = |A_1 \cup \dots \cup A_k| = |A_1| + \dots + |A_k| = \sum_{i=1}^k |A_i|.$$

Wieso? Beweis?

klar ✓

- für beliebige endliche Mengen  $A, B$  gilt  $|A \times B| = |A| \cdot |B|$  und im Allgemeinen für endliche Mengen  $A_1, \dots, A_k$  gilt die **Multiplikationsregel**

$$\left| \prod_{i=1}^k A_i \right| = |A_1 \times \dots \times A_k| = |A_1| \cdot \dots \cdot |A_k| = \prod_{i=1}^k |A_i|.$$

Wieso? Beweis?

z. B. Induktion nach  $k$  und  $|A_k|$  ✓

- $|A| = |B| \iff \exists \text{ Bijektion } A \rightarrow B$

**Gleichheitsregel**

# Geordnete Teilmengen/Tupel

## $k$ -Tupel von $n$ -elementigen Mengen

Für natürliche Zahlen  $n, k \in \mathbb{N}_0$  ist die Anzahl der  $k$ -Tupel einer  $n$ -elementigen Menge  $M$  gegeben durch

# Geordnete Teilmengen/Tupel

## $k$ -Tupel von $n$ -elementigen Mengen

Für natürliche Zahlen  $n, k \in \mathbb{N}_0$  ist die Anzahl der  $k$ -Tupel einer  $n$ -elementigen Menge  $M$  gegeben durch

$$|M^k|$$

# Geordnete Teilmengen/Tupel

## $k$ -Tupel von $n$ -elementigen Mengen

Für natürliche Zahlen  $n, k \in \mathbb{N}_0$  ist die Anzahl der  $k$ -Tupel einer  $n$ -elementigen Menge  $M$  gegeben durch

$$|M^k| \stackrel{\text{Multiplikationsregel}}{=} |M|^k$$

# Geordnete Teilmengen/Tupel

## $k$ -Tupel von $n$ -elementigen Mengen

Für natürliche Zahlen  $n, k \in \mathbb{N}_0$  ist die Anzahl der  $k$ -Tupel einer  $n$ -elementigen Menge  $M$  gegeben durch

$$|M^k| \stackrel{\text{Multiplikationsregel}}{=} |M|^k = n^k .$$

# Geordnete Teilmengen/Tupel

## $k$ -Tupel von $n$ -elementigen Mengen

Für natürliche Zahlen  $n, k \in \mathbb{N}_0$  ist die Anzahl der  $k$ -Tupel einer  $n$ -elementigen Menge  $M$  gegeben durch

$$|M^k| \stackrel{\text{Multiplikationsregel}}{=} |M|^k = n^k.$$

Für  $n = k = 0$  gilt  $0^0 = 1$ , gerechtfertigt durch den leeren 0-Tupel.



# Geordnete Teilmengen/Tupel

## $k$ -Tupel von $n$ -elementigen Mengen

Für natürliche Zahlen  $n, k \in \mathbb{N}_0$  ist die Anzahl der  $k$ -Tupel einer  $n$ -elementigen Menge  $M$  gegeben durch

$$|M^k| \stackrel{\text{Multiplikationsregel}}{=} |M|^k = n^k.$$

Für  $n = k = 0$  gilt  $0^0 = 1$ , gerechtfertigt durch den leeren 0-Tupel.

**Bsp.:** es gibt  $2^3 = 8$  verschiedene **binäre Tripel** (3-Tupel mit Elementen aus  $\{0, 1\}$ )  
 $(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)$

# Geordnete Teilmengen/Tupel

## $k$ -Tupel von $n$ -elementigen Mengen

Für natürliche Zahlen  $n, k \in \mathbb{N}_0$  ist die Anzahl der  $k$ -Tupel einer  $n$ -elementigen Menge  $M$  gegeben durch

$$|M^k| \stackrel{\text{Multiplikationsregel}}{=} |M|^k = n^k.$$

Für  $n = k = 0$  gilt  $0^0 = 1$ , gerechtfertigt durch den leeren 0-Tupel.

**Bsp.:** es gibt  $2^3 = 8$  verschiedene **binäre Tripel** (3-Tupel mit Elementen aus  $\{0, 1\}$ )  
 $(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)$

## $k$ -Tupel von $n$ -Mengen ohne Doppelungen/Wiederholungen

# Geordnete Teilmengen/Tupel

## $k$ -Tupel von $n$ -elementigen Mengen

Für natürliche Zahlen  $n, k \in \mathbb{N}_0$  ist die Anzahl der  $k$ -Tupel einer  $n$ -elementigen Menge  $M$  gegeben durch

$$|M^k| \stackrel{\text{Multiplikationsregel}}{=} |M|^k = n^k.$$

Für  $n = k = 0$  gilt  $0^0 = 1$ , gerechtfertigt durch den leeren 0-Tupel.

**Bsp.:** es gibt  $2^3 = 8$  verschiedene **binäre Tripel** (3-Tupel mit Elementen aus  $\{0, 1\}$ )  
 $(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)$

## $k$ -Tupel von $n$ -Mengen ohne Doppelungen/Wiederholungen

Für natürliche Zahlen  $n, k \in \mathbb{N}_0$  ist die Anzahl der  $k$ -Tupel einer  $n$ -elementigen Menge  $M$ , in denen kein Element doppelt vorkommt, gegeben durch

# Geordnete Teilmengen/Tupel

## $k$ -Tupel von $n$ -elementigen Mengen

Für natürliche Zahlen  $n, k \in \mathbb{N}_0$  ist die Anzahl der  $k$ -Tupel einer  $n$ -elementigen Menge  $M$  gegeben durch

$$|M^k| \stackrel{\text{Multiplikationsregel}}{=} |M|^k = n^k.$$

Für  $n = k = 0$  gilt  $0^0 = 1$ , gerechtfertigt durch den leeren 0-Tupel.

**Bsp.:** es gibt  $2^3 = 8$  verschiedene **binäre Tripel** (3-Tupel mit Elementen aus  $\{0, 1\}$ )  
 $(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)$

## $k$ -Tupel von $n$ -Mengen ohne Doppelungen/Wiederholungen

Für natürliche Zahlen  $n, k \in \mathbb{N}_0$  ist die Anzahl der  $k$ -Tupel einer  $n$ -elementigen Menge  $M$ , **in denen kein Element doppelt vorkommt**, gegeben durch

$$|M| \cdot (|M| - 1) \cdot \dots \cdot (|M| - (k - 1)) = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - (k - 1)) =: (n)_k.$$

# Geordnete Teilmengen/Tupel

## $k$ -Tupel von $n$ -elementigen Mengen

Für natürliche Zahlen  $n, k \in \mathbb{N}_0$  ist die Anzahl der  $k$ -Tupel einer  $n$ -elementigen Menge  $M$  gegeben durch

$$|M^k| \stackrel{\text{Multiplikationsregel}}{=} |M|^k = n^k.$$

Für  $n = k = 0$  gilt  $0^0 = 1$ , gerechtfertigt durch den leeren 0-Tupel.

**Bsp.:** es gibt  $2^3 = 8$  verschiedene **binäre Tripel** (3-Tupel mit Elementen aus  $\{0, 1\}$ )  
 $(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)$

## $k$ -Tupel von $n$ -Mengen ohne Doppelungen/Wiederholungen

Für natürliche Zahlen  $n, k \in \mathbb{N}_0$  ist die Anzahl der  $k$ -Tupel einer  $n$ -elementigen Menge  $M$ , in denen kein Element doppelt vorkommt, gegeben durch

$$|M| \cdot (|M| - 1) \cdot \dots \cdot (|M| - (k - 1)) = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - (k - 1)) =: (n)_k.$$

Für die **fallende Faktorielle**  $(n)_k$  schreibt man auch  $n^{\underline{k}}$  (z. B. im Skript).

# Geordnete Teilmengen/Tupel

## $k$ -Tupel von $n$ -elementigen Mengen

Für natürliche Zahlen  $n, k \in \mathbb{N}_0$  ist die Anzahl der  $k$ -Tupel einer  $n$ -elementigen Menge  $M$  gegeben durch

$$|M^k| \stackrel{\text{Multiplikationsregel}}{=} |M|^k = n^k.$$

Für  $n = k = 0$  gilt  $0^0 = 1$ , gerechtfertigt durch den leeren 0-Tupel.

**Bsp.:** es gibt  $2^3 = 8$  verschiedene **binäre Tripel** (3-Tupel mit Elementen aus  $\{0, 1\}$ )  
 $(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)$

## $k$ -Tupel von $n$ -Mengen ohne Doppelungen/Wiederholungen

Für natürliche Zahlen  $n, k \in \mathbb{N}_0$  ist die Anzahl der  $k$ -Tupel einer  $n$ -elementigen Menge  $M$ , in denen kein Element doppelt vorkommt, gegeben durch

$$|M| \cdot (|M| - 1) \cdot \dots \cdot (|M| - (k - 1)) = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - (k - 1)) =: (n)_k.$$

Für die **fallende Faktorielle**  $(n)_k$  schreibt man auch  $n^{\underline{k}}$  (z. B. im Skript).

- wegen des leeren Produkts ist  $(n)_0 = 1$  und tatsächlich ist das leere 0-Tupel das einzige Tupel, welches hier gezählt wird

# Geordnete Teilmengen/Tupel

## $k$ -Tupel von $n$ -elementigen Mengen

Für natürliche Zahlen  $n, k \in \mathbb{N}_0$  ist die Anzahl der  $k$ -Tupel einer  $n$ -elementigen Menge  $M$  gegeben durch

$$|M^k| \stackrel{\text{Multiplikationsregel}}{=} |M|^k = n^k.$$

Für  $n = k = 0$  gilt  $0^0 = 1$ , gerechtfertigt durch den leeren 0-Tupel.

**Bsp.:** es gibt  $2^3 = 8$  verschiedene **binäre Tripel** (3-Tupel mit Elementen aus  $\{0, 1\}$ )  
 $(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)$

## $k$ -Tupel von $n$ -Mengen ohne Doppelungen/Wiederholungen

Für natürliche Zahlen  $n, k \in \mathbb{N}_0$  ist die Anzahl der  $k$ -Tupel einer  $n$ -elementigen Menge  $M$ , in denen kein Element doppelt vorkommt, gegeben durch

$$|M| \cdot (|M| - 1) \cdot \dots \cdot (|M| - (k - 1)) = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - (k - 1)) =: (n)_k.$$

Für die **fallende Faktorielle**  $(n)_k$  schreibt man auch  $n^{\underline{k}}$  (z. B. im Skript).

- wegen des leeren Produkts ist  $(n)_0 = 1$  und tatsächlich ist das leere 0-Tupel das einzige Tupel, welches hier gezählt wird
- für  $n < k$  gilt  $(n)_k = 0$

# Geordnete Teilmengen/Tupel

## $k$ -Tupel von $n$ -elementigen Mengen

Für natürliche Zahlen  $n, k \in \mathbb{N}_0$  ist die Anzahl der  $k$ -Tupel einer  $n$ -elementigen Menge  $M$  gegeben durch

$$|M^k| \stackrel{\text{Multiplikationsregel}}{=} |M|^k = n^k.$$

Für  $n = k = 0$  gilt  $0^0 = 1$ , gerechtfertigt durch den leeren 0-Tupel.

**Bsp.:** es gibt  $2^3 = 8$  verschiedene **binäre Tripel** (3-Tupel mit Elementen aus  $\{0, 1\}$ )  
 $(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)$

## $k$ -Tupel von $n$ -Mengen ohne Doppelungen/Wiederholungen

Für natürliche Zahlen  $n, k \in \mathbb{N}_0$  ist die Anzahl der  $k$ -Tupel einer  $n$ -elementigen Menge  $M$ , **in denen kein Element doppelt vorkommt**, gegeben durch

$$|M| \cdot (|M| - 1) \cdot \dots \cdot (|M| - (k - 1)) = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - (k - 1)) =: (n)_k.$$

Für die **fallende Faktorielle**  $(n)_k$  schreibt man auch  $n^{\underline{k}}$  (z. B. im Skript).

- wegen des leeren Produkts ist  $(n)_0 = 1$  und tatsächlich ist das leere 0-Tupel das einzige Tupel, welches hier gezählt wird
- für  $n < k$  gilt  $(n)_k = 0$  und für  $n = k$  erhält man die Anzahl der Auflistungen



# Permutationen

# Permutationen

## Definition (Permutation)

Eine bijektive Abbildung  $\pi: M \rightarrow M$  auf einer (abzählbaren) Menge  $M$  heißt **Permutation**.

# Permutationen

## Definition (Permutation)

Eine bijektive Abbildung  $\pi: M \rightarrow M$  auf einer (abzählbaren) Menge  $M$  heißt **Permutation**.

Ist  $M$  eine endliche Menge  $\{m_1, \dots, m_n\}$ , wobei wir annehmen, dass die  $m_i$  paarweise verschieden sind, so kann man eine Permutation  $\pi: M \rightarrow M$  darstellen durch

$$\begin{pmatrix} m_1 & m_2 & \dots & m_n \\ \pi(m_1) & \pi(m_2) & \dots & \pi(m_n) \end{pmatrix}.$$

# Permutationen

## Definition (Permutation)

Eine bijektive Abbildung  $\pi: M \rightarrow M$  auf einer (abzählbaren) Menge  $M$  heißt **Permutation**.

Ist  $M$  eine endliche Menge  $\{m_1, \dots, m_n\}$ , wobei wir annehmen, dass die  $m_i$  paarweise verschieden sind, so kann man eine Permutation  $\pi: M \rightarrow M$  darstellen durch

$$\begin{pmatrix} m_1 & m_2 & \dots & m_n \\ \pi(m_1) & \pi(m_2) & \dots & \pi(m_n) \end{pmatrix}.$$

Falls  $M = [n]$ , dann schreiben wir auch abkürzend nur die „untere Zeile“  $(\pi(1), \dots, \pi(n))$  an Stelle von  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \dots & \pi(n) \end{pmatrix}$ .

# Permutationen

## Definition (Permutation)

Eine bijektive Abbildung  $\pi: M \rightarrow M$  auf einer (abzählbaren) Menge  $M$  heißt **Permutation**.

Ist  $M$  eine endliche Menge  $\{m_1, \dots, m_n\}$ , wobei wir annehmen, dass die  $m_i$  paarweise verschieden sind, so kann man eine Permutation  $\pi: M \rightarrow M$  darstellen durch

$$\begin{pmatrix} m_1 & m_2 & \dots & m_n \\ \pi(m_1) & \pi(m_2) & \dots & \pi(m_n) \end{pmatrix}.$$

Falls  $M = [n]$ , dann schreiben wir auch abkürzend nur die „untere Zeile“  $(\pi(1), \dots, \pi(n))$  an Stelle von  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \dots & \pi(n) \end{pmatrix}$ .

**Bsp.:**  $\pi(1) = 2$ ,  $\pi(2) = 4$ ,  $\pi(3) = 3$  und  $\pi(4) = 1$  definiert eine Permutation auf  $[4]$

# Permutationen

## Definition (Permutation)

Eine bijektive Abbildung  $\pi: M \rightarrow M$  auf einer (abzählbaren) Menge  $M$  heißt **Permutation**.

Ist  $M$  eine endliche Menge  $\{m_1, \dots, m_n\}$ , wobei wir annehmen, dass die  $m_i$  paarweise verschieden sind, so kann man eine Permutation  $\pi: M \rightarrow M$  darstellen durch

$$\begin{pmatrix} m_1 & m_2 & \dots & m_n \\ \pi(m_1) & \pi(m_2) & \dots & \pi(m_n) \end{pmatrix}.$$

Falls  $M = [n]$ , dann schreiben wir auch abkürzend nur die „untere Zeile“  $(\pi(1), \dots, \pi(n))$  an Stelle von  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \dots & \pi(n) \end{pmatrix}$ .

**Bsp.:**  $\pi(1) = 2$ ,  $\pi(2) = 4$ ,  $\pi(3) = 3$  und  $\pi(4) = 1$  definiert eine Permutation auf  $[4]$  und wird beschrieben durch:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad (2, 4, 3, 1).$$

# Fakultät

## Definition (Fakultät)

Für jede natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N}_0$  heißt

$$n! := \prod_{i=1}^n i$$

# Fakultät

## Definition (Fakultät)

Für jede natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N}_0$  heißt

$$n! := \prod_{i=1}^n i = (n)_n$$



# Fakultät

## Definition (Fakultät)

Für jede natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N}_0$  heißt

$$n! := \prod_{i=1}^n i = (n)_n$$

Fakultät von  $n$ .

# Fakultät

## Definition (Fakultät)

Für jede natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N}_0$  heißt

$$n! := \prod_{i=1}^n i = (n)_n$$

Fakultät von  $n$ . Insbesondere ist  $0! = 1$ .

# Fakultät

## Definition (Fakultät)

Für jede natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N}_0$  heißt

$$n! := \prod_{i=1}^n i = (n)_n$$

Fakultät von  $n$ . Insbesondere ist  $0! = 1$ .

## Bemerkungen

- Bsp.:  $1! = 1$ ,  $2! = 2$ ,  $3! =$

# Fakultät

## Definition (Fakultät)

Für jede natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N}_0$  heißt

$$n! := \prod_{i=1}^n i = (n)_n$$

Fakultät von  $n$ . Insbesondere ist  $0! = 1$ .

## Bemerkungen

- Bsp.:  $1! = 1$ ,  $2! = 2$ ,  $3! = 6$ ,

# Fakultät

## Definition (Fakultät)

Für jede natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N}_0$  heißt

$$n! := \prod_{i=1}^n i = (n)_n$$

Fakultät von  $n$ . Insbesondere ist  $0! = 1$ .

## Bemerkungen

- Bsp.:  $1! = 1$ ,  $2! = 2$ ,  $3! = 6$ ,  $4! =$

# Fakultät

## Definition (Fakultät)

Für jede natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N}_0$  heißt

$$n! := \prod_{i=1}^n i = (n)_n$$

Fakultät von  $n$ . Insbesondere ist  $0! = 1$ .

## Bemerkungen

- Bsp.:  $1! = 1$ ,  $2! = 2$ ,  $3! = 6$ ,  $4! = 24$ ,  $5! =$

# Fakultät

## Definition (Fakultät)

Für jede natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N}_0$  heißt

$$n! := \prod_{i=1}^n i = (n)_n$$

Fakultät von  $n$ . Insbesondere ist  $0! = 1$ .

## Bemerkungen

- Bsp.:  $1! = 1$ ,  $2! = 2$ ,  $3! = 6$ ,  $4! = 24$ ,  $5! = 120$

# Fakultät

## Definition (Fakultät)

Für jede natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N}_0$  heißt

$$n! := \prod_{i=1}^n i = (n)_n$$

Fakultät von  $n$ . Insbesondere ist  $0! = 1$ .

## Bemerkungen

- Bsp.:  $1! = 1$ ,  $2! = 2$ ,  $3! = 6$ ,  $4! = 24$ ,  $5! = 120$
- Fakultät ist schnell wachsende Funktion auf  $\mathbb{N}_0$ , z. B.  $70! > 10^{100}$



## Definition (Fakultät)

Für jede natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N}_0$  heißt

$$n! := \prod_{i=1}^n i = (n)_n$$

Fakultät von  $n$ . Insbesondere ist  $0! = 1$ .

## Bemerkungen

- Bsp.:  $1! = 1$ ,  $2! = 2$ ,  $3! = 6$ ,  $4! = 24$ ,  $5! = 120$
- Fakultät ist schnell wachsende Funktion auf  $\mathbb{N}_0$ , z. B.  $70! > 10^{100}$
- Anzahl Permutationen einer  $n$ -elementigen Menge  $M$   
= Anzahl Bijektion von  $M$  nach  $M$

## Definition (Fakultät)

Für jede natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N}_0$  heißt

$$n! := \prod_{i=1}^n i = (n)_n$$

Fakultät von  $n$ . Insbesondere ist  $0! = 1$ .

## Bemerkungen

- Bsp.:  $1! = 1$ ,  $2! = 2$ ,  $3! = 6$ ,  $4! = 24$ ,  $5! = 120$
- Fakultät ist schnell wachsende Funktion auf  $\mathbb{N}_0$ , z. B.  $70! > 10^{100}$
- Anzahl Permutationen einer  $n$ -elementigen Menge  $M$ 
  - = Anzahl Bijektion von  $M$  nach  $M$
  - = Anzahl der  $n$ -Tupel von  $M$  ohne Doppelungen

## Definition (Fakultät)

Für jede natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N}_0$  heißt

$$n! := \prod_{i=1}^n i = (n)_n$$

Fakultät von  $n$ . Insbesondere ist  $0! = 1$ .

## Bemerkungen

- Bsp.:  $1! = 1$ ,  $2! = 2$ ,  $3! = 6$ ,  $4! = 24$ ,  $5! = 120$
- Fakultät ist schnell wachsende Funktion auf  $\mathbb{N}_0$ , z. B.  $70! > 10^{100}$
- Anzahl Permutationen einer  $n$ -elementigen Menge  $M$ 
  - = Anzahl Bijektion von  $M$  nach  $M$
  - = Anzahl der  $n$ -Tupel von  $M$  ohne Doppelungen =  $(n)_n = n!$

## Definition (Fakultät)

Für jede natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N}_0$  heißt

$$n! := \prod_{i=1}^n i = (n)_n$$

Fakultät von  $n$ . Insbesondere ist  $0! = 1$ .

## Bemerkungen

- Bsp.:  $1! = 1$ ,  $2! = 2$ ,  $3! = 6$ ,  $4! = 24$ ,  $5! = 120$
- Fakultät ist schnell wachsende Funktion auf  $\mathbb{N}_0$ , z. B.  $70! > 10^{100}$
- Anzahl Permutationen einer  $n$ -elementigen Menge  $M$ 
  - = Anzahl Bijektion von  $M$  nach  $M$
  - = Anzahl der  $n$ -Tupel von  $M$  ohne Doppelungen =  $(n)_n = n!$
- $0! = 1$  entspricht der leeren Abbildung, die eine Bijektion auf  $\emptyset$  ist

# Ungeordnete Teilmengen

## $k$ -elementige Teilmengen $n$ -elementigen Mengen

Für natürliche Zahlen  $n, k \in \mathbb{N}_0$  mit  $n \geq k$  ist die Anzahl der  $k$ -elementigen Teilmengen einer  $n$ -elementigen Menge  $M$  gegeben durch

# Ungeordnete Teilmengen

## $k$ -elementige Teilmengen $n$ -elementigen Mengen

Für natürliche Zahlen  $n, k \in \mathbb{N}_0$  mit  $n \geq k$  ist die Anzahl der  $k$ -elementigen Teilmengen einer  $n$ -elementigen Menge  $M$  gegeben durch

$$|\{A \subseteq M : |A| = k\}| = \binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

# Ungeordnete Teilmengen

## $k$ -elementige Teilmengen $n$ -elementigen Mengen

Für natürliche Zahlen  $n, k \in \mathbb{N}_0$  mit  $n \geq k$  ist die Anzahl der  $k$ -elementigen Teilmengen einer  $n$ -elementigen Menge  $M$  gegeben durch

$$|\{A \subseteq M : |A| = k\}| = \binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Für  $k > n$  gibt es offensichtlich keine  $k$ -elementigen Teilmengen von  $M$ .

# Ungeordnete Teilmengen

## $k$ -elementige Teilmengen $n$ -elementigen Mengen

Für natürliche Zahlen  $n, k \in \mathbb{N}_0$  mit  $n \geq k$  ist die Anzahl der  $k$ -elementigen Teilmengen einer  $n$ -elementigen Menge  $M$  gegeben durch

$$|\{A \subseteq M : |A| = k\}| = \binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Für  $k > n$  gibt es offensichtlich keine  $k$ -elementigen Teilmengen von  $M$ .

Insbesondere  $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}_0$  und heißt **Binomialkoeffizient**.



# Ungeordnete Teilmengen

## $k$ -elementige Teilmengen $n$ -elementigen Mengen

Für natürliche Zahlen  $n, k \in \mathbb{N}_0$  mit  $n \geq k$  ist die Anzahl der  $k$ -elementigen Teilmengen einer  $n$ -elementigen Menge  $M$  gegeben durch

$$|\{A \subseteq M : |A| = k\}| = \binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Für  $k > n$  gibt es offensichtlich keine  $k$ -elementigen Teilmengen von  $M$ .

Insbesondere  $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}_0$  und heißt **Binomialkoeffizient**.

**Beweis:** Sei  $M$  eine  $n$ -elementige Menge und  $k \in \mathbb{N}_0$  mit  $n \geq k$ .

# Ungeordnete Teilmengen

## $k$ -elementige Teilmengen $n$ -elementigen Mengen

Für natürliche Zahlen  $n, k \in \mathbb{N}_0$  mit  $n \geq k$  ist die Anzahl der  $k$ -elementigen Teilmengen einer  $n$ -elementigen Menge  $M$  gegeben durch

$$|\{A \subseteq M : |A| = k\}| = \binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Für  $k > n$  gibt es offensichtlich keine  $k$ -elementigen Teilmengen von  $M$ .

Insbesondere  $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}_0$  und heißt **Binomialkoeffizient**.

**Beweis:** Sei  $M$  eine  $n$ -elementige Menge und  $k \in \mathbb{N}_0$  mit  $n \geq k$ .

- es gibt  $\binom{n}{k}$  geordnete  $k$ -Tupel ( $k$ -elementige Teilmengen) mit Elementen aus  $M$  ohne Wiederholungen

# Ungeordnete Teilmengen

## $k$ -elementige Teilmengen $n$ -elementigen Mengen

Für natürliche Zahlen  $n, k \in \mathbb{N}_0$  mit  $n \geq k$  ist die Anzahl der  $k$ -elementigen Teilmengen einer  $n$ -elementigen Menge  $M$  gegeben durch

$$|\{A \subseteq M : |A| = k\}| = \binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Für  $k > n$  gibt es offensichtlich keine  $k$ -elementigen Teilmengen von  $M$ .

Insbesondere  $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}_0$  und heißt **Binomialkoeffizient**.

**Beweis:** Sei  $M$  eine  $n$ -elementige Menge und  $k \in \mathbb{N}_0$  mit  $n \geq k$ .

- es gibt  $(n)_k$  geordnete  $k$ -Tupel ( $k$ -elementige Teilmengen) mit Elementen aus  $M$  ohne Wiederholungen und es gilt

$$(n)_k = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$$

# Ungeordnete Teilmengen

## $k$ -elementige Teilmengen $n$ -elementigen Mengen

Für natürliche Zahlen  $n, k \in \mathbb{N}_0$  mit  $n \geq k$  ist die Anzahl der  $k$ -elementigen Teilmengen einer  $n$ -elementigen Menge  $M$  gegeben durch

$$|\{A \subseteq M : |A| = k\}| = \binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Für  $k > n$  gibt es offensichtlich keine  $k$ -elementigen Teilmengen von  $M$ .

Insbesondere  $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}_0$  und heißt **Binomialkoeffizient**.

**Beweis:** Sei  $M$  eine  $n$ -elementige Menge und  $k \in \mathbb{N}_0$  mit  $n \geq k$ .

- es gibt  $(n)_k$  geordnete  $k$ -Tupel ( $k$ -elementige Teilmengen) mit Elementen aus  $M$  ohne Wiederholungen und es gilt

$$(n)_k = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

- hierbei zählen wir jede  $k$ -elementige Teilmenge  $A \subseteq M$  genau so oft, wie wir die Elemente von  $A$  anordnen können

# Ungeordnete Teilmengen

## $k$ -elementige Teilmengen $n$ -elementigen Mengen

Für natürliche Zahlen  $n, k \in \mathbb{N}_0$  mit  $n \geq k$  ist die Anzahl der  $k$ -elementigen Teilmengen einer  $n$ -elementigen Menge  $M$  gegeben durch

$$|\{A \subseteq M : |A| = k\}| = \binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Für  $k > n$  gibt es offensichtlich keine  $k$ -elementigen Teilmengen von  $M$ .

Insbesondere  $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}_0$  und heißt **Binomialkoeffizient**.

**Beweis:** Sei  $M$  eine  $n$ -elementige Menge und  $k \in \mathbb{N}_0$  mit  $n \geq k$ .

- es gibt  $(n)_k$  geordnete  $k$ -Tupel ( $k$ -elementige Teilmengen) mit Elementen aus  $M$  ohne Wiederholungen und es gilt

$$(n)_k = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

- hierbei zählen wir jede  $k$ -elementige Teilmenge  $A \subseteq M$  genau so oft, wie wir die Elemente von  $A$  anordnen können, also  $|A|!$  Mal

# Ungeordnete Teilmengen

## $k$ -elementige Teilmengen $n$ -elementigen Mengen

Für natürliche Zahlen  $n, k \in \mathbb{N}_0$  mit  $n \geq k$  ist die Anzahl der  $k$ -elementigen Teilmengen einer  $n$ -elementigen Menge  $M$  gegeben durch

$$|\{A \subseteq M : |A| = k\}| = \binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Für  $k > n$  gibt es offensichtlich keine  $k$ -elementigen Teilmengen von  $M$ .

Insbesondere  $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}_0$  und heißt **Binomialkoeffizient**.

**Beweis:** Sei  $M$  eine  $n$ -elementige Menge und  $k \in \mathbb{N}_0$  mit  $n \geq k$ .

- es gibt  $(n)_k$  geordnete  $k$ -Tupel ( $k$ -elementige Teilmengen) mit Elementen aus  $M$  ohne Wiederholungen und es gilt

$$(n)_k = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

- hierbei zählen wir jede  $k$ -elementige Teilmenge  $A \subseteq M$  genau so oft, wie wir die Elemente von  $A$  anordnen können, also  $|A|!$  Mal

$$\Rightarrow |\{A \subseteq M : |A| = k\}| = \frac{(n)_k}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$



# Rekursive Identität der Binomialkoeffizienten

## Satz

Für alle natürlichen Zahlen  $n, k \in \mathbb{N}$  mit  $n > k$  gilt

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

# Rekursive Identität der Binomialkoeffizienten

## Satz

Für alle natürlichen Zahlen  $n, k \in \mathbb{N}$  mit  $n > k$  gilt

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

1. **Beweis** (einsetzen und nachrechnen):



# Rekursive Identität der Binomialkoeffizienten

## Satz

Für alle natürlichen Zahlen  $n, k \in \mathbb{N}$  mit  $n > k$  gilt

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

1. **Beweis** (einsetzen und nachrechnen):

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} &= \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} \\ &= \frac{(n-k)(n-1)!}{k!(n-k)!} + \frac{k(n-1)!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{(n-k+k)(n-1)!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}. \end{aligned}$$

# Rekursive Identität der Binomialkoeffizienten

## Satz

Für alle natürlichen Zahlen  $n, k \in \mathbb{N}$  mit  $n > k$  gilt

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

1. **Beweis** (einsetzen und nachrechnen):

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} &= \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} \\ &= \frac{(n-k)(n-1)!}{k!(n-k)!} + \frac{k(n-1)!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{(n-k+k)(n-1)!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}. \end{aligned}$$



# Rekursive Identität der Binomialkoeffizienten

## Satz

Für alle natürlichen Zahlen  $n, k \in \mathbb{N}$  mit  $n > k \geq 1$  gilt

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

2. **Beweis** (kombinatorische Interpretation ausnutzen):

# Rekursive Identität der Binomialkoeffizienten

## Satz

Für alle natürlichen Zahlen  $n, k \in \mathbb{N}$  mit  $n > k \geq 1$  gilt

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

**2. Beweis** (kombinatorische Interpretation ausnutzen):

Sei  $M$  eine  $n$ -elementige Menge und  $x \in M$  (existiert wegen  $n \geq 2$ ).

# Rekursive Identität der Binomialkoeffizienten

## Satz

Für alle natürlichen Zahlen  $n, k \in \mathbb{N}$  mit  $n > k \geq 1$  gilt

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

**2. Beweis** (kombinatorische Interpretation ausnutzen):

Sei  $M$  eine  $n$ -elementige Menge und  $x \in M$  (existiert wegen  $n \geq 2$ ).

- die Menge der  $k$ -elementigen Teilmengen von  $M$  kann man aufspalten in die Mengen solcher Teilmengen,

# Rekursive Identität der Binomialkoeffizienten

## Satz

Für alle natürlichen Zahlen  $n, k \in \mathbb{N}$  mit  $n > k \geq 1$  gilt

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

**2. Beweis** (kombinatorische Interpretation ausnutzen):

Sei  $M$  eine  $n$ -elementige Menge und  $x \in M$  (existiert wegen  $n \geq 2$ ).

- die Menge der  $k$ -elementigen Teilmengen von  $M$  kann man aufspalten in die Mengen solcher Teilmengen,
  - die  $x$  nicht enthalten

# Rekursive Identität der Binomialkoeffizienten

## Satz

Für alle natürlichen Zahlen  $n, k \in \mathbb{N}$  mit  $n > k \geq 1$  gilt

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

**2. Beweis** (kombinatorische Interpretation ausnutzen):

Sei  $M$  eine  $n$ -elementige Menge und  $x \in M$  (existiert wegen  $n \geq 2$ ).

- die Menge der  $k$ -elementigen Teilmengen von  $M$  kann man aufspalten in die Mengen solcher Teilmengen,
  - die  $x$  nicht enthalten davon gibt es  $\binom{n-1}{k}$

# Rekursive Identität der Binomialkoeffizienten

## Satz

Für alle natürlichen Zahlen  $n, k \in \mathbb{N}$  mit  $n > k \geq 1$  gilt

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

**2. Beweis** (kombinatorische Interpretation ausnutzen):

Sei  $M$  eine  $n$ -elementige Menge und  $x \in M$  (existiert wegen  $n \geq 2$ ).

- die Menge der  $k$ -elementigen Teilmengen von  $M$  kann man aufspalten in die Mengen solcher Teilmengen,
  - die  $x$  nicht enthalten davon gibt es  $\binom{n-1}{k}$
  - die  $x$  enthalten



# Rekursive Identität der Binomialkoeffizienten

## Satz

Für alle natürlichen Zahlen  $n, k \in \mathbb{N}$  mit  $n > k \geq 1$  gilt

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

**2. Beweis** (kombinatorische Interpretation ausnutzen):

Sei  $M$  eine  $n$ -elementige Menge und  $x \in M$  (existiert wegen  $n \geq 2$ ).

- die Menge der  $k$ -elementigen Teilmengen von  $M$  kann man aufspalten in die Mengen solcher Teilmengen,
  - die  $x$  nicht enthalten davon gibt es  $\binom{n-1}{k}$
  - die  $x$  enthalten davon gibt es  $\binom{n-1}{k-1}$

# Rekursive Identität der Binomialkoeffizienten

## Satz

Für alle natürlichen Zahlen  $n, k \in \mathbb{N}$  mit  $n > k \geq 1$  gilt

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

**2. Beweis** (kombinatorische Interpretation ausnutzen):

Sei  $M$  eine  $n$ -elementige Menge und  $x \in M$  (existiert wegen  $n \geq 2$ ).

- die Menge der  $k$ -elementigen Teilmengen von  $M$  kann man aufspalten in die Mengen solcher Teilmengen,
  - die  $x$  nicht enthalten davon gibt es  $\binom{n-1}{k}$
  - die  $x$  enthalten davon gibt es  $\binom{n-1}{k-1}$

⇒

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$



# Rekursive Identität der Binomialkoeffizienten

## Satz

Für alle natürlichen Zahlen  $n, k \in \mathbb{N}$  mit  $n > k \geq 1$  gilt

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

**2. Beweis** (kombinatorische Interpretation ausnutzen):

Sei  $M$  eine  $n$ -elementige Menge und  $x \in M$  (existiert wegen  $n \geq 2$ ).

- die Menge der  $k$ -elementigen Teilmengen von  $M$  kann man aufspalten in die Mengen solcher Teilmengen,
  - die  $x$  nicht enthalten davon gibt es  $\binom{n-1}{k}$
  - die  $x$  enthalten davon gibt es  $\binom{n-1}{k-1}$

⇒

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

**Bemerkung:**

- rekursive Berechnung wegen vieler Doppelberechnungen nicht effizient

















# Binomischer Lehrsatz

## Satz (Binomischer Lehrsatz)

Seien  $x, y \in \mathbb{R}$ . Dann gilt für alle  $n \in \mathbb{N}_0$

$$(x + y)^n = \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} x^{n-\ell} y^{\ell}.$$

# Binomischer Lehrsatz

## Satz (Binomischer Lehrsatz)

Seien  $x, y \in \mathbb{R}$ . Dann gilt für alle  $n \in \mathbb{N}_0$

$$(x + y)^n = \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} x^{n-\ell} y^{\ell}.$$

### Konsequenzen:

- für  $x = y = 1$  folgt die Identität  $2^n = (1 + 1)^n = \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell}$

# Binomischer Lehrsatz

## Satz (Binomischer Lehrsatz)

Seien  $x, y \in \mathbb{R}$ . Dann gilt für alle  $n \in \mathbb{N}_0$

$$(x + y)^n = \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} x^{n-\ell} y^{\ell}.$$

### Konsequenzen:

- für  $x = y = 1$  folgt die Identität  $2^n = (1 + 1)^n = \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell}$
- für  $n = 2$  folgen die **binomischen Formeln**

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

# Binomischer Lehrsatz

## Satz (Binomischer Lehrsatz)

Seien  $x, y \in \mathbb{R}$ . Dann gilt für alle  $n \in \mathbb{N}_0$

$$(x + y)^n = \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} x^{n-\ell} y^{\ell}.$$

### Konsequenzen:

- für  $x = y = 1$  folgt die Identität  $2^n = (1 + 1)^n = \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell}$
- für  $n = 2$  folgen die **binomischen Formeln**

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \quad \text{und} \quad (x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

## Satz (Binomischer Lehrsatz)

Seien  $x, y \in \mathbb{R}$ . Dann gilt für alle  $n \in \mathbb{N}_0$

$$(x + y)^n = \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} x^{n-\ell} y^{\ell}.$$

### Konsequenzen:

- für  $x = y = 1$  folgt die Identität  $2^n = (1 + 1)^n = \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell}$
- für  $n = 2$  folgen die **binomischen Formeln**

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \quad \text{und} \quad (x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

- für  $n = 3$  gilt  $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ .

Beweis:  $(x + y)^n = \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} x^{n-l} y^l$

**Beweis** (Induktion nach  $n$ )

$$\text{Beweis: } (x + y)^n = \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} x^{n-l} y^l$$

**Beweis** (Induktion nach  $n$ )

- Induktionsanfang  $n = 0$ :



$$\text{Beweis: } (x + y)^n = \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} x^{n-l} y^l$$

**Beweis** (Induktion nach  $n$ )

- **Induktionsanfang**  $n = 0$ : klar, wegen  $(x + y)^0 = 1 = \binom{0}{0} x^0 y^0$



$$\text{Beweis: } (x + y)^n = \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} x^{n-l} y^l$$

**Beweis** (Induktion nach  $n$ )

- **Induktionsanfang**  $n = 0$ : klar, wegen  $(x + y)^0 = 1 = \binom{0}{0} x^0 y^0$
- **Induktionsschritt** von  $n$  nach  $n + 1$ :



$$\text{Beweis: } (x + y)^n = \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} x^{n-\ell} y^{\ell}$$

**Beweis** (Induktion nach  $n$ )

- **Induktionsanfang  $n = 0$ :** klar, wegen  $(x + y)^0 = 1 = \binom{0}{0} x^0 y^0$  ✓
- **Induktionsschritt von  $n$  nach  $n + 1$ :**

$$(x + y)^{n+1} \stackrel{\text{i.A.}}{=} (x + y) \cdot \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} x^{n-\ell} y^{\ell}$$

$$\text{Beweis: } (x + y)^n = \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} x^{n-\ell} y^{\ell}$$

**Beweis** (Induktion nach  $n$ )

- **Induktionsanfang  $n = 0$ :** klar, wegen  $(x + y)^0 = 1 = \binom{0}{0} x^0 y^0$  ✓
- **Induktionsschritt von  $n$  nach  $n + 1$ :**

$$(x + y)^{n+1} \stackrel{\text{i.A.}}{=} (x + y) \cdot \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} x^{n-\ell} y^{\ell}$$

Es gilt

$$\times \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} x^{n-\ell} y^{\ell} = \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} x^{n+1-\ell} y^{\ell}$$

$$\text{Beweis: } (x + y)^n = \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} x^{n-\ell} y^{\ell}$$

**Beweis** (Induktion nach  $n$ )

- **Induktionsanfang  $n = 0$ :** klar, wegen  $(x + y)^0 = 1 = \binom{0}{0} x^0 y^0$
- **Induktionsschritt von  $n$  nach  $n + 1$ :**

✓

$$(x + y)^{n+1} \stackrel{\text{i.A.}}{=} (x + y) \cdot \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} x^{n-\ell} y^{\ell}$$

Es gilt

$$x \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} x^{n-\ell} y^{\ell} = \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} x^{n+1-\ell} y^{\ell} = x^{n+1} + \sum_{\ell=1}^n \binom{n}{\ell} x^{n+1-\ell} y^{\ell}$$

$$\text{Beweis: } (x + y)^n = \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} x^{n-\ell} y^{\ell}$$

**Beweis** (Induktion nach  $n$ )

- **Induktionsanfang  $n = 0$ :** klar, wegen  $(x + y)^0 = 1 = \binom{0}{0} x^0 y^0$  ✓
- **Induktionsschritt von  $n$  nach  $n + 1$ :**

$$(x + y)^{n+1} \stackrel{\text{i.A.}}{=} (x + y) \cdot \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} x^{n-\ell} y^{\ell}$$

Es gilt

$$x \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} x^{n-\ell} y^{\ell} = \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} x^{n+1-\ell} y^{\ell} = x^{n+1} + \sum_{\ell=1}^n \binom{n}{\ell} x^{n+1-\ell} y^{\ell}$$

sowie

$$y \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} x^{n-\ell} y^{\ell} = \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} x^{n-\ell} y^{\ell+1}$$

$$\text{Beweis: } (x + y)^n = \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} x^{n-\ell} y^{\ell}$$

**Beweis** (Induktion nach  $n$ )

- **Induktionsanfang  $n = 0$ :** klar, wegen  $(x + y)^0 = 1 = \binom{0}{0} x^0 y^0$
- **Induktionsschritt von  $n$  nach  $n + 1$ :**

✓

$$(x + y)^{n+1} \stackrel{\text{i.A.}}{=} (x + y) \cdot \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} x^{n-\ell} y^{\ell}$$

Es gilt

$$x \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} x^{n-\ell} y^{\ell} = \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} x^{n+1-\ell} y^{\ell} = x^{n+1} + \sum_{\ell=1}^n \binom{n}{\ell} x^{n+1-\ell} y^{\ell}$$

sowie

$$y \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} x^{n-\ell} y^{\ell} = \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} x^{n-\ell} y^{\ell+1} = \sum_{\ell=1}^{n+1} \binom{n}{\ell-1} x^{n-(\ell-1)} y^{\ell}$$

$$\text{Beweis: } (x + y)^n = \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} x^{n-\ell} y^{\ell}$$

**Beweis** (Induktion nach  $n$ )

- **Induktionsanfang  $n = 0$ :** klar, wegen  $(x + y)^0 = 1 = \binom{0}{0} x^0 y^0$  ✓
- **Induktionsschritt von  $n$  nach  $n + 1$ :**

$$(x + y)^{n+1} \stackrel{\text{i.A.}}{=} (x + y) \cdot \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} x^{n-\ell} y^{\ell}$$

Es gilt

$$x \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} x^{n-\ell} y^{\ell} = \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} x^{n+1-\ell} y^{\ell} = x^{n+1} + \sum_{\ell=1}^n \binom{n}{\ell} x^{n+1-\ell} y^{\ell}$$

sowie

$$y \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} x^{n-\ell} y^{\ell} = \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} x^{n-\ell} y^{\ell+1} = \sum_{\ell=1}^{n+1} \binom{n}{\ell-1} x^{n-(\ell-1)} y^{\ell} = \sum_{\ell=1}^n \binom{n}{\ell-1} x^{n+1-\ell} y^{\ell} + y^{n+1}.$$



# Beweis: $(x + y)^n = \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} x^{n-\ell} y^\ell$

**Beweis** (Induktion nach  $n$ )

- **Induktionsanfang  $n = 0$ :** klar, wegen  $(x + y)^0 = 1 = \binom{0}{0} x^0 y^0$  ✓
- **Induktionsschritt von  $n$  nach  $n + 1$ :**

$$(x + y)^{n+1} \stackrel{\text{i.A.}}{=} (x + y) \cdot \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} x^{n-\ell} y^\ell$$

Es gilt

$$x \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} x^{n-\ell} y^\ell = \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} x^{n+1-\ell} y^\ell = x^{n+1} + \sum_{\ell=1}^n \binom{n}{\ell} x^{n+1-\ell} y^\ell$$

sowie

$$y \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} x^{n-\ell} y^\ell = \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} x^{n-\ell} y^{\ell+1} = \sum_{\ell=1}^{n+1} \binom{n}{\ell-1} x^{n-(\ell-1)} y^\ell = \sum_{\ell=1}^n \binom{n}{\ell-1} x^{n+1-\ell} y^\ell + y^{n+1}.$$

Mit  $\binom{n+1}{\ell} = \binom{n}{\ell} + \binom{n}{\ell-1}$  folgt also

$$\text{Beweis: } (x + y)^n = \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} x^{n-\ell} y^{\ell}$$

**Beweis** (Induktion nach  $n$ )

- **Induktionsanfang  $n = 0$ :** klar, wegen  $(x + y)^0 = 1 = \binom{0}{0} x^0 y^0$  ✓
- **Induktionsschritt von  $n$  nach  $n + 1$ :**

$$(x + y)^{n+1} \stackrel{\text{i.A.}}{=} (x + y) \cdot \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} x^{n-\ell} y^{\ell}$$

Es gilt

$$x \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} x^{n-\ell} y^{\ell} = \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} x^{n+1-\ell} y^{\ell} = x^{n+1} + \sum_{\ell=1}^n \binom{n}{\ell} x^{n+1-\ell} y^{\ell}$$

sowie

$$y \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} x^{n-\ell} y^{\ell} = \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} x^{n-\ell} y^{\ell+1} = \sum_{\ell=1}^{n+1} \binom{n}{\ell-1} x^{n-(\ell-1)} y^{\ell} = \sum_{\ell=1}^n \binom{n}{\ell-1} x^{n+1-\ell} y^{\ell} + y^{n+1}.$$

Mit  $\binom{n+1}{\ell} = \binom{n}{\ell} + \binom{n}{\ell-1}$  folgt also

$$(x + y)^{n+1} = \underbrace{\binom{n+1}{0} x^{n+1} y^0}_{=x^{n+1}} + \sum_{\ell=1}^n \binom{n+1}{\ell} x^{n+1-\ell} y^{\ell} + \underbrace{\binom{n+1}{n+1} x^0 y^{n+1}}_{=y^{n+1}}$$

$$\text{Beweis: } (x + y)^n = \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} x^{n-\ell} y^\ell$$

**Beweis** (Induktion nach  $n$ )

- **Induktionsanfang  $n = 0$ :** klar, wegen  $(x + y)^0 = 1 = \binom{0}{0} x^0 y^0$  ✓
- **Induktionsschritt von  $n$  nach  $n + 1$ :**

$$(x + y)^{n+1} \stackrel{\text{i.A.}}{=} (x + y) \cdot \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} x^{n-\ell} y^\ell$$

Es gilt

$$x \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} x^{n-\ell} y^\ell = \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} x^{n+1-\ell} y^\ell = x^{n+1} + \sum_{\ell=1}^n \binom{n}{\ell} x^{n+1-\ell} y^\ell$$

sowie

$$y \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} x^{n-\ell} y^\ell = \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} x^{n-\ell} y^{\ell+1} = \sum_{\ell=1}^{n+1} \binom{n}{\ell-1} x^{n-(\ell-1)} y^\ell = \sum_{\ell=1}^n \binom{n}{\ell-1} x^{n+1-\ell} y^\ell + y^{n+1}.$$

Mit  $\binom{n+1}{\ell} = \binom{n}{\ell} + \binom{n}{\ell-1}$  folgt also

$$(x + y)^{n+1} = \underbrace{\binom{n+1}{0} x^{n+1} y^0}_{=x^{n+1}} + \sum_{\ell=1}^n \binom{n+1}{\ell} x^{n+1-\ell} y^\ell + \underbrace{\binom{n+1}{n+1} x^0 y^{n+1}}_{=y^{n+1}} = \sum_{\ell=0}^{n+1} \binom{n+1}{\ell} x^{n+1-\ell} y^\ell$$

□

# Kugeln auf Gefäße aufteilen

## Partitionen einer natürlichen Zahl

Für natürliche Zahlen  $m \in \mathbb{N}_0$  und  $\ell \in \mathbb{N}$  gibt es genau

$$\binom{m + \ell - 1}{\ell - 1} = \binom{\ell + m - 1}{m}$$

Möglichkeiten, um  $m$  als Summe von  $\ell$  natürlichen Zahlen  $m_1, \dots, m_\ell \in \mathbb{N}_0$  darzustellen, d. h.  $|\{(m_1, \dots, m_\ell) \in \mathbb{N}_0^\ell : m_1 + \dots + m_\ell = m\}| = \binom{m + \ell - 1}{\ell - 1}$ .

# Kugeln auf Gefäße aufteilen

## Partitionen einer natürlichen Zahl

Für natürliche Zahlen  $m \in \mathbb{N}_0$  und  $\ell \in \mathbb{N}$  gibt es genau

$$\binom{m + \ell - 1}{\ell - 1} = \binom{\ell + m - 1}{m}$$

Möglichkeiten, um  $m$  als Summe von  $\ell$  natürlichen Zahlen  $m_1, \dots, m_\ell \in \mathbb{N}_0$  darzustellen, d. h.  $|\{(m_1, \dots, m_\ell) \in \mathbb{N}_0^\ell : m_1 + \dots + m_\ell = m\}| = \binom{m + \ell - 1}{\ell - 1}$ .

**Interpretation:** Verteile  $m$  ununterscheidbare Kugel auf  $\ell$  unterscheidbare Gefäße

# Kugeln auf Gefäße aufteilen

## Partitionen einer natürlichen Zahl

Für natürliche Zahlen  $m \in \mathbb{N}_0$  und  $\ell \in \mathbb{N}$  gibt es genau

$$\binom{m + \ell - 1}{\ell - 1} = \binom{\ell + m - 1}{m}$$

Möglichkeiten, um  $m$  als Summe von  $\ell$  natürlichen Zahlen  $m_1, \dots, m_\ell \in \mathbb{N}_0$  darzustellen, d. h.  $|\{(m_1, \dots, m_\ell) \in \mathbb{N}_0^\ell : m_1 + \dots + m_\ell = m\}| = \binom{m + \ell - 1}{\ell - 1}$ .

**Interpretation:** Verteile  $m$  ununterscheidbare Kugel auf  $\ell$  unterscheidbare Gefäße  
Gefäß  $i$  bekommt  $m_i$  Kugeln

# Kugeln auf Gefäße aufteilen

## Partitionen einer natürlichen Zahl

Für natürliche Zahlen  $m \in \mathbb{N}_0$  und  $\ell \in \mathbb{N}$  gibt es genau

$$\binom{m + \ell - 1}{\ell - 1} = \binom{\ell + m - 1}{m}$$

Möglichkeiten, um  $m$  als Summe von  $\ell$  natürlichen Zahlen  $m_1, \dots, m_\ell \in \mathbb{N}_0$  darzustellen, d. h.  $|\{(m_1, \dots, m_\ell) \in \mathbb{N}_0^\ell : m_1 + \dots + m_\ell = m\}| = \binom{m + \ell - 1}{\ell - 1}$ .

**Interpretation:** Verteile  $m$  ununterscheidbare Kugel auf  $\ell$  unterscheidbare Gefäße  
Gefäß  $i$  bekommt  $m_i$  Kugeln

**Beweis:** Betrachte  $m$  als Folge von  $m$  Einsen und für  $i = 1, \dots, \ell - 1$  „trenne“  $m_i$  von  $m_{i+1}$  durch das Einfügen einer Null.

# Kugeln auf Gefäße aufteilen

## Partitionen einer natürlichen Zahl

Für natürliche Zahlen  $m \in \mathbb{N}_0$  und  $\ell \in \mathbb{N}$  gibt es genau

$$\binom{m + \ell - 1}{\ell - 1} = \binom{\ell + m - 1}{m}$$

Möglichkeiten, um  $m$  als Summe von  $\ell$  natürlichen Zahlen  $m_1, \dots, m_\ell \in \mathbb{N}_0$  darzustellen, d. h.  $|\{(m_1, \dots, m_\ell) \in \mathbb{N}_0^\ell : m_1 + \dots + m_\ell = m\}| = \binom{m + \ell - 1}{\ell - 1}$ .

**Interpretation:** Verteile  $m$  ununterscheidbare Kugel auf  $\ell$  unterscheidbare Gefäße  
Gefäß  $i$  bekommt  $m_i$  Kugeln

**Beweis:** Betrachte  $m$  als Folge von  $m$  Einsen und für  $i = 1, \dots, \ell - 1$  „trenne“  $m_i$  von  $m_{i+1}$  durch das Einfügen einer Null. Z. B. für  $m = 6$  und  $\ell = 4$  kodiert

110111001

die Zerlegung



# Kugeln auf Gefäße aufteilen

## Partitionen einer natürlichen Zahl

Für natürliche Zahlen  $m \in \mathbb{N}_0$  und  $\ell \in \mathbb{N}$  gibt es genau

$$\binom{m + \ell - 1}{\ell - 1} = \binom{\ell + m - 1}{m}$$

Möglichkeiten, um  $m$  als Summe von  $\ell$  natürlichen Zahlen  $m_1, \dots, m_\ell \in \mathbb{N}_0$  darzustellen, d. h.  $|\{(m_1, \dots, m_\ell) \in \mathbb{N}_0^\ell : m_1 + \dots + m_\ell = m\}| = \binom{m + \ell - 1}{\ell - 1}$ .

**Interpretation:** Verteile  $m$  ununterscheidbare Kugel auf  $\ell$  unterscheidbare Gefäße  
Gefäß  $i$  bekommt  $m_i$  Kugeln

**Beweis:** Betrachte  $m$  als Folge von  $m$  Einsen und für  $i = 1, \dots, \ell - 1$  „trenne“  $m_i$  von  $m_{i+1}$  durch das Einfügen einer Null. Z. B. für  $m = 6$  und  $\ell = 4$  kodiert

110111001

die Zerlegung

$$m_1 = 2,$$

# Kugeln auf Gefäße aufteilen

## Partitionen einer natürlichen Zahl

Für natürliche Zahlen  $m \in \mathbb{N}_0$  und  $\ell \in \mathbb{N}$  gibt es genau

$$\binom{m + \ell - 1}{\ell - 1} = \binom{\ell + m - 1}{m}$$

Möglichkeiten, um  $m$  als Summe von  $\ell$  natürlichen Zahlen  $m_1, \dots, m_\ell \in \mathbb{N}_0$  darzustellen, d. h.  $|\{(m_1, \dots, m_\ell) \in \mathbb{N}_0^\ell : m_1 + \dots + m_\ell = m\}| = \binom{m + \ell - 1}{\ell - 1}$ .

**Interpretation:** Verteile  $m$  ununterscheidbare Kugel auf  $\ell$  unterscheidbare Gefäße  
Gefäß  $i$  bekommt  $m_i$  Kugeln

**Beweis:** Betrachte  $m$  als Folge von  $m$  Einsen und für  $i = 1, \dots, \ell - 1$  „trenne“  $m_i$  von  $m_{i+1}$  durch das Einfügen einer Null. Z. B. für  $m = 6$  und  $\ell = 4$  kodiert

110111001

die Zerlegung

$$m_1 = 2, \quad m_2 = 3,$$

# Kugeln auf Gefäße aufteilen

## Partitionen einer natürlichen Zahl

Für natürliche Zahlen  $m \in \mathbb{N}_0$  und  $\ell \in \mathbb{N}$  gibt es genau

$$\binom{m + \ell - 1}{\ell - 1} = \binom{\ell + m - 1}{m}$$

Möglichkeiten, um  $m$  als Summe von  $\ell$  natürlichen Zahlen  $m_1, \dots, m_\ell \in \mathbb{N}_0$  darzustellen, d. h.  $|\{(m_1, \dots, m_\ell) \in \mathbb{N}_0^\ell : m_1 + \dots + m_\ell = m\}| = \binom{m + \ell - 1}{\ell - 1}$ .

**Interpretation:** Verteile  $m$  ununterscheidbare Kugel auf  $\ell$  unterscheidbare Gefäße  
Gefäß  $i$  bekommt  $m_i$  Kugeln

**Beweis:** Betrachte  $m$  als Folge von  $m$  Einsen und für  $i = 1, \dots, \ell - 1$  „trenne“  $m_i$  von  $m_{i+1}$  durch das Einfügen einer Null. Z. B. für  $m = 6$  und  $\ell = 4$  kodiert

110111001

die Zerlegung

$$m_1 = 2, \quad m_2 = 3, \quad m_3 = 0$$

# Kugeln auf Gefäße aufteilen

## Partitionen einer natürlichen Zahl

Für natürliche Zahlen  $m \in \mathbb{N}_0$  und  $\ell \in \mathbb{N}$  gibt es genau

$$\binom{m + \ell - 1}{\ell - 1} = \binom{\ell + m - 1}{m}$$

Möglichkeiten, um  $m$  als Summe von  $\ell$  natürlichen Zahlen  $m_1, \dots, m_\ell \in \mathbb{N}_0$  darzustellen, d. h.  $|\{(m_1, \dots, m_\ell) \in \mathbb{N}_0^\ell : m_1 + \dots + m_\ell = m\}| = \binom{m + \ell - 1}{\ell - 1}$ .

**Interpretation:** Verteile  $m$  ununterscheidbare Kugel auf  $\ell$  unterscheidbare Gefäße  
Gefäß  $i$  bekommt  $m_i$  Kugeln

**Beweis:** Betrachte  $m$  als Folge von  $m$  Einsen und für  $i = 1, \dots, \ell - 1$  „trenne“  $m_i$  von  $m_{i+1}$  durch das Einfügen einer Null. Z. B. für  $m = 6$  und  $\ell = 4$  kodiert

110111001

die Zerlegung

$$m_1 = 2, \quad m_2 = 3, \quad m_3 = 0 \quad \text{und} \quad m_4 = 1.$$

# Kugeln auf Gefäße aufteilen

## Partitionen einer natürlichen Zahl

Für natürliche Zahlen  $m \in \mathbb{N}_0$  und  $\ell \in \mathbb{N}$  gibt es genau

$$\binom{m + \ell - 1}{\ell - 1} = \binom{\ell + m - 1}{m}$$

Möglichkeiten, um  $m$  als Summe von  $\ell$  natürlichen Zahlen  $m_1, \dots, m_\ell \in \mathbb{N}_0$  darzustellen, d. h.  $|\{(m_1, \dots, m_\ell) \in \mathbb{N}_0^\ell : m_1 + \dots + m_\ell = m\}| = \binom{m + \ell - 1}{\ell - 1}$ .

**Interpretation:** Verteile  $m$  ununterscheidbare Kugel auf  $\ell$  unterscheidbare Gefäße  
Gefäß  $i$  bekommt  $m_i$  Kugeln

**Beweis:** Betrachte  $m$  als Folge von  $m$  Einsen und für  $i = 1, \dots, \ell - 1$  „trenne“  $m_i$  von  $m_{i+1}$  durch das Einfügen einer Null. Z. B. für  $m = 6$  und  $\ell = 4$  kodiert

110111001

die Zerlegung

$$m_1 = 2, \quad m_2 = 3, \quad m_3 = 0 \quad \text{und} \quad m_4 = 1.$$

Tatsächlich definiert dies eine Bijektion zwischen den Zerlegungen von  $m$  und den 0-1-Folgen der Länge  $m + \ell - 1$  mit  $m$  Einsen.

# Kugeln auf Gefäße aufteilen

## Partitionen einer natürlichen Zahl

Für natürliche Zahlen  $m \in \mathbb{N}_0$  und  $\ell \in \mathbb{N}$  gibt es genau

$$\binom{m + \ell - 1}{\ell - 1} = \binom{\ell + m - 1}{m}$$

Möglichkeiten, um  $m$  als Summe von  $\ell$  natürlichen Zahlen  $m_1, \dots, m_\ell \in \mathbb{N}_0$  darzustellen, d. h.  $|\{(m_1, \dots, m_\ell) \in \mathbb{N}_0^\ell : m_1 + \dots + m_\ell = m\}| = \binom{m + \ell - 1}{\ell - 1}$ .

**Interpretation:** Verteile  $m$  ununterscheidbare Kugel auf  $\ell$  unterscheidbare Gefäße  
Gefäß  $i$  bekommt  $m_i$  Kugeln

**Beweis:** Betrachte  $m$  als Folge von  $m$  Einsen und für  $i = 1, \dots, \ell - 1$  „trenne“  $m_i$  von  $m_{i+1}$  durch das Einfügen einer Null. Z. B. für  $m = 6$  und  $\ell = 4$  kodiert

110111001

die Zerlegung

$$m_1 = 2, \quad m_2 = 3, \quad m_3 = 0 \quad \text{und} \quad m_4 = 1.$$

Tatsächlich definiert dies eine Bijektion zwischen den Zerlegungen von  $m$  und den 0-1-Folgen der Länge  $m + \ell - 1$  mit  $m$  Einsen. Eine solche 0-1-Folge ist bestimmt durch die Platzierung der Nullen und dafür gibt es  $\binom{m + \ell - 1}{\ell - 1}$  Möglichkeiten.  $\square$

# Anagramme

## Zeichenketten mit vorgegebener Buchstabenverteilung

Für natürliche Zahlen  $\ell \in \mathbb{N}$  und  $m_1, \dots, m_\ell \in \mathbb{N}_0$  und Buchstaben/Zeichen  $Z_1, \dots, Z_\ell$  gibt es genau

$$\frac{(\sum_{i=1}^{\ell} m_i)!}{\prod_{i=1}^{\ell} (m_i!)} =: \binom{m_1 + \dots + m_\ell}{m_1, \dots, m_\ell}$$

verschiedene Zeichenketten der Länge  $m := \sum_{i=1}^{\ell} m_i$ , für  $i = 1, \dots, \ell$  jeweils  $m_i$ -Mal das Zeichen  $Z_i$  enthalten.

Insbesondere  $\binom{m_1 + \dots + m_\ell}{m_1, \dots, m_\ell} \in \mathbb{N}_0$  und heißt **Multinomialkoeffizient**.

# Anagramme

## Zeichenketten mit vorgegebener Buchstabenverteilung

Für natürliche Zahlen  $\ell \in \mathbb{N}$  und  $m_1, \dots, m_\ell \in \mathbb{N}_0$  und Buchstaben/Zeichen  $Z_1, \dots, Z_\ell$  gibt es genau

$$\frac{(\sum_{i=1}^{\ell} m_i)!}{\prod_{i=1}^{\ell} (m_i!)} =: \binom{m_1 + \dots + m_\ell}{m_1, \dots, m_\ell}$$

verschiedene Zeichenketten der Länge  $m := \sum_{i=1}^{\ell} m_i$ , für  $i = 1, \dots, \ell$  jeweils  $m_i$ -Mal das Zeichen  $Z_i$  enthalten.

Insbesondere  $\binom{m_1 + \dots + m_\ell}{m_1, \dots, m_\ell} \in \mathbb{N}_0$  und heißt **Multinomialkoeffizient**.

### Bemerkungen:

- Wörter, die aus einem Wort durch Vertauschung/Permutation der Buchstaben entstehen, nennt man **Anagramme**,



# Anagramme

## Zeichenketten mit vorgegebener Buchstabenverteilung

Für natürliche Zahlen  $\ell \in \mathbb{N}$  und  $m_1, \dots, m_\ell \in \mathbb{N}_0$  und Buchstaben/Zeichen  $Z_1, \dots, Z_\ell$  gibt es genau

$$\frac{(\sum_{i=1}^{\ell} m_i)!}{\prod_{i=1}^{\ell} (m_i!)} =: \binom{m_1 + \dots + m_\ell}{m_1, \dots, m_\ell}$$

verschiedene Zeichenketten der Länge  $m := \sum_{i=1}^{\ell} m_i$ , für  $i = 1, \dots, \ell$  jeweils  $m_i$ -Mal das Zeichen  $Z_i$  enthalten.

Insbesondere  $\binom{m_1 + \dots + m_\ell}{m_1, \dots, m_\ell} \in \mathbb{N}_0$  und heißt **Multinomialkoeffizient**.

### Bemerkungen:

- Wörter, die aus einem Wort durch Vertauschung/Permutation der Buchstaben entstehen, nennt man **Anagramme**, z. B.

AMPEL      LAMPE      PALME

# Anagramme

## Zeichenketten mit vorgegebener Buchstabenverteilung

Für natürliche Zahlen  $\ell \in \mathbb{N}$  und  $m_1, \dots, m_\ell \in \mathbb{N}_0$  und Buchstaben/Zeichen  $Z_1, \dots, Z_\ell$  gibt es genau

$$\frac{(\sum_{i=1}^{\ell} m_i)!}{\prod_{i=1}^{\ell} (m_i!)} =: \binom{m_1 + \dots + m_\ell}{m_1, \dots, m_\ell}$$

verschiedene Zeichenketten der Länge  $m := \sum_{i=1}^{\ell} m_i$ , für  $i = 1, \dots, \ell$  jeweils  $m_i$ -Mal das Zeichen  $Z_i$  enthalten.

Insbesondere  $\binom{m_1 + \dots + m_\ell}{m_1, \dots, m_\ell} \in \mathbb{N}_0$  und heißt **Multinomialkoeffizient**.

### Bemerkungen:

- Wörter, die aus einem Wort durch Vertauschung/Permutation der Buchstaben entstehen, nennt man **Anagramme**, z. B.

AMPEL      LAMPE      PALME      oder      ERLE      LEER

# Anagramme

## Zeichenketten mit vorgegebener Buchstabenverteilung

Für natürliche Zahlen  $\ell \in \mathbb{N}$  und  $m_1, \dots, m_\ell \in \mathbb{N}_0$  und Buchstaben/Zeichen  $Z_1, \dots, Z_\ell$  gibt es genau

$$\frac{(\sum_{i=1}^{\ell} m_i)!}{\prod_{i=1}^{\ell} (m_i!)} =: \binom{m_1 + \dots + m_\ell}{m_1, \dots, m_\ell}$$

verschiedene Zeichenketten der Länge  $m := \sum_{i=1}^{\ell} m_i$ , für  $i = 1, \dots, \ell$  jeweils  $m_i$ -Mal das Zeichen  $Z_i$  enthalten.

Insbesondere  $\binom{m_1 + \dots + m_\ell}{m_1, \dots, m_\ell} \in \mathbb{N}_0$  und heißt **Multinomialkoeffizient**.

### Bemerkungen:

- Wörter, die aus einem Wort durch Vertauschung/Permutation der Buchstaben entstehen, nennt man **Anagramme**, z. B.  
AMPEL      LAMPE      PALME      oder      ERLE      LEER
- in dem Problem oben müssen die Wörter nicht unbedingt Sinn ergeben

# Anagramme

## Zeichenketten mit vorgegebener Buchstabenverteilung

Für natürliche Zahlen  $\ell \in \mathbb{N}$  und  $m_1, \dots, m_\ell \in \mathbb{N}_0$  und Buchstaben/Zeichen  $Z_1, \dots, Z_\ell$  gibt es genau

$$\frac{(\sum_{i=1}^{\ell} m_i)!}{\prod_{i=1}^{\ell} (m_i!)} =: \binom{m_1 + \dots + m_\ell}{m_1, \dots, m_\ell}$$

verschiedene Zeichenketten der Länge  $m := \sum_{i=1}^{\ell} m_i$ , für  $i = 1, \dots, \ell$  jeweils  $m_i$ -Mal das Zeichen  $Z_i$  enthalten.

Insbesondere  $\binom{m_1 + \dots + m_\ell}{m_1, \dots, m_\ell} \in \mathbb{N}_0$  und heißt **Multinomialkoeffizient**.

### Bemerkungen:

- Wörter, die aus einem Wort durch Vertauschung/Permutation der Buchstaben entstehen, nennt man **Anagramme**, z. B.  
AMPEL      LAMPE      PALME      oder      ERLE      LEER
- in dem Problem oben müssen die Wörter nicht unbedingt Sinn ergeben
- für  $m_1 = \dots = m_\ell = 1$  ergibt jede Permutation ein anderes Anagramm

# Anagramme

## Zeichenketten mit vorgegebener Buchstabenverteilung

Für natürliche Zahlen  $\ell \in \mathbb{N}$  und  $m_1, \dots, m_\ell \in \mathbb{N}_0$  und Buchstaben/Zeichen  $Z_1, \dots, Z_\ell$  gibt es genau

$$\frac{(\sum_{i=1}^{\ell} m_i)!}{\prod_{i=1}^{\ell} (m_i!)} =: \binom{m_1 + \dots + m_\ell}{m_1, \dots, m_\ell}$$

verschiedene Zeichenketten der Länge  $m := \sum_{i=1}^{\ell} m_i$ , für  $i = 1, \dots, \ell$  jeweils  $m_i$ -Mal das Zeichen  $Z_i$  enthalten.

Insbesondere  $\binom{m_1 + \dots + m_\ell}{m_1, \dots, m_\ell} \in \mathbb{N}_0$  und heißt **Multinomialkoeffizient**.

## Bemerkungen:

- Wörter, die aus einem Wort durch Vertauschung/Permutation der Buchstaben entstehen, nennt man **Anagramme**, z. B.  
AMPEL      LAMPE      PALME      oder      ERLE      LEER
- in dem Problem oben müssen die Wörter nicht unbedingt Sinn ergeben
- für  $m_1 = \dots = m_\ell = 1$  ergibt jede Permutation ein anderes Anagramm

→  $\ell!$  „Anagramme“

# Anagramme – Beweis

## Zeichenketten mit vorgegebener Buchstabenverteilung

Für natürliche Zahlen  $\ell \in \mathbb{N}$  und  $m_1, \dots, m_\ell \in \mathbb{N}_0$  und Buchstaben/Zeichen  $Z_1, \dots, Z_\ell$  gibt es genau

$$\frac{(\sum_{i=1}^{\ell} m_i)!}{\prod_{i=1}^{\ell} (m_i!)} = \binom{m_1 + \dots + m_\ell}{m_1, \dots, m_\ell}$$

verschiedene Zeichenketten der Länge  $m := \sum_{i=1}^{\ell} m_i$ , für  $i = 1, \dots, \ell$  jeweils  $m_i$ -Mal das Zeichen  $Z_i$  enthalten.

## Beweis

# Anagramme – Beweis

## Zeichenketten mit vorgegebener Buchstabenverteilung

Für natürliche Zahlen  $\ell \in \mathbb{N}$  und  $m_1, \dots, m_\ell \in \mathbb{N}_0$  und Buchstaben/Zeichen  $Z_1, \dots, Z_\ell$  gibt es genau

$$\frac{(\sum_{i=1}^{\ell} m_i)!}{\prod_{i=1}^{\ell} (m_i!)} = \binom{m_1 + \dots + m_\ell}{m_1, \dots, m_\ell}$$

verschiedene Zeichenketten der Länge  $m := \sum_{i=1}^{\ell} m_i$ , für  $i = 1, \dots, \ell$  jeweils  $m_i$ -Mal das Zeichen  $Z_i$  enthalten.

### Beweis

- ausgehend von der Zeichenkette beginnend mit  $m_1$  Zeichen  $Z_1$ , gefolgt von  $m_2$  Zeichen  $Z_2$ , hinzu  $m_\ell$  Zeichen  $Z_\ell$ , gibt es  $(\sum_{i=1}^{\ell} m_i)!$  Permutationen dieser Zeichenkette

# Anagramme – Beweis

## Zeichenketten mit vorgegebener Buchstabenverteilung

Für natürliche Zahlen  $\ell \in \mathbb{N}$  und  $m_1, \dots, m_\ell \in \mathbb{N}_0$  und Buchstaben/Zeichen  $Z_1, \dots, Z_\ell$  gibt es genau

$$\frac{(\sum_{i=1}^{\ell} m_i)!}{\prod_{i=1}^{\ell} (m_i!)} = \binom{m_1 + \dots + m_\ell}{m_1, \dots, m_\ell}$$

verschiedene Zeichenketten der Länge  $m := \sum_{i=1}^{\ell} m_i$ , für  $i = 1, \dots, \ell$  jeweils  $m_i$ -Mal das Zeichen  $Z_i$  enthalten.

## Beweis

- ausgehend von der Zeichenkette beginnend mit  $m_1$  Zeichen  $Z_1$ , gefolgt von  $m_2$  Zeichen  $Z_2$ , hinzu  $m_\ell$  Zeichen  $Z_\ell$ , gibt es  $(\sum_{i=1}^{\ell} m_i)!$  Permutationen dieser Zeichenkette
- allerdings ergeben Permutationen die gleiche Zeichenkette, wenn sie jeweils nur Zeichen vom gleich Typ vertauschen



# Anagramme – Beweis

## Zeichenketten mit vorgegebener Buchstabenverteilung

Für natürliche Zahlen  $\ell \in \mathbb{N}$  und  $m_1, \dots, m_\ell \in \mathbb{N}_0$  und Buchstaben/Zeichen  $Z_1, \dots, Z_\ell$  gibt es genau

$$\frac{(\sum_{i=1}^{\ell} m_i)!}{\prod_{i=1}^{\ell} (m_i!)} = \binom{m_1 + \dots + m_\ell}{m_1, \dots, m_\ell}$$

verschiedene Zeichenketten der Länge  $m := \sum_{i=1}^{\ell} m_i$ , für  $i = 1, \dots, \ell$  jeweils  $m_i$ -Mal das Zeichen  $Z_i$  enthalten.

## Beweis

- ausgehend von der Zeichenkette beginnend mit  $m_1$  Zeichen  $Z_1$ , gefolgt von  $m_2$  Zeichen  $Z_2$ , hinzu  $m_\ell$  Zeichen  $Z_\ell$ , gibt es  $(\sum_{i=1}^{\ell} m_i)!$  Permutationen dieser Zeichenkette
- allerdings ergeben Permutationen die gleiche Zeichenkette, wenn sie jeweils nur Zeichen vom gleich Typ vertauschen
- so gibt es für jede Permutation genau  $\prod_{i=1}^{\ell} (m_i!)$  Permutationen, die die gleiche Zeichenkette erzeugen (unabhängig kann man jeweils auf  $m_i!$  Weisen die Zeichen vom Typ  $Z_i$  vertauschen)

# Anagramme – Beweis

## Zeichenketten mit vorgegebener Buchstabenverteilung

Für natürliche Zahlen  $\ell \in \mathbb{N}$  und  $m_1, \dots, m_\ell \in \mathbb{N}_0$  und Buchstaben/Zeichen  $Z_1, \dots, Z_\ell$  gibt es genau

$$\frac{(\sum_{i=1}^{\ell} m_i)!}{\prod_{i=1}^{\ell} (m_i!)} = \binom{m_1 + \dots + m_\ell}{m_1, \dots, m_\ell}$$

verschiedene Zeichenketten der Länge  $m := \sum_{i=1}^{\ell} m_i$ , für  $i = 1, \dots, \ell$  jeweils  $m_i$ -Mal das Zeichen  $Z_i$  enthalten.

## Beweis

- ausgehend von der Zeichenkette beginnend mit  $m_1$  Zeichen  $Z_1$ , gefolgt von  $m_2$  Zeichen  $Z_2$ , hinzu  $m_\ell$  Zeichen  $Z_\ell$ , gibt es  $(\sum_{i=1}^{\ell} m_i)!$  Permutationen dieser Zeichenkette
- allerdings ergeben Permutationen die gleiche Zeichenkette, wenn sie jeweils nur Zeichen vom gleich Typ vertauschen
- so gibt es für jede Permutation genau  $\prod_{i=1}^{\ell} (m_i!)$  Permutationen, die die gleiche Zeichenkette erzeugen (unabhängig kann man jeweils auf  $m_i!$  Weisen die Zeichen vom Typ  $Z_1$  vertauschen)
- es gibt also nur  $(\sum_{i=1}^{\ell} m_i)! / \prod_{i=1}^{\ell} (m_i!)$  Permutationen, die unterschiedliche Zeichenketten erzeugen □

# Multinomialssatz

- für  $\ell = 2$  reduzieren **Multinomialkoeffizienten** zu Binomialkoeffizienten

# Multinomialssatz

- für  $\ell = 2$  reduzieren **Multinomialkoeffizienten** zu Binomialkoeffizienten

$$\binom{m_1 + m_2}{m_1} = \frac{(m_1 + m_2)!}{m_1! m_2!}$$

# Multinomialformel

- für  $\ell = 2$  reduzieren **Multinomialkoeffizienten** zu Binomialkoeffizienten

$$\binom{m_1 + m_2}{m_1} = \frac{(m_1 + m_2)!}{m_1! m_2!} = \binom{m_1 + m_2}{m_1, m_2}$$

# Multinomialssatz

- für  $\ell = 2$  reduzieren **Multinomialkoeffizienten** zu Binomialkoeffizienten

$$\binom{m_1 + m_2}{m_1} = \frac{(m_1 + m_2)!}{m_1! m_2!} = \binom{m_1 + m_2}{m_1, m_2} = \binom{m_1 + m_2}{m_2}$$

# Multinomialssatz

- für  $\ell = 2$  reduzieren **Multinomialkoeffizienten** zu Binomialkoeffizienten

$$\binom{m_1 + m_2}{m_1} = \frac{(m_1 + m_2)!}{m_1! m_2!} = \binom{m_1 + m_2}{m_1, m_2} = \binom{m_1 + m_2}{m_2}$$

- der Multinomialssatz erweitert dementsprechend den binomischen Lehrsatz

# Multinomialsatz

- für  $\ell = 2$  reduzieren **Multinomialkoeffizienten** zu Binomialkoeffizienten

$$\binom{m_1 + m_2}{m_1} = \frac{(m_1 + m_2)!}{m_1! m_2!} = \binom{m_1 + m_2}{m_1, m_2} = \binom{m_1 + m_2}{m_2}$$

- der Multinomialsatz erweitert dementsprechend den binomischen Lehrsatz

## Satz (Multinomialsatz)

Seien  $\ell \in \mathbb{N}_0$  und  $x_1, \dots, x_\ell \in \mathbb{R}$ . Dann gilt für alle  $n \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} (x_1 + \dots + x_\ell)^n &= \left( \sum_{i=1}^{\ell} x_i \right)^n = \sum_{n_1 + \dots + n_\ell = n} \binom{n}{n_1, \dots, n_\ell} \prod_{i=1}^{\ell} x_i^{n_i} \\ &= \sum_{n_1 + \dots + n_\ell = n} \binom{n}{n_1, \dots, n_\ell} x_1^{n_1} \cdot \dots \cdot x_\ell^{n_\ell}, \end{aligned}$$

wobei die Summe über alle  $\ell$ -Tupel  $(n_1, \dots, n_\ell) \in \mathbb{N}_0^\ell$  mit  $\sum_{i=1}^{\ell} n_i = n$  läuft.



# Multinomialsatz – Beweis

## Satz (Multinomialsatz)

Seien  $\ell \in \mathbb{N}_0$  und  $x_1, \dots, x_\ell \in \mathbb{R}$ . Dann gilt für alle  $n \in \mathbb{N}_0$

$$(x_1 + \dots + x_\ell)^n = \sum_{n_1 + \dots + n_\ell = n} \binom{n}{n_1, \dots, n_\ell} x_1^{n_1} \cdot \dots \cdot x_\ell^{n_\ell} .$$

# Multinomialsatz – Beweis

## Satz (Multinomialsatz)

Seien  $\ell \in \mathbb{N}_0$  und  $x_1, \dots, x_\ell \in \mathbb{R}$ . Dann gilt für alle  $n \in \mathbb{N}_0$

$$(x_1 + \dots + x_\ell)^n = \sum_{n_1 + \dots + n_\ell = n} \binom{n}{n_1, \dots, n_\ell} x_1^{n_1} \cdot \dots \cdot x_\ell^{n_\ell} .$$

**Beweis:** Wir können

$$(x_1 + \dots + x_\ell)^n = \underbrace{(x_1 + \dots + x_\ell) \cdot \dots \cdot (x_1 + \dots + x_\ell)}_{n \text{ Faktoren}}$$

durch Ausmultiplizieren berechnen.

# Multinomialsatz – Beweis

## Satz (Multinomialsatz)

Seien  $\ell \in \mathbb{N}_0$  und  $x_1, \dots, x_\ell \in \mathbb{R}$ . Dann gilt für alle  $n \in \mathbb{N}_0$

$$(x_1 + \dots + x_\ell)^n = \sum_{n_1 + \dots + n_\ell = n} \binom{n}{n_1, \dots, n_\ell} x_1^{n_1} \cdot \dots \cdot x_\ell^{n_\ell} .$$

**Beweis:** Wir können

$$(x_1 + \dots + x_\ell)^n = \underbrace{(x_1 + \dots + x_\ell) \cdot \dots \cdot (x_1 + \dots + x_\ell)}_{n \text{ Faktoren}}$$

durch Ausmultiplizieren berechnen. Für  $n_1, \dots, n_\ell \in \mathbb{N}_0$  mit  $n_1 + \dots + n_\ell = n$  zählen wir, wie oft das Produkt  $x_1^{n_1} \cdot \dots \cdot x_\ell^{n_\ell}$  beim Ausmultiplizieren auftritt.

# Multinomialsatz – Beweis

## Satz (Multinomialsatz)

Seien  $\ell \in \mathbb{N}_0$  und  $x_1, \dots, x_\ell \in \mathbb{R}$ . Dann gilt für alle  $n \in \mathbb{N}_0$

$$(x_1 + \dots + x_\ell)^n = \sum_{n_1 + \dots + n_\ell = n} \binom{n}{n_1, \dots, n_\ell} x_1^{n_1} \cdot \dots \cdot x_\ell^{n_\ell} .$$

**Beweis:** Wir können

$$(x_1 + \dots + x_\ell)^n = \underbrace{(x_1 + \dots + x_\ell) \cdot \dots \cdot (x_1 + \dots + x_\ell)}_{n \text{ Faktoren}}$$

durch Ausmultiplizieren berechnen. Für  $n_1, \dots, n_\ell \in \mathbb{N}_0$  mit  $n_1 + \dots + n_\ell = n$  zählen wir, wie oft das Produkt  $x_1^{n_1} \cdot \dots \cdot x_\ell^{n_\ell}$  beim Ausmultiplizieren auftritt. Beim Ausmultiplizieren wählen wir aus jedem der  $n$  Faktoren  $(x_1 + \dots + x_\ell)$  eine Variable aus.

# Multinomialsatz – Beweis

## Satz (Multinomialsatz)

Seien  $\ell \in \mathbb{N}_0$  und  $x_1, \dots, x_\ell \in \mathbb{R}$ . Dann gilt für alle  $n \in \mathbb{N}_0$

$$(x_1 + \dots + x_\ell)^n = \sum_{n_1 + \dots + n_\ell = n} \binom{n}{n_1, \dots, n_\ell} x_1^{n_1} \cdot \dots \cdot x_\ell^{n_\ell}.$$

**Beweis:** Wir können

$$(x_1 + \dots + x_\ell)^n = \underbrace{(x_1 + \dots + x_\ell) \cdot \dots \cdot (x_1 + \dots + x_\ell)}_{n \text{ Faktoren}}$$

durch Ausmultiplizieren berechnen. Für  $n_1, \dots, n_\ell \in \mathbb{N}_0$  mit  $n_1 + \dots + n_\ell = n$  zählen wir, wie oft das Produkt  $x_1^{n_1} \cdot \dots \cdot x_\ell^{n_\ell}$  beim Ausmultiplizieren auftritt. Beim Ausmultiplizieren wählen wir aus jedem der  $n$  Faktoren  $(x_1 + \dots + x_\ell)$  eine Variable aus. Wir wählen also eine Zeichenkette der Länge  $n$  aus den Zeichen  $x_1, \dots, x_\ell$ . Um das Produkt  $x_1^{n_1} \cdot \dots \cdot x_\ell^{n_\ell}$  zu erhalten, muss in der Zeichenkette, die wir auswählen, die Variable  $x_1$  genau  $n_1$ -mal auftreten, die Variable  $x_2$   $n_2$ -mal und so weiter.

# Multinomialsatz – Beweis

## Satz (Multinomialsatz)

Seien  $\ell \in \mathbb{N}_0$  und  $x_1, \dots, x_\ell \in \mathbb{R}$ . Dann gilt für alle  $n \in \mathbb{N}_0$

$$(x_1 + \dots + x_\ell)^n = \sum_{n_1 + \dots + n_\ell = n} \binom{n}{n_1, \dots, n_\ell} x_1^{n_1} \cdot \dots \cdot x_\ell^{n_\ell}.$$

**Beweis:** Wir können

$$(x_1 + \dots + x_\ell)^n = \underbrace{(x_1 + \dots + x_\ell) \cdot \dots \cdot (x_1 + \dots + x_\ell)}_{n \text{ Faktoren}}$$

durch Ausmultiplizieren berechnen. Für  $n_1, \dots, n_\ell \in \mathbb{N}_0$  mit  $n_1 + \dots + n_\ell = n$  zählen wir, wie oft das Produkt  $x_1^{n_1} \cdot \dots \cdot x_\ell^{n_\ell}$  beim Ausmultiplizieren auftritt. Beim Ausmultiplizieren wählen wir aus jedem der  $n$  Faktoren  $(x_1 + \dots + x_\ell)$  eine Variable aus. Wir wählen also eine Zeichenkette der Länge  $n$  aus den Zeichen  $x_1, \dots, x_\ell$ . Um das Produkt  $x_1^{n_1} \cdot \dots \cdot x_\ell^{n_\ell}$  zu erhalten, muss in der Zeichenkette, die wir auswählen, die Variable  $x_1$  genau  $n_1$ -mal auftreten, die Variable  $x_2$   $n_2$ -mal und so weiter. Wir wissen bereits (siehe Anagramme), dass es genau  $\binom{n}{n_1, \dots, n_\ell}$  solche Zeichenketten gibt.

# Multinomialsatz – Beweis

## Satz (Multinomialsatz)

Seien  $\ell \in \mathbb{N}_0$  und  $x_1, \dots, x_\ell \in \mathbb{R}$ . Dann gilt für alle  $n \in \mathbb{N}_0$

$$(x_1 + \dots + x_\ell)^n = \sum_{n_1 + \dots + n_\ell = n} \binom{n}{n_1, \dots, n_\ell} x_1^{n_1} \cdot \dots \cdot x_\ell^{n_\ell}.$$

**Beweis:** Wir können

$$(x_1 + \dots + x_\ell)^n = \underbrace{(x_1 + \dots + x_\ell) \cdot \dots \cdot (x_1 + \dots + x_\ell)}_{n \text{ Faktoren}}$$

durch Ausmultiplizieren berechnen. Für  $n_1, \dots, n_\ell \in \mathbb{N}_0$  mit  $n_1 + \dots + n_\ell = n$  zählen wir, wie oft das Produkt  $x_1^{n_1} \cdot \dots \cdot x_\ell^{n_\ell}$  beim Ausmultiplizieren auftritt. Beim Ausmultiplizieren wählen wir aus jedem der  $n$  Faktoren  $(x_1 + \dots + x_\ell)$  eine Variable aus. Wir wählen also eine Zeichenkette der Länge  $n$  aus den Zeichen  $x_1, \dots, x_\ell$ . Um das Produkt  $x_1^{n_1} \cdot \dots \cdot x_\ell^{n_\ell}$  zu erhalten, muss in der Zeichenkette, die wir auswählen, die Variable  $x_1$  genau  $n_1$ -mal auftreten, die Variable  $x_2$   $n_2$ -mal und so weiter. Wir wissen bereits (siehe Anagramme), dass es genau  $\binom{n}{n_1, \dots, n_\ell}$  solche Zeichenketten gibt. Damit ist der Koeffizient vor  $x_1^{n_1} \cdot \dots \cdot x_\ell^{n_\ell}$ , der sich beim Ausmultiplizieren von  $(x_1 + \dots + x_\ell)^n$  ergibt, der Multinomialkoeffizient  $\binom{n}{n_1, \dots, n_\ell}$ .  $\square$

## Grundproblem

Wieviele Möglichkeiten gibt es,  $k$  Elemente aus einer  $n$ -elementigen Menge zu ziehen?



## Grundproblem

Wieviele Möglichkeiten gibt es,  $k$  Elemente aus einer  $n$ -elementigen Menge zu ziehen?

Hierbei unterscheidet man folgende Varianten:

# Ziehen von Elementen

## Grundproblem

Wieviele Möglichkeiten gibt es,  $k$  Elemente aus einer  $n$ -elementigen Menge zu ziehen?

Hierbei unterscheidet man folgende Varianten:

- ziehen **mit** Zurücklegen, wobei die Reihenfolge, in der die Elemente gezogen werden, **mit** berücksichtigt wird

# Ziehen von Elementen

## Grundproblem

Wieviele Möglichkeiten gibt es,  $k$  Elemente aus einer  $n$ -elementigen Menge zu ziehen?

Hierbei unterscheidet man folgende Varianten:

- ziehen **mit** Zurücklegen, wobei die Reihenfolge, in der die Elemente gezogen werden, **mit** berücksichtigt wird

$k$ -Tupel  $\implies$

# Ziehen von Elementen

## Grundproblem

Wieviele Möglichkeiten gibt es,  $k$  Elemente aus einer  $n$ -elementigen Menge zu ziehen?

Hierbei unterscheidet man folgende Varianten:

- ziehen **mit** Zurücklegen, wobei die Reihenfolge, in der die Elemente gezogen werden, **mit** berücksichtigt wird

$k$ -Tupel  $\implies n^k$

# Ziehen von Elementen

## Grundproblem

Wieviele Möglichkeiten gibt es,  $k$  Elemente aus einer  $n$ -elementigen Menge zu ziehen?

Hierbei unterscheidet man folgende Varianten:

- ziehen **mit** Zurücklegen, wobei die Reihenfolge, in der die Elemente gezogen werden, **mit** berücksichtigt wird

$$k\text{-Tupel} \implies n^k$$

- ziehen **ohne** Zurücklegen, **mit** Berücksichtigung der Reihenfolge

# Ziehen von Elementen

## Grundproblem

Wieviele Möglichkeiten gibt es,  $k$  Elemente aus einer  $n$ -elementigen Menge zu ziehen?

Hierbei unterscheidet man folgende Varianten:

- ziehen **mit** Zurücklegen, wobei die Reihenfolge, in der die Elemente gezogen werden, **mit** berücksichtigt wird

$k$ -Tupel  $\implies n^k$

- ziehen **ohne** Zurücklegen, **mit** Berücksichtigung der Reihenfolge

$k$ -Tupel ohne Wiederholung  $\implies$

# Ziehen von Elementen

## Grundproblem

Wieviele Möglichkeiten gibt es,  $k$  Elemente aus einer  $n$ -elementigen Menge zu ziehen?

Hierbei unterscheidet man folgende Varianten:

- ziehen **mit** Zurücklegen, wobei die Reihenfolge, in der die Elemente gezogen werden, **mit** berücksichtigt wird

$$k\text{-Tupel} \implies n^k$$

- ziehen **ohne** Zurücklegen, **mit** Berücksichtigung der Reihenfolge

$$k\text{-Tupel ohne Wiederholung} \implies (n)_k$$

# Ziehen von Elementen

## Grundproblem

Wieviele Möglichkeiten gibt es,  $k$  Elemente aus einer  $n$ -elementigen Menge zu ziehen?

Hierbei unterscheidet man folgende Varianten:

- ziehen **mit** Zurücklegen, wobei die Reihenfolge, in der die Elemente gezogen werden, **mit** berücksichtigt wird

$$k\text{-Tupel} \implies n^k$$

- ziehen **ohne** Zurücklegen, **mit** Berücksichtigung der Reihenfolge

$$k\text{-Tupel ohne Wiederholung} \implies (n)_k$$

- ziehen **ohne** Zurücklegen, **ohne** Berücksichtigung der Reihenfolge



# Ziehen von Elementen

## Grundproblem

Wieviele Möglichkeiten gibt es,  $k$  Elemente aus einer  $n$ -elementigen Menge zu ziehen?

Hierbei unterscheidet man folgende Varianten:

- ziehen **mit** Zurücklegen, wobei die Reihenfolge, in der die Elemente gezogen werden, **mit** berücksichtigt wird

$$k\text{-Tupel} \implies n^k$$

- ziehen **ohne** Zurücklegen, **mit** Berücksichtigung der Reihenfolge

$$k\text{-Tupel ohne Wiederholung} \implies (n)_k$$

- ziehen **ohne** Zurücklegen, **ohne** Berücksichtigung der Reihenfolge

$$k\text{-elementige Teilmengen} \implies$$

# Ziehen von Elementen

## Grundproblem

Wieviele Möglichkeiten gibt es,  $k$  Elemente aus einer  $n$ -elementigen Menge zu ziehen?

Hierbei unterscheidet man folgende Varianten:

- ziehen **mit** Zurücklegen, wobei die Reihenfolge, in der die Elemente gezogen werden, **mit** berücksichtigt wird

$$k\text{-Tupel} \implies n^k$$

- ziehen **ohne** Zurücklegen, **mit** Berücksichtigung der Reihenfolge

$$k\text{-Tupel ohne Wiederholung} \implies (n)_k$$

- ziehen **ohne** Zurücklegen, **ohne** Berücksichtigung der Reihenfolge

$$k\text{-elementige Teilmengen} \implies \binom{n}{k}$$

# Ziehen von Elementen

## Grundproblem

Wieviele Möglichkeiten gibt es,  $k$  Elemente aus einer  $n$ -elementigen Menge zu ziehen?

Hierbei unterscheidet man folgende Varianten:

- ziehen **mit** Zurücklegen, wobei die Reihenfolge, in der die Elemente gezogen werden, **mit** berücksichtigt wird

$$k\text{-Tupel} \implies n^k$$

- ziehen **ohne** Zurücklegen, **mit** Berücksichtigung der Reihenfolge

$$k\text{-Tupel ohne Wiederholung} \implies (n)_k$$

- ziehen **ohne** Zurücklegen, **ohne** Berücksichtigung der Reihenfolge

$$k\text{-elementige Teilmengen} \implies \binom{n}{k}$$

- ziehen **mit** Zurücklegen, **ohne** Berücksichtigung der Reihenfolge

# Ziehen von Elementen

## Grundproblem

Wieviele Möglichkeiten gibt es,  $k$  Elemente aus einer  $n$ -elementigen Menge zu ziehen?

Hierbei unterscheidet man folgende Varianten:

- ziehen **mit** Zurücklegen, wobei die Reihenfolge, in der die Elemente gezogen werden, **mit** berücksichtigt wird

$$k\text{-Tupel} \implies n^k$$

- ziehen **ohne** Zurücklegen, **mit** Berücksichtigung der Reihenfolge

$$k\text{-Tupel ohne Wiederholung} \implies (n)_k$$

- ziehen **ohne** Zurücklegen, **ohne** Berücksichtigung der Reihenfolge

$$k\text{-elementige Teilmengen} \implies \binom{n}{k}$$

- ziehen **mit** Zurücklegen, **ohne** Berücksichtigung der Reihenfolge

???

# Ziehen mit Zurücklegen ohne Reihenfolge

## Satz

Für natürliche Zahlen  $n \in \mathbb{N}$  und  $k \in \mathbb{N}_0$  gibt es genau  $\binom{n+k-1}{k}$  Möglichkeiten,  $k$  Elemente mit Zurücklegen aus einer  $n$ -elementigen Menge zu ziehen, wobei die Reihenfolge, in der die Elemente gezogen werden, nicht berücksichtigt wird.

# Ziehen mit Zurücklegen ohne Reihenfolge

## Satz

Für natürliche Zahlen  $n \in \mathbb{N}$  und  $k \in \mathbb{N}_0$  gibt es genau  $\binom{n+k-1}{k}$  Möglichkeiten,  $k$  Elemente mit Zurücklegen aus einer  $n$ -elementigen Menge zu ziehen, wobei die Reihenfolge, in der die Elemente gezogen werden, nicht berücksichtigt wird.

## Beweis:

Wenn die Reihenfolge, in der die Elemente gezogen werden, keine Rolle spielt, so müssen wir nur zählen, wie oft jedes Element der  $n$ -elementigen Menge gezogen wurde.

# Ziehen mit Zurücklegen ohne Reihenfolge

## Satz

Für natürliche Zahlen  $n \in \mathbb{N}$  und  $k \in \mathbb{N}_0$  gibt es genau  $\binom{n+k-1}{k}$  Möglichkeiten,  $k$  Elemente mit Zurücklegen aus einer  $n$ -elementigen Menge zu ziehen, wobei die Reihenfolge, in der die Elemente gezogen werden, nicht berücksichtigt wird.

## Beweis:

Wenn die Reihenfolge, in der die Elemente gezogen werden, keine Rolle spielt, so müssen wir nur zählen, wie oft jedes Element der  $n$ -elementigen Menge gezogen wurde.

D. h. wir zählen Zerlegungen der natürlichen Zahl  $m = k$  in  $\ell = n$  Summanden  $m_1, \dots, m_\ell \in \mathbb{N}_0$  mit

$$m_1 + \dots + m_\ell = m.$$

# Ziehen mit Zurücklegen ohne Reihenfolge

## Satz

Für natürliche Zahlen  $n \in \mathbb{N}$  und  $k \in \mathbb{N}_0$  gibt es genau  $\binom{n+k-1}{k}$  Möglichkeiten,  $k$  Elemente mit Zurücklegen aus einer  $n$ -elementigen Menge zu ziehen, wobei die Reihenfolge, in der die Elemente gezogen werden, nicht berücksichtigt wird.

## Beweis:

Wenn die Reihenfolge, in der die Elemente gezogen werden, keine Rolle spielt, so müssen wir nur zählen, wie oft jedes Element der  $n$ -elementigen Menge gezogen wurde.

D. h. wir zählen Zerlegungen der natürlichen Zahl  $m = k$  in  $\ell = n$  Summanden  $m_1, \dots, m_\ell \in \mathbb{N}_0$  mit

$$m_1 + \dots + m_\ell = m.$$

Für diese Problem wissen wir bereits, dass es  $\binom{m+\ell-1}{\ell-1} = \binom{\ell+m-1}{m}$  unterschiedliche Kombinationen gibt



# Ziehen mit Zurücklegen ohne Reihenfolge

## Satz

Für natürliche Zahlen  $n \in \mathbb{N}$  und  $k \in \mathbb{N}_0$  gibt es genau  $\binom{n+k-1}{k}$  Möglichkeiten,  $k$  Elemente mit Zurücklegen aus einer  $n$ -elementigen Menge zu ziehen, wobei die Reihenfolge, in der die Elemente gezogen werden, nicht berücksichtigt wird.

## Beweis:

Wenn die Reihenfolge, in der die Elemente gezogen werden, keine Rolle spielt, so müssen wir nur zählen, wie oft jedes Element der  $n$ -elementigen Menge gezogen wurde.

D. h. wir zählen Zerlegungen der natürlichen Zahl  $m = k$  in  $\ell = n$  Summanden  $m_1, \dots, m_\ell \in \mathbb{N}_0$  mit

$$m_1 + \dots + m_\ell = m.$$

Für diese Problem wissen wir bereits, dass es  $\binom{m+\ell-1}{\ell-1} = \binom{\ell+m-1}{m}$  unterschiedliche Kombinationen gibt und wegen  $m = k$  und  $\ell = n$  folgt der Satz.  $\square$

# Ziehen von Elementen

## Grundproblem

Wieviele Möglichkeiten gibt es,  $k$  Elemente aus einer  $n$ -elementigen Menge zu ziehen?

Hierbei unterscheidet man folgende Varianten:

- ziehen **mit** Zurücklegen, wobei die Reihenfolge, in der die Elemente gezogen werden, **mit** berücksichtigt wird

$$k\text{-Tupel} \implies n^k$$

- ziehen **ohne** Zurücklegen, **mit** Berücksichtigung der Reihenfolge

$$k\text{-Tupel ohne Wiederholung} \implies (n)_k$$

- ziehen **ohne** Zurücklegen, **ohne** Berücksichtigung der Reihenfolge

$$k\text{-elementige Teilmengen} \implies \binom{n}{k}$$

- ziehen **mit** Zurücklegen, **ohne** Berücksichtigung der Reihenfolge

$$\binom{n+k-1}{k}$$

# Taubenschlag-/Schubfachprinzip

# Taubenschlag-/Schubfachprinzip

## Beobachtung (Schubfachprinzip)

Für natürliche Zahlen  $m$  und  $n \in \mathbb{N}$  mit  $m > n$  gilt, falls  $m$  Objekte auf  $n$  Fächer verteilt werden, so gibt es mindestens ein Fach mit mindestens zwei Objekten.

# Taubenschlag-/Schubfachprinzip

## Beobachtung (Schubfachprinzip)

Für natürliche Zahlen  $m$  und  $n \in \mathbb{N}$  mit  $m > n$  gilt, falls  $m$  Objekte auf  $n$  Fächer verteilt werden, so gibt es mindestens ein Fach mit mindestens zwei Objekten.

Für  $m > n$  gibt es keine injektive Abbildung von einer  $m$ -elementigen Menge  $M$  in eine  $n$ -elementige Menge  $N$ .

# Taubenschlag-/Schubfachprinzip

## Beobachtung (Schubfachprinzip)

Für natürliche Zahlen  $m$  und  $n \in \mathbb{N}$  mit  $m > n$  gilt, falls  $m$  Objekte auf  $n$  Fächer verteilt werden, so gibt es mindestens ein Fach mit mindestens zwei Objekten.

Für  $m > n$  gibt es keine injektive Abbildung von einer  $m$ -elementigen Menge  $M$  in eine  $n$ -elementige Menge  $N$ .

Allgemeiner gilt, wenn  $m$  Objekte auf  $n$  Fächer verteilt werden, so gibt es mindestens ein Fach mit mindestens  $\lceil \frac{m}{n} \rceil$  Objekten.

# Taubenschlag-/Schubfachprinzip

## Beobachtung (Schubfachprinzip)

Für natürliche Zahlen  $m$  und  $n \in \mathbb{N}$  mit  $m > n$  gilt, falls  $m$  Objekte auf  $n$  Fächer verteilt werden, so gibt es mindestens ein Fach mit mindestens zwei Objekten.

Für  $m > n$  gibt es keine injektive Abbildung von einer  $m$ -elementigen Menge  $M$  in eine  $n$ -elementige Menge  $N$ .

Allgemeiner gilt, wenn  $m$  Objekte auf  $n$  Fächer verteilt werden, so gibt es mindestens ein Fach mit mindestens  $\lceil \frac{m}{n} \rceil$  Objekten.

## Satz (Unendliche Variante)

Sei  $M$  eine unendliche Menge und  $n \in \mathbb{N}$ .

# Taubenschlag-/Schubfachprinzip

## Beobachtung (Schubfachprinzip)

Für natürliche Zahlen  $m$  und  $n \in \mathbb{N}$  mit  $m > n$  gilt, falls  $m$  Objekte auf  $n$  Fächer verteilt werden, so gibt es mindestens ein Fach mit mindestens zwei Objekten.

Für  $m > n$  gibt es keine injektive Abbildung von einer  $m$ -elementigen Menge  $M$  in eine  $n$ -elementige Menge  $N$ .

Allgemeiner gilt, wenn  $m$  Objekte auf  $n$  Fächer verteilt werden, so gibt es mindestens ein Fach mit mindestens  $\lceil \frac{m}{n} \rceil$  Objekten.

## Satz (Unendliche Variante)

Sei  $M$  eine unendliche Menge und  $n \in \mathbb{N}$ . Sind  $M_1, \dots, M_n$  Teilmengen von  $M$  mit  $M = M_1 \cup \dots \cup M_n$ , so ist (mindestens) eine der Mengen  $M_1, \dots, M_n$  unendlich.



# Taubenschlag-/Schubfachprinzip

## Beobachtung (Schubfachprinzip)

Für natürliche Zahlen  $m$  und  $n \in \mathbb{N}$  mit  $m > n$  gilt, falls  $m$  Objekte auf  $n$  Fächer verteilt werden, so gibt es mindestens ein Fach mit mindestens zwei Objekten.

Für  $m > n$  gibt es keine injektive Abbildung von einer  $m$ -elementigen Menge  $M$  in eine  $n$ -elementige Menge  $N$ .

Allgemeiner gilt, wenn  $m$  Objekte auf  $n$  Fächer verteilt werden, so gibt es mindestens ein Fach mit mindestens  $\lceil \frac{m}{n} \rceil$  Objekten.

## Satz (Unendliche Variante)

Sei  $M$  eine unendliche Menge und  $n \in \mathbb{N}$ . Sind  $M_1, \dots, M_n$  Teilmengen von  $M$  mit  $M = M_1 \cup \dots \cup M_n$ , so ist (mindestens) eine der Mengen  $M_1, \dots, M_n$  unendlich.

**Beweis:** Angenommen,  $M_1, \dots, M_n$  sind endlich.

# Taubenschlag-/Schubfachprinzip

## Beobachtung (Schubfachprinzip)

Für natürliche Zahlen  $m$  und  $n \in \mathbb{N}$  mit  $m > n$  gilt, falls  $m$  Objekte auf  $n$  Fächer verteilt werden, so gibt es mindestens ein Fach mit mindestens zwei Objekten.

Für  $m > n$  gibt es keine injektive Abbildung von einer  $m$ -elementigen Menge  $M$  in eine  $n$ -elementige Menge  $N$ .

Allgemeiner gilt, wenn  $m$  Objekte auf  $n$  Fächer verteilt werden, so gibt es mindestens ein Fach mit mindestens  $\lceil \frac{m}{n} \rceil$  Objekten.

## Satz (Unendliche Variante)

Sei  $M$  eine unendliche Menge und  $n \in \mathbb{N}$ . Sind  $M_1, \dots, M_n$  Teilmengen von  $M$  mit  $M = M_1 \cup \dots \cup M_n$ , so ist (mindestens) eine der Mengen  $M_1, \dots, M_n$  unendlich.

**Beweis:** Angenommen,  $M_1, \dots, M_n$  sind endlich. Dann existiert  $m \in \mathbb{N}_0$  definiert als das Maximum der Mächtigkeiten der  $M_i$ , d. h.  $m = \max_{1 \leq i \leq n} |M_i|$ .

# Taubenschlag-/Schubfachprinzip

## Beobachtung (Schubfachprinzip)

Für natürliche Zahlen  $m$  und  $n \in \mathbb{N}$  mit  $m > n$  gilt, falls  $m$  Objekte auf  $n$  Fächer verteilt werden, so gibt es mindestens ein Fach mit mindestens zwei Objekten.

Für  $m > n$  gibt es keine injektive Abbildung von einer  $m$ -elementigen Menge  $M$  in eine  $n$ -elementige Menge  $N$ .

Allgemeiner gilt, wenn  $m$  Objekte auf  $n$  Fächer verteilt werden, so gibt es mindestens ein Fach mit mindestens  $\lceil \frac{m}{n} \rceil$  Objekten.

## Satz (Unendliche Variante)

Sei  $M$  eine unendliche Menge und  $n \in \mathbb{N}$ . Sind  $M_1, \dots, M_n$  Teilmengen von  $M$  mit  $M = M_1 \cup \dots \cup M_n$ , so ist (mindestens) eine der Mengen  $M_1, \dots, M_n$  unendlich.

**Beweis:** Angenommen,  $M_1, \dots, M_n$  sind endlich. Dann existiert  $m \in \mathbb{N}_0$  definiert als das Maximum der Mächtigkeiten der  $M_i$ , d. h.  $m = \max_{1 \leq i \leq n} |M_i|$ . Dann gilt aber

$$|M| \leq \sum_{i=1}^n |M_i|$$

# Taubenschlag-/Schubfachprinzip

## Beobachtung (Schubfachprinzip)

Für natürliche Zahlen  $m$  und  $n \in \mathbb{N}$  mit  $m > n$  gilt, falls  $m$  Objekte auf  $n$  Fächer verteilt werden, so gibt es mindestens ein Fach mit mindestens zwei Objekten.

Für  $m > n$  gibt es keine injektive Abbildung von einer  $m$ -elementigen Menge  $M$  in eine  $n$ -elementige Menge  $N$ .

Allgemeiner gilt, wenn  $m$  Objekte auf  $n$  Fächer verteilt werden, so gibt es mindestens ein Fach mit mindestens  $\lceil \frac{m}{n} \rceil$  Objekten.

## Satz (Unendliche Variante)

Sei  $M$  eine unendliche Menge und  $n \in \mathbb{N}$ . Sind  $M_1, \dots, M_n$  Teilmengen von  $M$  mit  $M = M_1 \cup \dots \cup M_n$ , so ist (mindestens) eine der Mengen  $M_1, \dots, M_n$  unendlich.

**Beweis:** Angenommen,  $M_1, \dots, M_n$  sind endlich. Dann existiert  $m \in \mathbb{N}_0$  definiert als das Maximum der Mächtigkeiten der  $M_i$ , d. h.  $m = \max_{1 \leq i \leq n} |M_i|$ . Dann gilt aber

$$|M| \leq \sum_{i=1}^n |M_i| \leq m \cdot n$$

# Taubenschlag-/Schubfachprinzip

## Beobachtung (Schubfachprinzip)

Für natürliche Zahlen  $m$  und  $n \in \mathbb{N}$  mit  $m > n$  gilt, falls  $m$  Objekte auf  $n$  Fächer verteilt werden, so gibt es mindestens ein Fach mit mindestens zwei Objekten.

Für  $m > n$  gibt es keine injektive Abbildung von einer  $m$ -elementigen Menge  $M$  in eine  $n$ -elementige Menge  $N$ .

Allgemeiner gilt, wenn  $m$  Objekte auf  $n$  Fächer verteilt werden, so gibt es mindestens ein Fach mit mindestens  $\lceil \frac{m}{n} \rceil$  Objekten.

## Satz (Unendliche Variante)

Sei  $M$  eine unendliche Menge und  $n \in \mathbb{N}$ . Sind  $M_1, \dots, M_n$  Teilmengen von  $M$  mit  $M = M_1 \cup \dots \cup M_n$ , so ist (mindestens) eine der Mengen  $M_1, \dots, M_n$  unendlich.

**Beweis:** Angenommen,  $M_1, \dots, M_n$  sind endlich. Dann existiert  $m \in \mathbb{N}_0$  definiert als das Maximum der Mächtigkeiten der  $M_i$ , d. h.  $m = \max_{1 \leq i \leq n} |M_i|$ . Dann gilt aber

$$|M| \leq \sum_{i=1}^n |M_i| \leq m \cdot n$$

und somit ist auch  $M$  endlich. ⚡ □

# Zwei einfache Anwendungen des Schubfachprinzips

## Teilerfremde und teilende Paare

Für  $n \in \mathbb{N}$  seien  $n$  beliebige natürliche Zahlen  $1 \leq x_1 < \dots < x_{n+1} \leq 2n$  gegeben.

# Zwei einfache Anwendungen des Schubfachprinzips

## Teilerfremde und teilende Paare

Für  $n \in \mathbb{N}$  seien  $n$  beliebige natürliche Zahlen  $1 \leq x_1 < \dots < x_{n+1} \leq 2n$  gegeben. Dann gibt es

- zwei Indizes  $1 \leq i < j \leq n$ , sodass  $x_i$  und  $x_j$  teilerfremd sind

# Zwei einfache Anwendungen des Schubfachprinzips

## Teilerfremde und teilende Paare

Für  $n \in \mathbb{N}$  seien  $n$  beliebige natürliche Zahlen  $1 \leq x_1 < \dots < x_{n+1} \leq 2n$  gegeben. Dann gibt es

- zwei Indizes  $1 \leq i < j \leq n$ , sodass  $x_i$  und  $x_j$  teilerfremd sind
- und es gibt zwei Indizes  $1 \leq k < \ell \leq n$ , sodass  $x_k \mid x_\ell$ .



# Zwei einfache Anwendungen des Schubfachprinzips

## Teilerfremde und teilende Paare

Für  $n \in \mathbb{N}$  seien  $n$  beliebige natürliche Zahlen  $1 \leq x_1 < \dots < x_{n+1} \leq 2n$  gegeben. Dann gibt es

- zwei Indizes  $1 \leq i < j \leq n$ , sodass  $x_i$  und  $x_j$  teilerfremd sind
- und es gibt zwei Indizes  $1 \leq k < \ell \leq n$ , sodass  $x_k \mid x_\ell$ .

**Beweis:** Für die erste Aussage müssen wir uns nur klar machen, dass es unter  $n + 1$  Zahlen zwischen 1 und  $2n$ , in jedem Fall ein Zahlenpaar der Form  $a, a + 1$  gibt. D. h. es gibt ein  $i$  und  $a$  sodass  $x_i = a$  und  $x_{i+1} = a + 1$  gilt und offensichtlich sind  $x_i = a$  und  $x_{i+1} = a + 1$  teilerfremd.

# Zwei einfache Anwendungen des Schubfachprinzips

## Teilerfremde und teilende Paare

Für  $n \in \mathbb{N}$  seien  $n$  beliebige natürliche Zahlen  $1 \leq x_1 < \dots < x_{n+1} \leq 2n$  gegeben. Dann gibt es

- zwei Indizes  $1 \leq i < j \leq n$ , sodass  $x_i$  und  $x_j$  teilerfremd sind
- und es gibt zwei Indizes  $1 \leq k < \ell \leq n$ , sodass  $x_k \mid x_\ell$ .

**Beweis:** Für die erste Aussage müssen wir uns nur klar machen, dass es unter  $n + 1$  Zahlen zwischen 1 und  $2n$ , in jedem Fall ein Zahlenpaar der Form  $a, a + 1$  gibt. D. h. es gibt ein  $i$  und  $a$  sodass  $x_i = a$  und  $x_{i+1} = a + 1$  gilt und offensichtlich sind  $x_i = a$  und  $x_{i+1} = a + 1$  teilerfremd. Formal können wir auch die Zahlen zwischen 1 und  $2n$  in  $n$  Schubladen  $S_1, \dots, S_n$  der Form  $S_j = \{2j - 1, 2j\}$  unterteilen und wegen des Schubfachprinzips muss eine der Schubladen mindestens zwei der  $x_j$  enthalten.

# Zwei einfache Anwendungen des Schubfachprinzips

## Teilerfremde und teilende Paare

Für  $n \in \mathbb{N}$  seien  $n$  beliebige natürliche Zahlen  $1 \leq x_1 < \dots < x_{n+1} \leq 2n$  gegeben. Dann gibt es

- zwei Indizes  $1 \leq i < j \leq n$ , sodass  $x_i$  und  $x_j$  teilerfremd sind
- und es gibt zwei Indizes  $1 \leq k < \ell \leq n$ , sodass  $x_k \mid x_\ell$ .

**Beweis:** Für die erste Aussage müssen wir uns nur klar machen, dass es unter  $n + 1$  Zahlen zwischen 1 und  $2n$ , in jedem Fall ein Zahlenpaar der Form  $a, a + 1$  gibt. D. h. es gibt ein  $i$  und  $a$  sodass  $x_i = a$  und  $x_{i+1} = a + 1$  gilt und offensichtlich sind  $x_i = a$  und  $x_{i+1} = a + 1$  teilerfremd. Formal können wir auch die Zahlen zwischen 1 und  $2n$  in  $n$  Schubladen  $S_1, \dots, S_n$  der Form  $S_j = \{2j - 1, 2j\}$  unterteilen und wegen des Schubfachprinzips muss eine der Schubladen mindestens zwei der  $x_i$  enthalten.

Für die zweite Aussage betrachten wir als Schubladen die  $n$  ungeraden Zahlen zwischen 1 und  $2n$  und wir legen  $x_i$  in die Schublade der ungeraden Zahl  $u$ , falls  $u$  der größte ungerade Teiler von  $x_i$  ist.

# Zwei einfache Anwendungen des Schubfachprinzips

## Teilerfremde und teilende Paare

Für  $n \in \mathbb{N}$  seien  $n$  beliebige natürliche Zahlen  $1 \leq x_1 < \dots < x_{n+1} \leq 2n$  gegeben. Dann gibt es

- zwei Indizes  $1 \leq i < j \leq n$ , sodass  $x_i$  und  $x_j$  teilerfremd sind
- und es gibt zwei Indizes  $1 \leq k < \ell \leq n$ , sodass  $x_k \mid x_\ell$ .

**Beweis:** Für die erste Aussage müssen wir uns nur klar machen, dass es unter  $n + 1$  Zahlen zwischen 1 und  $2n$ , in jedem Fall ein Zahlenpaar der Form  $a, a + 1$  gibt. D. h. es gibt ein  $i$  und  $a$  sodass  $x_i = a$  und  $x_{i+1} = a + 1$  gilt und offensichtlich sind  $x_i = a$  und  $x_{i+1} = a + 1$  teilerfremd. Formal können wir auch die Zahlen zwischen 1 und  $2n$  in  $n$  Schubladen  $S_1, \dots, S_n$  der Form  $S_j = \{2j - 1, 2j\}$  unterteilen und wegen des Schubfachprinzips muss eine der Schubladen mindestens zwei der  $x_i$  enthalten.

Für die zweite Aussage betrachten wir als Schubladen die  $n$  ungeraden Zahlen zwischen 1 und  $2n$  und wir legen  $x_i$  in die Schublade der ungeraden Zahl  $u$ , falls  $u$  der größte ungerade Teiler von  $x_i$  ist. Wegen des Schubfachprinzips gibt es also ein ungerades  $u$  und  $x_k < x_\ell$ , sodass  $u$  der größte ungerade Teiler von  $x_k$  und  $x_\ell$  ist.

# Zwei einfache Anwendungen des Schubfachprinzips

## Teilerfremde und teilende Paare

Für  $n \in \mathbb{N}$  seien  $n$  beliebige natürliche Zahlen  $1 \leq x_1 < \dots < x_{n+1} \leq 2n$  gegeben. Dann gibt es

- zwei Indizes  $1 \leq i < j \leq n$ , sodass  $x_i$  und  $x_j$  teilerfremd sind
- und es gibt zwei Indizes  $1 \leq k < \ell \leq n$ , sodass  $x_k \mid x_\ell$ .

**Beweis:** Für die erste Aussage müssen wir uns nur klar machen, dass es unter  $n + 1$  Zahlen zwischen 1 und  $2n$ , in jedem Fall ein Zahlenpaar der Form  $a, a + 1$  gibt. D. h. es gibt ein  $i$  und  $a$  sodass  $x_i = a$  und  $x_{i+1} = a + 1$  gilt und offensichtlich sind  $x_i = a$  und  $x_{i+1} = a + 1$  teilerfremd. Formal können wir auch die Zahlen zwischen 1 und  $2n$  in  $n$  Schubladen  $S_1, \dots, S_n$  der Form  $S_j = \{2j - 1, 2j\}$  unterteilen und wegen des Schubfachprinzips muss eine der Schubladen mindestens zwei der  $x_i$  enthalten.

Für die zweite Aussage betrachten wir als Schubladen die  $n$  ungeraden Zahlen zwischen 1 und  $2n$  und wir legen  $x_i$  in die Schublade der ungeraden Zahl  $u$ , falls  $u$  der größte ungerade Teiler von  $x_i$  ist. Wegen des Schubfachprinzips gibt es also ein ungerades  $u$  und  $x_k < x_\ell$ , sodass  $u$  der größte ungerade Teiler von  $x_k$  und  $x_\ell$  ist. Also ist  $x_k = 2^a u$  und  $x_\ell = 2^b u$  für  $a < b$  aus  $\mathbb{N}_0$ .

# Zwei einfache Anwendungen des Schubfachprinzips

## Teilerfremde und teilende Paare

Für  $n \in \mathbb{N}$  seien  $n$  beliebige natürliche Zahlen  $1 \leq x_1 < \dots < x_{n+1} \leq 2n$  gegeben. Dann gibt es

- zwei Indizes  $1 \leq i < j \leq n$ , sodass  $x_i$  und  $x_j$  teilerfremd sind
- und es gibt zwei Indizes  $1 \leq k < \ell \leq n$ , sodass  $x_k \mid x_\ell$ .

**Beweis:** Für die erste Aussage müssen wir uns nur klar machen, dass es unter  $n + 1$  Zahlen zwischen 1 und  $2n$ , in jedem Fall ein Zahlenpaar der Form  $a, a + 1$  gibt. D. h. es gibt ein  $i$  und  $a$  sodass  $x_i = a$  und  $x_{i+1} = a + 1$  gilt und offensichtlich sind  $x_i = a$  und  $x_{i+1} = a + 1$  teilerfremd. Formal können wir auch die Zahlen zwischen 1 und  $2n$  in  $n$  Schubladen  $S_1, \dots, S_n$  der Form  $S_j = \{2j - 1, 2j\}$  unterteilen und wegen des Schubfachprinzips muss eine der Schubladen mindestens zwei der  $x_i$  enthalten.

Für die zweite Aussage betrachten wir als Schubladen die  $n$  ungeraden Zahlen zwischen 1 und  $2n$  und wir legen  $x_i$  in die Schublade der ungeraden Zahl  $u$ , falls  $u$  der größte ungerade Teiler von  $x_i$  ist. Wegen des Schubfachprinzips gibt es also ein ungerades  $u$  und  $x_k < x_\ell$ , sodass  $u$  der größte ungerade Teiler von  $x_k$  und  $x_\ell$  ist. Also ist  $x_k = 2^a u$  und  $x_\ell = 2^b u$  für  $a < b$  aus  $\mathbb{N}_0$ . Somit gilt  $x_\ell = 2^{b-a} x_k$ .  $\square$

## Allgemeine Additionsregel

$$A_1, \dots, A_n \text{ paarweise disjunkt und endlich} \implies \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{i=1}^n |A_i|$$

## Allgemeine Additionsregel

$$A_1, \dots, A_n \text{ paarweise disjunkt und endlich} \implies \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{i=1}^n |A_i|$$

Frage

Was passiert wenn die Mengen  $A_i$  nicht paarweise disjunkt sind?



# Allgemeine Additionsregel

$$A_1, \dots, A_n \text{ paarweise disjunkt und endlich} \implies \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{i=1}^n |A_i|$$

## Frage

Was passiert wenn die Mengen  $A_i$  nicht paarweise disjunkt sind?

## Antworten:

- Elemente die in mehreren  $A_i$  vorkommen, werden in der Summe mehrfach gezählt, z. B. für zwei Mengen  $A, B$  gilt:

# Allgemeine Additionsregel

$$A_1, \dots, A_n \text{ paarweise disjunkt und endlich} \implies \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{i=1}^n |A_i|$$

## Frage

Was passiert wenn die Mengen  $A_i$  nicht paarweise disjunkt sind?

## Antworten:

- Elemente die in mehreren  $A_i$  vorkommen, werden in der Summe mehrfach gezählt, z. B. für zwei Mengen  $A, B$  gilt:

$$|A| + |B| = |A \cup B| +$$

# Allgemeine Additionsregel

$$A_1, \dots, A_n \text{ paarweise disjunkt und endlich} \implies \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{i=1}^n |A_i|$$

## Frage

Was passiert wenn die Mengen  $A_i$  nicht paarweise disjunkt sind?

## Antworten:

- Elemente die in mehreren  $A_i$  vorkommen, werden in der Summe mehrfach gezählt, z. B. für zwei Mengen  $A, B$  gilt:

$$|A| + |B| = |A \cup B| + |A \cap B|$$

# Allgemeine Additionsregel

$$A_1, \dots, A_n \text{ paarweise disjunkt und endlich} \implies \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{i=1}^n |A_i|$$

## Frage

Was passiert wenn die Mengen  $A_i$  nicht paarweise disjunkt sind?

## Antworten:

- Elemente die in mehreren  $A_i$  vorkommen, werden in der Summe mehrfach gezählt, z. B. für zwei Mengen  $A, B$  gilt:

$$|A| + |B| = |A \cup B| + |A \cap B|$$

- **allgemein:** seien  $A_1, \dots, A_n \subseteq X$  und  $f: X \rightarrow \mathbb{N}_0$  ordne jedem Element seine Vielfachheit in der Mengenfamilie zu

$$f(x) = |\{i \in [n]: x \in A_i\}| = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_i}(x),$$

# Allgemeine Additionsregel

$$A_1, \dots, A_n \text{ paarweise disjunkt und endlich} \implies \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{i=1}^n |A_i|$$

## Frage

Was passiert wenn die Mengen  $A_i$  nicht paarweise disjunkt sind?

## Antworten:

- Elemente die in mehreren  $A_i$  vorkommen, werden in der Summe mehrfach gezählt, z. B. für zwei Mengen  $A, B$  gilt:

$$|A| + |B| = |A \cup B| + |A \cap B|$$

- **allgemein:** seien  $A_1, \dots, A_n \subseteq X$  und  $f: X \rightarrow \mathbb{N}_0$  ordne jedem Element seine Vielfachheit in der Mengenfamilie zu

$$f(x) = |\{i \in [n]: x \in A_i\}| = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_i}(x),$$

wobei die **Indikatorfunktion**  $\mathbb{1}_A(\cdot)$  einer Menge  $A$  durch  $\mathbb{1}_A(x) = 1$  falls  $x \in A$  und  $\mathbb{1}_A(x) = 0$  sonst definiert ist,

# Allgemeine Additionsregel

$$A_1, \dots, A_n \text{ paarweise disjunkt und endlich} \implies \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{i=1}^n |A_i|$$

## Frage

Was passiert wenn die Mengen  $A_i$  nicht paarweise disjunkt sind?

## Antworten:

- Elemente die in mehreren  $A_i$  vorkommen, werden in der Summe mehrfach gezählt, z. B. für zwei Mengen  $A, B$  gilt:

$$|A| + |B| = |A \cup B| + |A \cap B|$$

- **allgemein:** seien  $A_1, \dots, A_n \subseteq X$  und  $f: X \rightarrow \mathbb{N}_0$  ordne jedem Element seine Vielfachheit in der Mengenfamilie zu

$$f(x) = |\{i \in [n]: x \in A_i\}| = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_i}(x),$$

wobei die **Indikatorfunktion**  $\mathbb{1}_A(\cdot)$  einer Menge  $A$  durch  $\mathbb{1}_A(x) = 1$  falls  $x \in A$  und  $\mathbb{1}_A(x) = 0$  sonst definiert ist, dann gilt

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |A_i| =$$

# Allgemeine Additionsregel

$$A_1, \dots, A_n \text{ paarweise disjunkt und endlich} \implies \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{i=1}^n |A_i|$$

## Frage

Was passiert wenn die Mengen  $A_i$  nicht paarweise disjunkt sind?

## Antworten:

- Elemente die in mehreren  $A_i$  vorkommen, werden in der Summe mehrfach gezählt, z. B. für zwei Mengen  $A, B$  gilt:

$$|A| + |B| = |A \cup B| + |A \cap B|$$

- **allgemein:** seien  $A_1, \dots, A_n \subseteq X$  und  $f: X \rightarrow \mathbb{N}_0$  ordne jedem Element seine Vielfachheit in der Mengenfamilie zu

$$f(x) = |\{i \in [n]: x \in A_i\}| = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_i}(x),$$

wobei die **Indikatorfunktion**  $\mathbb{1}_A(\cdot)$  einer Menge  $A$  durch  $\mathbb{1}_A(x) = 1$  falls  $x \in A$  und  $\mathbb{1}_A(x) = 0$  sonst definiert ist, dann gilt

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |A_i| = \sum_{i=1}^n \sum_{x \in X} \mathbb{1}_{A_i}(x) =$$

# Allgemeine Additionsregel

$$A_1, \dots, A_n \text{ paarweise disjunkt und endlich} \implies \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{i=1}^n |A_i|$$

## Frage

Was passiert wenn die Mengen  $A_i$  nicht paarweise disjunkt sind?

## Antworten:

- Elemente die in mehreren  $A_i$  vorkommen, werden in der Summe mehrfach gezählt, z. B. für zwei Mengen  $A, B$  gilt:

$$|A| + |B| = |A \cup B| + |A \cap B|$$

- **allgemein:** seien  $A_1, \dots, A_n \subseteq X$  und  $f: X \rightarrow \mathbb{N}_0$  ordne jedem Element seine Vielfachheit in der Mengenfamilie zu

$$f(x) = |\{i \in [n]: x \in A_i\}| = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_i}(x),$$

wobei die **Indikatorfunktion**  $\mathbb{1}_A(\cdot)$  einer Menge  $A$  durch  $\mathbb{1}_A(x) = 1$  falls  $x \in A$  und  $\mathbb{1}_A(x) = 0$  sonst definiert ist, dann gilt

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |A_i| = \sum_{i=1}^n \sum_{x \in X} \mathbb{1}_{A_i}(x) = \sum_{x \in X} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_i}(x) =$$



# Allgemeine Additionsregel

$$A_1, \dots, A_n \text{ paarweise disjunkt und endlich} \implies \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{i=1}^n |A_i|$$

## Frage

Was passiert wenn die Mengen  $A_i$  nicht paarweise disjunkt sind?

## Antworten:

- Elemente die in mehreren  $A_i$  vorkommen, werden in der Summe mehrfach gezählt, z. B. für zwei Mengen  $A, B$  gilt:

$$|A| + |B| = |A \cup B| + |A \cap B|$$

- **allgemein:** seien  $A_1, \dots, A_n \subseteq X$  und  $f: X \rightarrow \mathbb{N}_0$  ordne jedem Element seine Vielfachheit in der Mengenfamilie zu

$$f(x) = |\{i \in [n]: x \in A_i\}| = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_i}(x),$$

wobei die **Indikatorfunktion**  $\mathbb{1}_A(\cdot)$  einer Menge  $A$  durch  $\mathbb{1}_A(x) = 1$  falls  $x \in A$  und  $\mathbb{1}_A(x) = 0$  sonst definiert ist, dann gilt

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |A_i| = \sum_{i=1}^n \sum_{x \in X} \mathbb{1}_{A_i}(x) = \sum_{x \in X} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_i}(x) = \sum_{x \in X} f(x)$$

Verallgemeinerung von  $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

## Verallgemeinerung von $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

Für drei Mengen  $A$ ,  $B$  und  $C$  gilt:

- $|A| + |B| + |C|$  zählt alle Elemente in  $A \cup B \cup C$  mindestens einmal, aber die Elemente in den paarweisen Schnitten  $A \cap B$ ,  $A \cap C$  und  $B \cap C$  werden mindestens zweimal gezählt

## Verallgemeinerung von $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

Für drei Mengen  $A$ ,  $B$  und  $C$  gilt:

- $|A| + |B| + |C|$  zählt alle Elemente in  $A \cup B \cup C$  mindestens einmal, aber die Elemente in den paarweisen Schnitten  $A \cap B$ ,  $A \cap C$  und  $B \cap C$  werden mindestens zweimal gezählt
- **Idee:** paarweise Schnitte einfach abziehen

$$|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C|$$

## Verallgemeinerung von $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

Für drei Mengen  $A$ ,  $B$  und  $C$  gilt:

- $|A| + |B| + |C|$  zählt alle Elemente in  $A \cup B \cup C$  mindestens einmal, aber die Elemente in den paarweisen Schnitten  $A \cap B$ ,  $A \cap C$  und  $B \cap C$  werden mindestens zweimal gezählt
- **Idee:** paarweise Schnitte einfach abziehen

$$|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C|$$

**Problem:** Elemente in  $A \cap B \cap C$  werden in  $|A| + |B| + |C|$  dreimal gezählt, aber durch  $-|A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C|$  auch dreimal abgezogen, da sie in jedem der drei Schnitte enthalten sind, d. h. Elemente in  $A \cap B \cap C$  werden oben gar nicht mehr mitgezählt

## Verallgemeinerung von $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

Für drei Mengen  $A$ ,  $B$  und  $C$  gilt:

- $|A| + |B| + |C|$  zählt alle Elemente in  $A \cup B \cup C$  mindestens einmal, aber die Elemente in den paarweisen Schnitten  $A \cap B$ ,  $A \cap C$  und  $B \cap C$  werden mindestens zweimal gezählt
- **Idee:** paarweise Schnitte einfach abziehen

$$|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C|$$

**Problem:** Elemente in  $A \cap B \cap C$  werden in  $|A| + |B| + |C|$  dreimal gezählt, aber durch  $-|A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C|$  auch dreimal abgezogen, da sie in jedem der drei Schnitte enthalten sind, d. h. Elemente in  $A \cap B \cap C$  werden oben gar nicht mehr mitgezählt

⇒ einfach wieder hinzuaddieren, ergibt die richtige Formel:

## Verallgemeinerung von $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

Für drei Mengen  $A$ ,  $B$  und  $C$  gilt:

- $|A| + |B| + |C|$  zählt alle Elemente in  $A \cup B \cup C$  mindestens einmal, aber die Elemente in den paarweisen Schnitten  $A \cap B$ ,  $A \cap C$  und  $B \cap C$  werden mindestens zweimal gezählt
- **Idee:** paarweise Schnitte einfach abziehen

$$|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C|$$

**Problem:** Elemente in  $A \cap B \cap C$  werden in  $|A| + |B| + |C|$  dreimal gezählt, aber durch  $-|A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C|$  auch dreimal abgezogen, da sie in jedem der drei Schnitte enthalten sind, d. h. Elemente in  $A \cap B \cap C$  werden oben gar nicht mehr mitgezählt

⇒ einfach wieder hinzuaddieren, ergibt die richtige Formel:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

# Siebformel – Prinzip von Inklusion und Exklusion

## Satz (Siebformel)

Für endliche Mengen  $A_1, \dots, A_n$  gilt

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{\emptyset \neq J \in \mathcal{P}([n])} (-1)^{|J|-1} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right|.$$



# Siebformel – Prinzip von Inklusion und Exklusion

## Satz (Siebformel)

Für endliche Mengen  $A_1, \dots, A_n$  gilt

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{\emptyset \neq J \in \mathcal{P}([n])} (-1)^{|J|-1} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right|.$$

## Bemerkungen:

- die Summe läuft über alle nicht-leeren Teilmengen von  $[n] = \{1, \dots, n\}$

# Siebformel – Prinzip von Inklusion und Exklusion

## Satz (Siebformel)

Für endliche Mengen  $A_1, \dots, A_n$  gilt

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{\emptyset \neq J \in \mathcal{P}([n])} (-1)^{|J|-1} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right|.$$

## Bemerkungen:

- die Summe läuft über alle nicht-leeren Teilmengen von  $[n] = \{1, \dots, n\}$
- für die 1-elementigen Mengen  $J = \{j\}$  erhält man die Summanden  $|A_j|$

# Siebformel – Prinzip von Inklusion und Exklusion

## Satz (Siebformel)

Für endliche Mengen  $A_1, \dots, A_n$  gilt

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{\emptyset \neq J \in \mathcal{P}([n])} (-1)^{|J|-1} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right|.$$

## Bemerkungen:

- die Summe läuft über alle nicht-leeren Teilmengen von  $[n] = \{1, \dots, n\}$
- für die 1-elementigen Mengen  $J = \{j\}$  erhält man die Summanden  $|A_j|$
- für  $n = 2$  und  $3$  erhalten wir die bekannten Formeln

# Siebformel – Prinzip von Inklusion und Exklusion

## Satz (Siebformel)

Für endliche Mengen  $A_1, \dots, A_n$  gilt

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{\emptyset \neq J \in \mathcal{P}([n])} (-1)^{|J|-1} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right|.$$

## Bemerkungen:

- die Summe läuft über alle nicht-leeren Teilmengen von  $[n] = \{1, \dots, n\}$
- für die 1-elementigen Mengen  $J = \{j\}$  erhält man die Summanden  $|A_j|$
- für  $n = 2$  und  $3$  erhalten wir die bekannten Formeln
- Durchschnitte mit leerer Indexmenge definiert man als Grundmenge,

# Siebformel – Prinzip von Inklusion und Exklusion

## Satz (Siebformel)

Für endliche Mengen  $A_1, \dots, A_n$  gilt

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{\emptyset \neq J \in \mathcal{P}([n])} (-1)^{|J|-1} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right|.$$

## Bemerkungen:

- die Summe läuft über alle nicht-leeren Teilmengen von  $[n] = \{1, \dots, n\}$
- für die 1-elementigen Mengen  $J = \{j\}$  erhält man die Summanden  $|A_j|$
- für  $n = 2$  und  $3$  erhalten wir die bekannten Formeln
- Durchschnitte mit leerer Indexmenge definiert man als Grundmenge, hier  $\bigcap_{j \in \emptyset} A_j = \bigcup_{i=1}^n A_i$ ,

# Siebformel – Prinzip von Inklusion und Exklusion

## Satz (Siebformel)

Für endliche Mengen  $A_1, \dots, A_n$  gilt

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{\emptyset \neq J \in \mathcal{P}([n])} (-1)^{|J|-1} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right|.$$

## Bemerkungen:

- die Summe läuft über alle nicht-leeren Teilmengen von  $[n] = \{1, \dots, n\}$
- für die 1-elementigen Mengen  $J = \{j\}$  erhält man die Summanden  $|A_j|$
- für  $n = 2$  und  $3$  erhalten wir die bekannten Formeln
- Durchschnitte mit leerer Indexmenge definiert man als Grundmenge, hier  $\bigcap_{j \in \emptyset} A_j = \bigcup_{i=1}^n A_i$ , und so erhält man durch umstellen die elegante Identität

$$\sum_{J \in \mathcal{P}([n])} (-1)^{|J|} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right| = 0$$

# Nützliches Lemma

# Nützliches Lemma

## Lemma

Für jede natürliche Zahl  $\ell \geq 1$  und jede  $\ell$ -elementige Menge gibt es genauso viele Teilmengen mit gerader, wie mit ungerader Anzahl von Elementen.



# Nützliches Lemma

## Lemma

Für jede natürliche Zahl  $l \geq 1$  und jede  $l$ -elementige Menge gibt es genauso viele Teilmengen mit gerader, wie mit ungerader Anzahl von Elementen.

**Beweis:** Sei  $L$  eine nicht-leere  $l$ -elementige Menge.

# Nützliches Lemma

## Lemma

Für jede natürliche Zahl  $\ell \geq 1$  und jede  $\ell$ -elementige Menge gibt es genauso viele Teilmengen mit gerader, wie mit ungerader Anzahl von Elementen.

**Beweis:** Sei  $L$  eine nicht-leere  $\ell$ -elementige Menge. Wegen  $\ell > 0$  folgt aus dem binomischen Lehrsatz

$$0 = (1 - 1)^\ell = \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} (-1)^k.$$

# Nützliches Lemma

## Lemma

Für jede natürliche Zahl  $\ell \geq 1$  und jede  $\ell$ -elementige Menge gibt es genauso viele Teilmengen mit gerader, wie mit ungerader Anzahl von Elementen.

**Beweis:** Sei  $L$  eine nicht-leere  $\ell$ -elementige Menge. Wegen  $\ell > 0$  folgt aus dem binomischen Lehrsatz

$$0 = (1 - 1)^\ell = \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} (-1)^k.$$

Durch Umstellen erhalten wir

$$\begin{aligned} |\{K \subseteq L: |K| \text{ ungerade}\}| &= \sum_{\substack{0 \leq k \leq \ell \\ k \text{ ungerade}}} \binom{\ell}{k} \\ &= \sum_{\substack{0 \leq k \leq \ell \\ k \text{ gerade}}} \binom{\ell}{k} = |\{K \subseteq L: |K| \text{ gerade}\}| \end{aligned}$$

# Nützliches Lemma

## Lemma

Für jede natürliche Zahl  $\ell \geq 1$  und jede  $\ell$ -elementige Menge gibt es genauso viele Teilmengen mit gerader, wie mit ungerader Anzahl von Elementen.

**Beweis:** Sei  $L$  eine nicht-leere  $\ell$ -elementige Menge. Wegen  $\ell > 0$  folgt aus dem binomischen Lehrsatz

$$0 = (1 - 1)^\ell = \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} (-1)^k.$$

Durch Umstellen erhalten wir

$$\begin{aligned} |\{K \subseteq L: |K| \text{ ungerade}\}| &= \sum_{\substack{0 \leq k \leq \ell \\ k \text{ ungerade}}} \binom{\ell}{k} \\ &= \sum_{\substack{0 \leq k \leq \ell \\ k \text{ gerade}}} \binom{\ell}{k} = |\{K \subseteq L: |K| \text{ gerade}\}| \end{aligned}$$



# Beweis der Siebformel

## Siebformel

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{\emptyset \neq J \in \mathcal{P}([n])} (-1)^{|J|-1} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right|.$$

# Beweis der Siebformel

## Siebformel

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{\emptyset \neq J \in \mathcal{P}([n])} (-1)^{|J|-1} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right|.$$

**Beweis:** Sei  $x \in \bigcup_{i=1}^n A_i$  beliebig und  $I_x = \{i \in [n] : x \in A_i\}$ .

# Beweis der Siebformel

## Siebformel

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{\emptyset \neq J \in \mathcal{P}([n])} (-1)^{|J|-1} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right|.$$

**Beweis:** Sei  $x \in \bigcup_{i=1}^n A_i$  beliebig und  $I_x = \{i \in [n] : x \in A_i\}$ .

- $x$  wird in  $\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right|$  genau einmal gezählt

# Beweis der Siebformel

## Siebformel

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{\emptyset \neq J \in \mathcal{P}([n])} (-1)^{|J|-1} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right|.$$

**Beweis:** Sei  $x \in \bigcup_{i=1}^n A_i$  beliebig und  $I_x = \{i \in [n] : x \in A_i\}$ .

- $x$  wird in  $\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right|$  genau einmal gezählt
- $x$  trägt zur Summe  $\sum_{\emptyset \neq J \in \mathcal{P}([n])} (-1)^{|J|-1} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right|$  bei  $\iff$



# Beweis der Siebformel

## Siebformel

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{\emptyset \neq J \in \mathcal{P}([n])} (-1)^{|J|-1} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right|.$$

**Beweis:** Sei  $x \in \bigcup_{i=1}^n A_i$  beliebig und  $I_x = \{i \in [n] : x \in A_i\}$ .

- $x$  wird in  $\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right|$  genau einmal gezählt
- $x$  trägt zur Summe  $\sum_{\emptyset \neq J \in \mathcal{P}([n])} (-1)^{|J|-1} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right|$  bei  $\iff J \subseteq I_x, J \neq \emptyset$

# Beweis der Siebformel

## Siebformel

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{\emptyset \neq J \in \mathcal{P}([n])} (-1)^{|J|-1} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right|.$$

**Beweis:** Sei  $x \in \bigcup_{i=1}^n A_i$  beliebig und  $I_x = \{i \in [n] : x \in A_i\}$ .

- $x$  wird in  $\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right|$  genau einmal gezählt
  - $x$  trägt zur Summe  $\sum_{\emptyset \neq J \in \mathcal{P}([n])} (-1)^{|J|-1} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right|$  bei  $\iff J \subseteq I_x, J \neq \emptyset$
- $\Rightarrow x$  trägt in der Summe genau  $\sum_{\emptyset \neq J \in \mathcal{P}(I_x)} (-1)^{|J|-1}$  bei

# Beweis der Siebformel

## Siebformel

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{\emptyset \neq J \in \mathcal{P}([n])} (-1)^{|J|-1} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right|.$$

**Beweis:** Sei  $x \in \bigcup_{i=1}^n A_i$  beliebig und  $I_x = \{i \in [n] : x \in A_i\}$ .

- $x$  wird in  $\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right|$  genau einmal gezählt
  - $x$  trägt zur Summe  $\sum_{\emptyset \neq J \in \mathcal{P}([n])} (-1)^{|J|-1} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right|$  bei  $\iff J \subseteq I_x, J \neq \emptyset$
- $\Rightarrow x$  trägt in der Summe genau  $\sum_{\emptyset \neq J \in \mathcal{P}(I_x)} (-1)^{|J|-1}$  bei

Wegen der Definition ist  $I_x \neq \emptyset$  und  $\ell := |I_x| \geq 1$

# Beweis der Siebformel

## Siebformel

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{\emptyset \neq J \in \mathcal{P}([n])} (-1)^{|J|-1} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right|.$$

**Beweis:** Sei  $x \in \bigcup_{i=1}^n A_i$  beliebig und  $I_x = \{i \in [n] : x \in A_i\}$ .

- $x$  wird in  $\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right|$  genau einmal gezählt
  - $x$  trägt zur Summe  $\sum_{\emptyset \neq J \in \mathcal{P}([n])} (-1)^{|J|-1} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right|$  bei  $\iff J \subseteq I_x, J \neq \emptyset$
- $\Rightarrow x$  trägt in der Summe genau  $\sum_{\emptyset \neq J \in \mathcal{P}(I_x)} (-1)^{|J|-1}$  bei

Wegen der Definition ist  $I_x \neq \emptyset$  und  $\ell := |I_x| \geq 1$  und wegen dem Lemma gilt

# Beweis der Siebformel

## Siebformel

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{\emptyset \neq J \in \mathcal{P}([n])} (-1)^{|J|-1} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right|.$$

**Beweis:** Sei  $x \in \bigcup_{i=1}^n A_i$  beliebig und  $I_x = \{i \in [n] : x \in A_i\}$ .

- $x$  wird in  $\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right|$  genau einmal gezählt
  - $x$  trägt zur Summe  $\sum_{\emptyset \neq J \in \mathcal{P}([n])} (-1)^{|J|-1} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right|$  bei  $\iff J \subseteq I_x, J \neq \emptyset$
- $\Rightarrow x$  trägt in der Summe genau  $\sum_{\emptyset \neq J \in \mathcal{P}(I_x)} (-1)^{|J|-1}$  bei

Wegen der Definition ist  $I_x \neq \emptyset$  und  $\ell := |I_x| \geq 1$  und wegen dem Lemma gilt

$$0 = \sum_{j=0}^{\ell} \binom{\ell}{j} (-1)^j =$$

# Beweis der Siebformel

## Siebformel

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{\emptyset \neq J \in \mathcal{P}([n])} (-1)^{|J|-1} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right|.$$

**Beweis:** Sei  $x \in \bigcup_{i=1}^n A_i$  beliebig und  $I_x = \{i \in [n] : x \in A_i\}$ .

- $x$  wird in  $\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right|$  genau einmal gezählt
  - $x$  trägt zur Summe  $\sum_{\emptyset \neq J \in \mathcal{P}([n])} (-1)^{|J|-1} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right|$  bei  $\iff J \subseteq I_x, J \neq \emptyset$
- $\Rightarrow x$  trägt in der Summe genau  $\sum_{\emptyset \neq J \in \mathcal{P}(I_x)} (-1)^{|J|-1}$  bei

Wegen der Definition ist  $I_x \neq \emptyset$  und  $\ell := |I_x| \geq 1$  und wegen dem Lemma gilt

$$0 = \sum_{j=0}^{\ell} \binom{\ell}{j} (-1)^j = \sum_{J \in \mathcal{P}(I_x)} (-1)^{|J|} =$$

# Beweis der Siebformel

## Siebformel

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{\emptyset \neq J \in \mathcal{P}([n])} (-1)^{|J|-1} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right|.$$

**Beweis:** Sei  $x \in \bigcup_{i=1}^n A_i$  beliebig und  $I_x = \{i \in [n] : x \in A_i\}$ .

- $x$  wird in  $\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right|$  genau einmal gezählt
  - $x$  trägt zur Summe  $\sum_{\emptyset \neq J \in \mathcal{P}([n])} (-1)^{|J|-1} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right|$  bei  $\iff J \subseteq I_x, J \neq \emptyset$
- $\Rightarrow x$  trägt in der Summe genau  $\sum_{\emptyset \neq J \in \mathcal{P}(I_x)} (-1)^{|J|-1}$  bei

Wegen der Definition ist  $I_x \neq \emptyset$  und  $\ell := |I_x| \geq 1$  und wegen dem Lemma gilt

$$0 = \sum_{j=0}^{\ell} \binom{\ell}{j} (-1)^j = \sum_{J \in \mathcal{P}(I_x)} (-1)^{|J|} = (-1)^0 + \sum_{\emptyset \neq J \in \mathcal{P}(I_x)} (-1)^{|J|}.$$

# Beweis der Siebformel

## Siebformel

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{\emptyset \neq J \in \mathcal{P}([n])} (-1)^{|J|-1} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right|.$$

**Beweis:** Sei  $x \in \bigcup_{i=1}^n A_i$  beliebig und  $I_x = \{i \in [n] : x \in A_i\}$ .

- $x$  wird in  $\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right|$  genau einmal gezählt
  - $x$  trägt zur Summe  $\sum_{\emptyset \neq J \in \mathcal{P}([n])} (-1)^{|J|-1} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right|$  bei  $\iff J \subseteq I_x, J \neq \emptyset$
- $\Rightarrow x$  trägt in der Summe genau  $\sum_{\emptyset \neq J \in \mathcal{P}(I_x)} (-1)^{|J|-1}$  bei

Wegen der Definition ist  $I_x \neq \emptyset$  und  $\ell := |I_x| \geq 1$  und wegen dem Lemma gilt

$$0 = \sum_{j=0}^{\ell} \binom{\ell}{j} (-1)^j = \sum_{J \in \mathcal{P}(I_x)} (-1)^{|J|} = (-1)^0 + \sum_{\emptyset \neq J \in \mathcal{P}(I_x)} (-1)^{|J|}.$$

Durch Umstellen und Division mit  $(-1)$  erhalten wir also  $\sum_{\emptyset \neq J \in \mathcal{P}(I_x)} (-1)^{|J|-1} = 1$ .



# Beweis der Siebformel

## Siebformel

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{\emptyset \neq J \in \mathcal{P}([n])} (-1)^{|J|-1} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right|.$$

**Beweis:** Sei  $x \in \bigcup_{i=1}^n A_i$  beliebig und  $I_x = \{i \in [n] : x \in A_i\}$ .

- $x$  wird in  $\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right|$  genau einmal gezählt
  - $x$  trägt zur Summe  $\sum_{\emptyset \neq J \in \mathcal{P}([n])} (-1)^{|J|-1} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right|$  bei  $\iff J \subseteq I_x, J \neq \emptyset$
- $\Rightarrow x$  trägt in der Summe genau  $\sum_{\emptyset \neq J \in \mathcal{P}(I_x)} (-1)^{|J|-1}$  bei

Wegen der Definition ist  $I_x \neq \emptyset$  und  $\ell := |I_x| \geq 1$  und wegen dem Lemma gilt

$$0 = \sum_{j=0}^{\ell} \binom{\ell}{j} (-1)^j = \sum_{J \in \mathcal{P}(I_x)} (-1)^{|J|} = (-1)^0 + \sum_{\emptyset \neq J \in \mathcal{P}(I_x)} (-1)^{|J|}.$$

Durch Umstellen und Division mit  $(-1)$  erhalten wir also  $\sum_{\emptyset \neq J \in \mathcal{P}(I_x)} (-1)^{|J|-1} = 1$ .

$\Rightarrow x$  wird in  $\sum_{\emptyset \neq J \in \mathcal{P}([n])} (-1)^{|J|-1} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right|$  genau einmal gezählt  $\square$

# Fixpunktfreie Permutation

## Briefe falsch verschicken

Es werden  $n$  unterschiedliche Briefe zufällig auf  $n$  voradressierte Briefumschläge verteilt. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass **jeder** Brief in einen falschen Umschlag kommt?

# Fixpunktfreie Permutation

## Briefe falsch verschicken

Es werden  $n$  unterschiedliche Briefe zufällig auf  $n$  voradressierte Briefumschläge verteilt. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass **jeder** Brief in einen falschen Umschlag kommt?

**Mathematisch:** Eine Permutation  $\pi: [n] \rightarrow [n]$  heisst **fixpunktfrei**, falls  $\pi(i) \neq i$  für alle  $i \in [n]$ .

# Fixpunktfreie Permutation

## Briefe falsch verschicken

Es werden  $n$  unterschiedliche Briefe zufällig auf  $n$  voradressierte Briefumschläge verteilt. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass **jeder** Brief in einen falschen Umschlag kommt?

**Mathematisch:** Eine Permutation  $\pi: [n] \rightarrow [n]$  heisst **fixpunktfrei**, falls  $\pi(i) \neq i$  für alle  $i \in [n]$ . Wieviele Permutationen auf  $[n]$  sind fixpunktfrei?

# Fixpunktfreie Permutation

## Briefe falsch verschicken

Es werden  $n$  unterschiedliche Briefe zufällig auf  $n$  voradressierte Briefumschläge verteilt. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass **jeder** Brief in einen falschen Umschlag kommt?

**Mathematisch:** Eine Permutation  $\pi: [n] \rightarrow [n]$  heisst **fixpunktfrei**, falls  $\pi(i) \neq i$  für alle  $i \in [n]$ . Wieviele Permutationen auf  $[n]$  sind fixpunktfrei?

## Antwort

EULERSche Zahl  $e = 2,718281828\dots$

Es gibt ungefähr (für große  $n$ )  $n!/e$  fixpunktfreie Permutationen auf  $[n]$ ,

# Fixpunktfreie Permutation

## Briefe falsch verschicken

Es werden  $n$  unterschiedliche Briefe zufällig auf  $n$  voradressierte Briefumschläge verteilt. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass **jeder** Brief in einen falschen Umschlag kommt?

**Mathematisch:** Eine Permutation  $\pi: [n] \rightarrow [n]$  heisst **fixpunktfrei**, falls  $\pi(i) \neq i$  für alle  $i \in [n]$ . Wieviele Permutationen auf  $[n]$  sind fixpunktfrei?

## Antwort

EULERSche Zahl  $e = 2,718281828\dots$

Es gibt ungefähr (für große  $n$ )  $n!/e$  fixpunktfreie Permutationen auf  $[n]$ , d. h. mit Wahrscheinlichkeit  $1/e \approx 0,367$  liegen alle Briefe im falschen Umschlag für große  $n$ .

# Fixpunktfreie Permutation

## Briefe falsch verschicken

Es werden  $n$  unterschiedliche Briefe zufällig auf  $n$  voradressierte Briefumschläge verteilt. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass **jeder** Brief in einen falschen Umschlag kommt?

**Mathematisch:** Eine Permutation  $\pi: [n] \rightarrow [n]$  heisst **fixpunktfrei**, falls  $\pi(i) \neq i$  für alle  $i \in [n]$ . Wieviele Permutationen auf  $[n]$  sind fixpunktfrei?

## Antwort

EULERSche Zahl  $e = 2,718281828\dots$

Es gibt ungefähr (für große  $n$ )  $n!/e$  fixpunktfreie Permutationen auf  $[n]$ , d. h. mit Wahrscheinlichkeit  $1/e \approx 0,367$  liegen alle Briefe im falschen Umschlag für große  $n$ . Die Wahrscheinlichkeit liegt zwischen 0,36 und 0,37 für alle  $n \geq 5$ .

# Fixpunktfreie Permutation

## Briefe falsch verschicken

Es werden  $n$  unterschiedliche Briefe zufällig auf  $n$  voradressierte Briefumschläge verteilt. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass **jeder** Brief in einen falschen Umschlag kommt?

**Mathematisch:** Eine Permutation  $\pi: [n] \rightarrow [n]$  heisst **fixpunktfrei**, falls  $\pi(i) \neq i$  für alle  $i \in [n]$ . Wieviele Permutationen auf  $[n]$  sind fixpunktfrei?

## Antwort

EULERSche Zahl  $e = 2,718281828\dots$

Es gibt ungefähr (für große  $n$ )  $n!/e$  fixpunktfreie Permutationen auf  $[n]$ , d. h. mit Wahrscheinlichkeit  $1/e \approx 0,367$  liegen alle Briefe im falschen Umschlag für große  $n$ . Die Wahrscheinlichkeit liegt zwischen 0,36 und 0,37 für alle  $n \geq 5$ .

**Beweis:** Sei  $A_i$  die Menge der Permutationen  $\pi$  auf  $[n]$  mit Fixpunkt  $\pi(i) = i$ .



# Fixpunktfreie Permutation

## Briefe falsch verschicken

Es werden  $n$  unterschiedliche Briefe zufällig auf  $n$  voradressierte Briefumschläge verteilt. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass **jeder** Brief in einen falschen Umschlag kommt?

**Mathematisch:** Eine Permutation  $\pi: [n] \rightarrow [n]$  heisst **fixpunktfrei**, falls  $\pi(i) \neq i$  für alle  $i \in [n]$ . Wieviele Permutationen auf  $[n]$  sind fixpunktfrei?

## Antwort

EULERSche Zahl  $e = 2,718281828\dots$

Es gibt ungefähr (für große  $n$ )  $n!/e$  fixpunktfreie Permutationen auf  $[n]$ , d. h. mit Wahrscheinlichkeit  $1/e \approx 0,367$  liegen alle Briefe im falschen Umschlag für große  $n$ . Die Wahrscheinlichkeit liegt zwischen 0,36 und 0,37 für alle  $n \geq 5$ .

**Beweis:** Sei  $A_i$  die Menge der Permutationen  $\pi$  auf  $[n]$  mit Fixpunkt  $\pi(i) = i$ . Die Siebformel ergibt also für die Anzahl der Permutationen **mit** Fixpunkt

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{\emptyset \neq J \in \mathcal{P}([n])} (-1)^{|J|-1} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right| =$$

# Fixpunktfreie Permutation

## Briefe falsch verschicken

Es werden  $n$  unterschiedliche Briefe zufällig auf  $n$  voradressierte Briefumschläge verteilt. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass **jeder** Brief in einen falschen Umschlag kommt?

**Mathematisch:** Eine Permutation  $\pi: [n] \rightarrow [n]$  heisst **fixpunktfrei**, falls  $\pi(i) \neq i$  für alle  $i \in [n]$ . Wieviele Permutationen auf  $[n]$  sind fixpunktfrei?

## Antwort

EULERSche Zahl  $e = 2,718281828\dots$

Es gibt ungefähr (für große  $n$ )  $n!/e$  fixpunktfreie Permutationen auf  $[n]$ , d. h. mit Wahrscheinlichkeit  $1/e \approx 0,367$  liegen alle Briefe im falschen Umschlag für große  $n$ . Die Wahrscheinlichkeit liegt zwischen 0,36 und 0,37 für alle  $n \geq 5$ .

**Beweis:** Sei  $A_i$  die Menge der Permutationen  $\pi$  auf  $[n]$  mit Fixpunkt  $\pi(i) = i$ . Die Siebformel ergibt also für die Anzahl der Permutationen **mit** Fixpunkt

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{\emptyset \neq J \in \mathcal{P}([n])} (-1)^{|J|-1} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right| = \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} (-1)^{j-1} (n-j)! =$$

# Fixpunktfreie Permutation

## Briefe falsch verschicken

Es werden  $n$  unterschiedliche Briefe zufällig auf  $n$  voradressierte Briefumschläge verteilt. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass **jeder** Brief in einen falschen Umschlag kommt?

**Mathematisch:** Eine Permutation  $\pi: [n] \rightarrow [n]$  heisst **fixpunktfrei**, falls  $\pi(i) \neq i$  für alle  $i \in [n]$ . Wieviele Permutationen auf  $[n]$  sind fixpunktfrei?

## Antwort

EULERSche Zahl  $e = 2,718281828\dots$

Es gibt ungefähr (für große  $n$ )  $n!/e$  fixpunktfreie Permutationen auf  $[n]$ , d. h. mit Wahrscheinlichkeit  $1/e \approx 0,367$  liegen alle Briefe im falschen Umschlag für große  $n$ . Die Wahrscheinlichkeit liegt zwischen 0,36 und 0,37 für alle  $n \geq 5$ .

**Beweis:** Sei  $A_i$  die Menge der Permutationen  $\pi$  auf  $[n]$  mit Fixpunkt  $\pi(i) = i$ . Die Siebformel ergibt also für die Anzahl der Permutationen **mit** Fixpunkt

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{\emptyset \neq J \in \mathcal{P}([n])} (-1)^{|J|-1} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right| = \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} (-1)^{j-1} (n-j)! = n! \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j-1}}{j!}.$$

# Fixpunktfreie Permutation

## Briefe falsch verschicken

Es werden  $n$  unterschiedliche Briefe zufällig auf  $n$  voradressierte Briefumschläge verteilt. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass **jeder** Brief in einen falschen Umschlag kommt?

**Mathematisch:** Eine Permutation  $\pi: [n] \rightarrow [n]$  heisst **fixpunktfrei**, falls  $\pi(i) \neq i$  für alle  $i \in [n]$ . Wieviele Permutationen auf  $[n]$  sind fixpunktfrei?

## Antwort

EULERSche Zahl  $e = 2,718281828\dots$

Es gibt ungefähr (für große  $n$ )  $n!/e$  fixpunktfreie Permutationen auf  $[n]$ , d. h. mit Wahrscheinlichkeit  $1/e \approx 0,367$  liegen alle Briefe im falschen Umschlag für große  $n$ . Die Wahrscheinlichkeit liegt zwischen 0,36 und 0,37 für alle  $n \geq 5$ .

**Beweis:** Sei  $A_i$  die Menge der Permutationen  $\pi$  auf  $[n]$  mit Fixpunkt  $\pi(i) = i$ . Die Siebformel ergibt also für die Anzahl der Permutationen **mit** Fixpunkt

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{\emptyset \neq J \in \mathcal{P}([n])} (-1)^{|J|-1} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right| = \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} (-1)^{j-1} (n-j)! = n! \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j-1}}{j!}.$$

Wegen  $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} = e^{-1} = 1/e$  (**Analysis**) folgt  $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j!} = 1 - 1/e$ .  $\square$

# Relationen und Graphen

# Relationen und Graphen

**Idee:** Relation  $R \subseteq M^2$  auf einer Menge  $M$  kann graphisch dargestellt werden, indem man die geordneten Paare in  $R$  als Pfeile zwischen den Elementen von  $M$  zeichnet

# Relationen und Graphen

**Idee:** Relation  $R \subseteq M^2$  auf einer Menge  $M$  kann graphisch dargestellt werden, indem man die geordneten Paare in  $R$  als Pfeile zwischen den Elementen von  $M$  zeichnet

## Definition (Gerichteter Graph)

Ein **gerichteter Graph** ist ein Paar  $D = (V, A)$  mit  $A \subseteq V^2$  und **Kantenmenge**  $A$  und **Ecken/Knotenmenge**  $V$ .

# Relationen und Graphen

**Idee:** Relation  $R \subseteq M^2$  auf einer Menge  $M$  kann graphisch dargestellt werden, indem man die geordneten Paare in  $R$  als Pfeile zwischen den Elementen von  $M$  zeichnet

## Definition (Gerichteter Graph)

Ein **gerichteter Graph** ist ein Paar  $D = (V, A)$  mit  $A \subseteq V^2$  und **Kantenmenge**  $A$  und **Ecken/Knotenmenge**  $V$ . Kanten der Form  $(v, v)$  heißen **Schlingen**.



# Relationen und Graphen

**Idee:** Relation  $R \subseteq M^2$  auf einer Menge  $M$  kann graphisch dargestellt werden, indem man die geordneten Paare in  $R$  als Pfeile zwischen den Elementen von  $M$  zeichnet

## Definition (Gerichteter Graph)

Ein **gerichteter Graph** ist ein Paar  $D = (V, A)$  mit  $A \subseteq V^2$  und **Kantenmenge**  $A$  und **Ecken/Knotenmenge**  $V$ . Kanten der Form  $(v, v)$  heißen **Schlingen**.

## Beispiel

Gerichteter Graph der Relation:

- $R := \{(1, 1), (1, 2), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (4, 5), (5, 1), (5, 3)\}$
- auf  $M := \{1, 2, 3, 4, 5\}$

# Relationen und Graphen

**Idee:** Relation  $R \subseteq M^2$  auf einer Menge  $M$  kann graphisch dargestellt werden, indem man die geordneten Paare in  $R$  als Pfeile zwischen den Elementen von  $M$  zeichnet

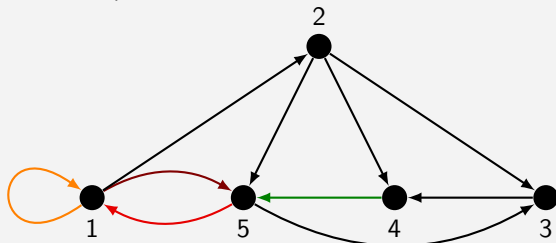
## Definition (Gerichteter Graph)

Ein **gerichteter Graph** ist ein Paar  $D = (V, A)$  mit  $A \subseteq V^2$  und **Kantenmenge**  $A$  und **Ecken/Knotenmenge**  $V$ . Kanten der Form  $(v, v)$  heißen **Schlingen**.

## Beispiel

Gerichteter Graph der Relation:

- $R := \{(1, 1), (1, 2), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (4, 5), (5, 1), (5, 3)\}$
- auf  $M := \{1, 2, 3, 4, 5\}$



# Eigenschaften von Relationen und Graphen

Sei  $R$  eine Relation auf der Menge  $V$ :

# Eigenschaften von Relationen und Graphen

Sei  $R$  eine Relation auf der Menge  $V$ :

- $R$  ist reflexiv, falls

# Eigenschaften von Relationen und Graphen

Sei  $R$  eine Relation auf der Menge  $V$ :

- $R$  ist reflexiv, falls jeder Ecke  $v \in V$  im zugehörigen gerichteten Graphen eine Schlinge hat.

# Eigenschaften von Relationen und Graphen

Sei  $R$  eine Relation auf der Menge  $V$ :

- $R$  ist reflexiv, falls jeder Ecke  $v \in V$  im zugehörigen gerichteten Graphen eine Schlinge hat.
- $R$  ist irreflexiv, falls

# Eigenschaften von Relationen und Graphen

Sei  $R$  eine Relation auf der Menge  $V$ :

- $R$  ist reflexiv, falls jeder Ecke  $v \in V$  im zugehörigen gerichteten Graphen eine Schlinge hat.
- $R$  ist irreflexiv, falls keine Ecke  $v \in V$  im zugehörigen gerichteten Graphen eine Schlinge hat.

# Eigenschaften von Relationen und Graphen

Sei  $R$  eine Relation auf der Menge  $V$ :

- $R$  ist reflexiv, falls jeder Ecke  $v \in V$  im zugehörigen gerichteten Graphen eine Schlinge hat.
- $R$  ist irreflexiv, falls keine Ecke  $v \in V$  im zugehörigen gerichteten Graphen eine Schlinge hat.
- $R$  ist symmetrisch, falls



# Eigenschaften von Relationen und Graphen

Sei  $R$  eine Relation auf der Menge  $V$ :

- $R$  ist reflexiv, falls jeder Ecke  $v \in V$  im zugehörigen gerichteten Graphen eine Schlinge hat.
- $R$  ist irreflexiv, falls keine Ecke  $v \in V$  im zugehörigen gerichteten Graphen eine Schlinge hat.
- $R$  ist symmetrisch, falls im gerichteten Graphen für jede Kante  $(u, v) \in A$  auch die „umgekehrte“ Kante  $(v, u)$  in  $A$  vorhanden ist.

# Eigenschaften von Relationen und Graphen

Sei  $R$  eine Relation auf der Menge  $V$ :

- $R$  ist reflexiv, falls jeder Ecke  $v \in V$  im zugehörigen gerichteten Graphen eine Schlinge hat.
- $R$  ist irreflexiv, falls keine Ecke  $v \in V$  im zugehörigen gerichteten Graphen eine Schlinge hat.
- $R$  ist symmetrisch, falls im gerichteten Graphen für jede Kante  $(u, v) \in A$  auch die „umgekehrte“ Kante  $(v, u)$  in  $A$  vorhanden ist.
- $R$  ist antisymmetrisch, falls

# Eigenschaften von Relationen und Graphen

Sei  $R$  eine Relation auf der Menge  $V$ :

- $R$  ist reflexiv, falls jeder Ecke  $v \in V$  im zugehörigen gerichteten Graphen eine Schlinge hat.
- $R$  ist irreflexiv, falls keine Ecke  $v \in V$  im zugehörigen gerichteten Graphen eine Schlinge hat.
- $R$  ist symmetrisch, falls im gerichteten Graphen für jede Kante  $(u, v) \in A$  auch die „umgekehrte“ Kante  $(v, u)$  in  $A$  vorhanden ist.
- $R$  ist antisymmetrisch, falls für je zwei verschiedene Ecken  $u, v \in V$  im gerichteten Graphen höchstens eine Kante vorhanden ist.

# Eigenschaften von Relationen und Graphen

Sei  $R$  eine Relation auf der Menge  $V$ :

- $R$  ist reflexiv, falls jeder Ecke  $v \in V$  im zugehörigen gerichteten Graphen eine Schlinge hat.
- $R$  ist irreflexiv, falls keine Ecke  $v \in V$  im zugehörigen gerichteten Graphen eine Schlinge hat.
- $R$  ist symmetrisch, falls im gerichteten Graphen für jede Kante  $(u, v) \in A$  auch die „umgekehrte“ Kante  $(v, u)$  in  $A$  vorhanden ist.
- $R$  ist antisymmetrisch, falls für je zwei verschiedene Ecken  $u, v \in V$  im gerichteten Graphen höchstens eine Kante vorhanden ist.
- $R$  ist transitiv, falls

# Eigenschaften von Relationen und Graphen

Sei  $R$  eine Relation auf der Menge  $V$ :

- $R$  ist reflexiv, falls jeder Ecke  $v \in V$  im zugehörigen gerichteten Graphen eine Schlinge hat.
- $R$  ist irreflexiv, falls keine Ecke  $v \in V$  im zugehörigen gerichteten Graphen eine Schlinge hat.
- $R$  ist symmetrisch, falls im gerichteten Graphen für jede Kante  $(u, v) \in A$  auch die „umgekehrte“ Kante  $(v, u)$  in  $A$  vorhanden ist.
- $R$  ist antisymmetrisch, falls für je zwei verschiedene Ecken  $u, v \in V$  im gerichteten Graphen höchstens eine Kante vorhanden ist.
- $R$  ist transitiv, falls für den gerichteten Graphen folgendes gilt:

# Eigenschaften von Relationen und Graphen

Sei  $R$  eine Relation auf der Menge  $V$ :

- $R$  ist reflexiv, falls jeder Ecke  $v \in V$  im zugehörigen gerichteten Graphen eine Schlinge hat.
- $R$  ist irreflexiv, falls keine Ecke  $v \in V$  im zugehörigen gerichteten Graphen eine Schlinge hat.
- $R$  ist symmetrisch, falls im gerichteten Graphen für jede Kante  $(u, v) \in A$  auch die „umgekehrte“ Kante  $(v, u)$  in  $A$  vorhanden ist.
- $R$  ist antisymmetrisch, falls für je zwei verschiedene Ecken  $u, v \in V$  im gerichteten Graphen höchstens eine Kante vorhanden ist.
- $R$  ist transitiv, falls für den gerichteten Graphen folgendes gilt: Immer wenn man entlang der gerichteten Kanten einen Weg (bzw. Kreis falls  $u = v$ ) von einer Ecke  $u$  zu einer Ecke  $v$  finden kann, dann ist bereits die Kante  $(u, v)$  vorhanden.

# HASSEdiagramme von Ordnungsrelationen

Ordnungsrelation/Teilordnung/partielle Ordnung:

# HASSEdiagramme von Ordnungsrelationen

Ordnungsrelation/Teilordnung/partielle Ordnung:

reflexiv, antisymmetrisch, transitiv



# HASSEdiagramme von Ordnungsrelationen

Ordnungsrelation/Teilordnung/partielle Ordnung:

reflexiv, antisymmetrisch, transitiv

**Vereinfachte Darstellung:**

# HASSEdiagramme von Ordnungsrelationen

Ordnungsrelation/Teilordnung/partielle Ordnung:

reflexiv, antisymmetrisch, transitiv

**Vereinfachte Darstellung:**

- reflexiv  $\Rightarrow$  Graph hat an jeder Ecke eine Schlinge

$\longrightarrow$  Schlingen einfach weglassen

# HASSEdiagramme von Ordnungsrelationen

Ordnungsrelation/Teilordnung/partielle Ordnung:

reflexiv, antisymmetrisch, transitiv

**Vereinfachte Darstellung:**

- reflexiv  $\Rightarrow$  Graph hat an jeder Ecke eine Schlinge  
 $\longrightarrow$  Schlingen einfach weglassen
- transitiv  $\Rightarrow$  Wege erzwingen „abkürzende Kanten“  
 $\longrightarrow$  nur Wege ohne Abkürzungen zeichnen

# HASSEdiagramme von Ordnungsrelationen

Ordnungsrelation/Teilordnung/partielle Ordnung:

reflexiv, antisymmetrisch, transitiv

**Vereinfachte Darstellung:**

- reflexiv  $\Rightarrow$  Graph hat an jeder Ecke eine Schlinge  
 $\longrightarrow$  Schlingen einfach weglassen
  - transitiv  $\Rightarrow$  Wege erzwingen „abkürzende Kanten“  
 $\longrightarrow$  nur Wege ohne Abkürzungen zeichnen
- $\Rightarrow (u, v)$  nur darstellen, wenn es **keinen** gerichteten Weg von  $u$  nach  $v$  mit mindestens zwei Kanten im Graphen der Relation gibt

# HASSEdiagramme von Ordnungsrelationen

Ordnungsrelation/Teilordnung/partielle Ordnung:

reflexiv, antisymmetrisch, transitiv

**Vereinfachte Darstellung:**

- reflexiv  $\Rightarrow$  Graph hat an jeder Ecke eine Schlinge  
 $\longrightarrow$  Schlingen einfach weglassen
- transitiv  $\Rightarrow$  Wege erzwingen „abkürzende Kanten“  
 $\longrightarrow$  nur Wege ohne Abkürzungen zeichnen  
 $\Rightarrow (u, v)$  nur darstellen, wenn es **keinen** gerichteten Weg von  $u$  nach  $v$  mit mindestens zwei Kanten im Graphen der Relation gibt
- restlichen Graphen so zeichnen, dass alle Pfeilspitzen nach oben zeigen  
 $\longrightarrow$  und dann Pfeilspitzen weglassen

# HASSEdiagramme von Ordnungsrelationen

Ordnungsrelation/Teilordnung/partielle Ordnung:

reflexiv, antisymmetrisch, transitiv

**Vereinfachte Darstellung:**

- reflexiv  $\Rightarrow$  Graph hat an jeder Ecke eine Schlinge  
 $\longrightarrow$  Schlingen einfach weglassen
- transitiv  $\Rightarrow$  Wege erzwingen „abkürzende Kanten“  
 $\longrightarrow$  nur Wege ohne Abkürzungen zeichnen  
 $\Rightarrow (u, v)$  nur darstellen, wenn es **keinen** gerichteten Weg von  $u$  nach  $v$  mit mindestens zwei Kanten im Graphen der Relation gibt
- restlichen Graphen so zeichnen, dass alle Pfeilspitzen nach oben zeigen  
 $\longrightarrow$  und dann Pfeilspitzen weglassen
  
- die sich ergebende Darstellung einer Ordnungsrelation heißt:

HASSEdiagramm

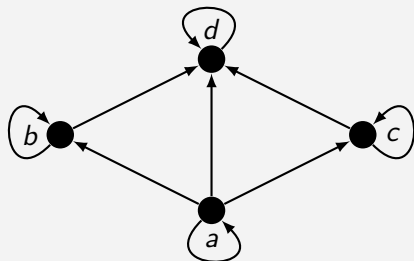
# HASSEdiagramme – Beispiel

- $R := \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (a, c), (a, d), (b, d), (c, d)\}$
- auf  $M := \{a, b, c, d\}$

# HASSEdiagramme – Beispiel

- $R := \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (a, c), (a, d), (b, d), (c, d)\}$
- auf  $M := \{a, b, c, d\}$

gerichteter Graph von  $R$

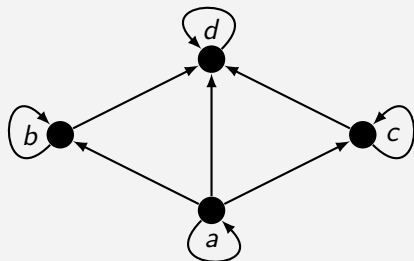




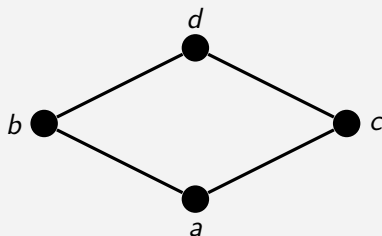
# HASSEdiagramme – Beispiel

- $R := \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (a, c), (a, d), (b, d), (c, d)\}$
- auf  $M := \{a, b, c, d\}$

gerichteter Graph von  $R$



HASSEdiagramm von  $R$



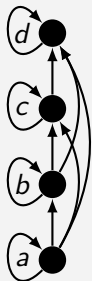
## HASSEdiagramme – Beispiel 2

- $R := \{(a, a), \dots, (d, d), (a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (b, d), (c, d)\}$
- auf  $M := \{a, b, c, d\}$

## HASSEdiagramme – Beispiel 2

- $R := \{(a, a), \dots, (d, d), (a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (b, d), (c, d)\}$
- auf  $M := \{a, b, c, d\}$

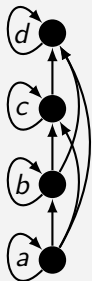
gerichteter Graph von  $R$



## HASSEdiagramme – Beispiel 2

- $R := \{(a, a), \dots, (d, d), (a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (b, d), (c, d)\}$
- auf  $M := \{a, b, c, d\}$

gerichteter Graph von  $R$



HASSEdiagramm von  $R$



# Hüllenbildung

## Idee:

- falls Relation  $R$  nicht ... erfüllt, dann erweitere/verringere  $R$  so wenig wie möglich bis ... erfüllt ist

# Hüllenbildung

## Idee:

- falls Relation  $R$  nicht ... erfüllt, dann erweitere/verringere  $R$  so wenig wie möglich bis ... erfüllt ist

## Definition (Reflexive Hülle)

Für eine Relation  $R$  auf einer Menge  $M$  sei

$$R' := R \cup \{(x, x) : x \in M\}.$$

# Hüllenbildung

## Idee:

- falls Relation  $R$  nicht ... erfüllt, dann erweitere/verringere  $R$  so wenig wie möglich bis ... erfüllt ist

## Definition (Reflexive Hülle)

Für eine Relation  $R$  auf einer Menge  $M$  sei

$$R' := R \cup \{(x, x) : x \in M\}.$$

Dann ist  $R'$  die kleinste reflexive Relation, die  $R$  umfasst, und diese wird die **reflexive Hülle** von  $R$  genannt.

# Hüllenbildung

## Idee:

- falls Relation  $R$  nicht ... erfüllt, dann erweitere/verringere  $R$  so **wenig** wie möglich bis ... erfüllt ist

## Definition (Reflexive Hülle)

Für eine Relation  $R$  auf einer Menge  $M$  sei

$$R' := R \cup \{(x, x) : x \in M\}.$$

Dann ist  $R'$  die kleinste reflexive Relation, die  $R$  umfasst, und diese wird die **reflexive Hülle** von  $R$  genannt.

**Bsp.:** Für  $<$  auf  $\mathbb{N}$  ist  $\leq$  die reflexive Hülle.

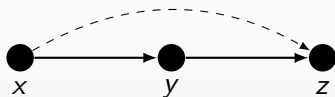


# Transitive Hülle – Beispiele

- $R_1 := \{(x, y), (y, z)\}$  auf  $M_1 = \{x, y, z\}$

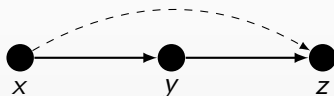
# Transitive Hülle – Beispiele

- $R_1 := \{(x, y), (y, z)\}$  auf  $M_1 = \{x, y, z\}$



# Transitive Hülle – Beispiele

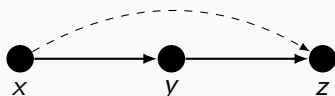
- $R_1 := \{(x, y), (y, z)\}$  auf  $M_1 = \{x, y, z\}$



⇒ für Transitivität fehlt  $(x, z)$

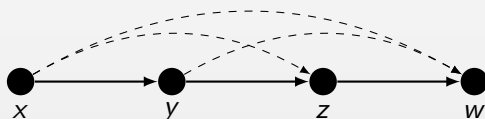
# Transitive Hülle – Beispiele

- $R_1 := \{(x, y), (y, z)\}$  auf  $M_1 = \{x, y, z\}$



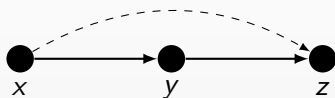
⇒ für Transitivität fehlt  $(x, z)$

- $R_2 := \{(x, y), (y, z), (z, w)\}$  auf  $M_2 = \{x, y, z, w\}$



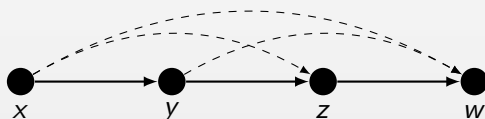
# Transitive Hülle – Beispiele

- $R_1 := \{(x, y), (y, z)\}$  auf  $M_1 = \{x, y, z\}$



⇒ für Transitivität fehlt  $(x, z)$

- $R_2 := \{(x, y), (y, z), (z, w)\}$  auf  $M_2 = \{x, y, z, w\}$



⇒ für Transitivität fehlen nicht nur  $(x, z)$  und  $(y, w)$ , sondern auch  $(x, w)$

# Transitive Hülle

Allgemein:

- wir brauchen für Transitivität die Eigenschaft:

# Transitive Hülle

Allgemein:

- wir brauchen für Transitivität die Eigenschaft:

$$\text{falls } (x_1, x_2), \dots, (x_{n-1}, x_n) \in R \implies (x_1, x_n) \in R$$

# Transitive Hülle

Allgemein:

- wir brauchen für Transitivität die Eigenschaft:

$$\text{falls } (x_1, x_2), \dots, (x_{n-1}, x_n) \in R \implies (x_1, x_n) \in R$$

## Definition (Transitive Hülle)

Für eine Relation  $R$  auf einer Menge  $A$  ist



# Transitive Hülle

Allgemein:

- wir brauchen für Transitivität die Eigenschaft:

$$\text{falls } (x_1, x_2), \dots, (x_{n-1}, x_n) \in R \implies (x_1, x_n) \in R$$

## Definition (Transitive Hülle)

Für eine Relation  $R$  auf einer Menge  $A$  ist

$$R^+ := \{(x, y) : \text{es gibt } n \geq 2 \text{ und } x_1, \dots, x_n \in A \text{ mit} \\ x = x_1, y = x_n \text{ und } (x_1, x_2), \dots, (x_{n-1}, x_n) \in R\}$$

# Transitive Hülle

Allgemein:

- wir brauchen für Transitivität die Eigenschaft:

$$\text{falls } (x_1, x_2), \dots, (x_{n-1}, x_n) \in R \implies (x_1, x_n) \in R$$

## Definition (Transitive Hülle)

Für eine Relation  $R$  auf einer Menge  $A$  ist

$$R^+ := \{(x, y) : \text{es gibt } n \geq 2 \text{ und } x_1, \dots, x_n \in A \text{ mit} \\ x = x_1, y = x_n \text{ und } (x_1, x_2), \dots, (x_{n-1}, x_n) \in R\}$$

die kleinste transitive Relation mit  $R \subseteq R^+$ , die **transitive Hülle** von  $R$  heißt.

# Transitive Hülle

Allgemein:

- wir brauchen für Transitivität die Eigenschaft:

$$\text{falls } (x_1, x_2), \dots, (x_{n-1}, x_n) \in R \implies (x_1, x_n) \in R$$

## Definition (Transitive Hülle)

Für eine Relation  $R$  auf einer Menge  $A$  ist

$$R^+ := \{(x, y) : \text{es gibt } n \geq 2 \text{ und } x_1, \dots, x_n \in A \text{ mit} \\ x = x_1, y = x_n \text{ und } (x_1, x_2), \dots, (x_{n-1}, x_n) \in R\}$$

die kleinste transitive Relation mit  $R \subseteq R^+$ , die **transitive Hülle** von  $R$  heißt.

Des Weiteren ist  $R^* = R^+ \cup R'$  die **reflexive, transitive Hülle** von  $R$  und  $R^*$  ist die kleinste reflexive, transitive Relation, die  $R$  umfasst.

# Transitive Hülle

Allgemein:

- wir brauchen für Transitivität die Eigenschaft:

$$\text{falls } (x_1, x_2), \dots, (x_{n-1}, x_n) \in R \implies (x_1, x_n) \in R$$

## Definition (Transitive Hülle)

Für eine Relation  $R$  auf einer Menge  $A$  ist

$$R^+ := \{(x, y) : \text{es gibt } n \geq 2 \text{ und } x_1, \dots, x_n \in A \text{ mit} \\ x = x_1, y = x_n \text{ und } (x_1, x_2), \dots, (x_{n-1}, x_n) \in R\}$$

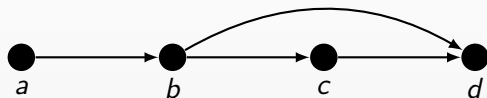
die kleinste transitive Relation mit  $R \subseteq R^+$ , die **transitive Hülle** von  $R$  heißt. Des Weiteren ist  $R^* = R^+ \cup R'$  die **reflexive, transitive Hülle** von  $R$  und  $R^*$  ist die kleinste reflexive, transitive Relation, die  $R$  umfasst.

## Bemerkung

- Relationen die transitiv und reflexiv sind, heißen **Quasiordnungen**

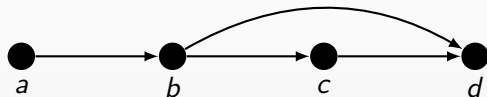
# Beispiel

$$R = \{(a, b), (b, c), (c, d), (b, d)\}$$

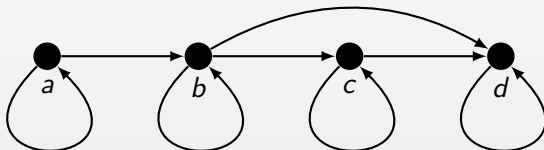


# Beispiel

$$R = \{(a, b), (b, c), (c, d), (b, d)\}$$

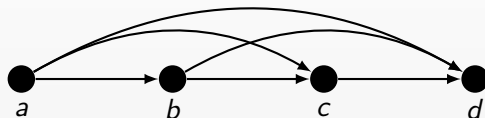


$$R' = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (b, c), (c, d), (b, d)\}$$



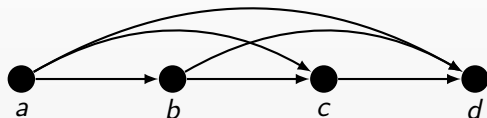
# Beispiel

$$R^+ = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (b, d), (c, d)\}$$

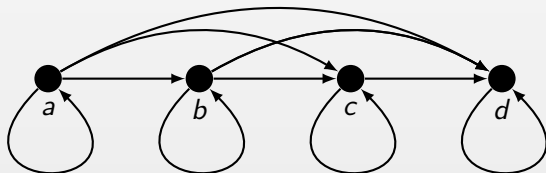


# Beispiel

$$R^+ = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (b, d), (c, d)\}$$



$$R^* = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (b, d), (c, d)\}$$





# Quasiordnungen zu Teilordnungen

# Quasiordnungen zu Teilordnungen

## Definition (Quasiordnung)

Eine reflexive und transitive Relation heißt **Quasiordnung**.

# Quasiordnungen zu Teilordnungen

## Definition (Quasiordnung)

Eine reflexive und transitive Relation heißt **Quasiordnung**.

### Idee:

- „entferne“ symmetrische Paare der Quasiordnung durch gleichsetzen/Äquivalenzen

# Quasiordnungen zu Teilordnungen

## Definition (Quasiordnung)

Eine reflexive und transitive Relation heißt **Quasiordnung**.

### Idee:

- „entferne“ symmetrische Paare der Quasiordnung durch gleichsetzen/Äquivalenzen

## Satz

Für jede Quasiordnung  $\leq$  auf einer Menge  $A$  wird durch

$$a \sim b \quad :\Leftrightarrow \quad (a \leq b \text{ und } b \leq a)$$

eine Äquivalenzrelation auf  $A$  definiert.

# Quasiordnungen zu Teilordnungen

## Definition (Quasiordnung)

Eine reflexive und transitive Relation heißt **Quasiordnung**.

### Idee:

- „entferne“ symmetrische Paare der Quasiordnung durch gleichsetzen/Äquivalenzen

## Satz

Für jede Quasiordnung  $\leq$  auf einer Menge  $A$  wird durch

$$a \sim b \quad :\Leftrightarrow \quad (a \leq b \text{ und } b \leq a)$$

eine Äquivalenzrelation auf  $A$  definiert. Auf  $A/\sim$  definiert dann

$$[a] \leq [b] \quad :\Leftrightarrow \quad a \leq b$$

eine Teilordnung.

# Beweis des Satzes

**Beweis:** Der Beweis hat drei Teile

# Beweis des Satzes

**Beweis:** Der Beweis hat drei Teile

- 1  $\sim$  ist eine Äquivalenzrelation,

# Beweis des Satzes

**Beweis:** Der Beweis hat drei Teile

- 1  $\sim$  ist eine Äquivalenzrelation,
- 2  $\leq$  ist wohldefiniert



# Beweis des Satzes

**Beweis:** Der Beweis hat drei Teile

- 1  $\sim$  ist eine Äquivalenzrelation,
- 2  $\leq$  ist wohldefiniert und
- 3  $\leq$  ist eine Teilordnung.

# Beweis des Satzes

**Beweis:** Der Beweis hat drei Teile

- 1  $\sim$  ist eine Äquivalenzrelation,
- 2  $\leq$  ist wohldefiniert und
- 3  $\leq$  ist eine Teilordnung.

zu 1: Reflexivität und Transitivität vererben sich von  $\leq$  und Symmetrie folgt von der Definition von  $\sim$ .

# Beweis des Satzes

**Beweis:** Der Beweis hat drei Teile

- 1  $\sim$  ist eine Äquivalenzrelation,
- 2  $\leq$  ist wohldefiniert und
- 3  $\leq$  ist eine Teilordnung.

zu 1: Reflexivität und Transitivität vererben sich von  $\leq$  und Symmetrie folgt von der Definition von  $\sim$ .

zu 2: Es ist zu zeigen, dass die Definition unabhängig von den gewählten Repräsentanten ist. D. h. für alle  $a' \in [a]$  und  $b' \in [b]$  muss gelten:

$$a \leq b \iff a' \leq b'.$$

# Beweis des Satzes

**Beweis:** Der Beweis hat drei Teile

- 1  $\sim$  ist eine Äquivalenzrelation,
- 2  $\leq$  ist wohldefiniert und
- 3  $\leq$  ist eine Teilordnung.

zu 1: Reflexivität und Transitivität vererben sich von  $\leq$  und Symmetrie folgt von der Definition von  $\sim$ .

zu 2: Es ist zu zeigen, dass die Definition unabhängig von den gewählten Repräsentanten ist. D. h. für alle  $a' \in [a]$  und  $b' \in [b]$  muss gelten:

$$a \leq b \iff a' \leq b'.$$

Es gilt:  $a' \in [a] \Rightarrow a' \sim a$

# Beweis des Satzes

**Beweis:** Der Beweis hat drei Teile

- 1  $\sim$  ist eine Äquivalenzrelation,
- 2  $\leq$  ist wohldefiniert und
- 3  $\leq$  ist eine Teilordnung.

zu 1: Reflexivität und Transitivität vererben sich von  $\leq$  und Symmetrie folgt von der Definition von  $\sim$ .

zu 2: Es ist zu zeigen, dass die Definition unabhängig von den gewählten Repräsentanten ist. D. h. für alle  $a' \in [a]$  und  $b' \in [b]$  muss gelten:

$$a \leq b \iff a' \leq b'.$$

Es gilt:  $a' \in [a] \Rightarrow a' \sim a \Rightarrow a' \leq a$  und  $a \leq a'$ .

# Beweis des Satzes

**Beweis:** Der Beweis hat drei Teile

- 1**  $\sim$  ist eine Äquivalenzrelation,
- 2**  $\leq$  ist wohldefiniert und
- 3**  $\leq$  ist eine Teilordnung.

zu 1: Reflexivität und Transitivität vererben sich von  $\leq$  und Symmetrie folgt von der Definition von  $\sim$ .

zu 2: Es ist zu zeigen, dass die Definition unabhängig von den gewählten Repräsentanten ist. D. h. für alle  $a' \in [a]$  und  $b' \in [b]$  muss gelten:

$$a \leq b \iff a' \leq b'.$$

Es gilt:  $a' \in [a] \Rightarrow a' \sim a \Rightarrow a' \leq a$  und  $a \leq a'$ .

Ebenso  $b' \in [b] \Rightarrow b' \leq b$  und  $b \leq b'$ .

# Beweis des Satzes

**Beweis:** Der Beweis hat drei Teile

- 1  $\sim$  ist eine Äquivalenzrelation,
- 2  $\leq$  ist wohldefiniert und
- 3  $\leq$  ist eine Teilordnung.

zu 1: Reflexivität und Transitivität vererben sich von  $\leq$  und Symmetrie folgt von der Definition von  $\sim$ .

zu 2: Es ist zu zeigen, dass die Definition unabhängig von den gewählten Repräsentanten ist. D. h. für alle  $a' \in [a]$  und  $b' \in [b]$  muss gelten:

$$a \leq b \iff a' \leq b'.$$

Es gilt:  $a' \in [a] \Rightarrow a' \sim a \Rightarrow a' \leq a$  und  $a \leq a'$ .

Ebenso  $b' \in [b] \Rightarrow b' \leq b$  und  $b \leq b'$ .

Wegen der Transitivität von  $\leq$  gilt also  $a \leq b \Rightarrow a' \leq a \leq b \leq b' \Rightarrow a' \leq b'$

# Beweis des Satzes

**Beweis:** Der Beweis hat drei Teile

- 1  $\sim$  ist eine Äquivalenzrelation,
- 2  $\leq$  ist wohldefiniert und
- 3  $\leq$  ist eine Teilordnung.

zu 1: Reflexivität und Transitivität vererben sich von  $\leq$  und Symmetrie folgt von der Definition von  $\sim$ .

zu 2: Es ist zu zeigen, dass die Definition unabhängig von den gewählten Repräsentanten ist. D. h. für alle  $a' \in [a]$  und  $b' \in [b]$  muss gelten:

$$a \leq b \iff a' \leq b'.$$

Es gilt:  $a' \in [a] \Rightarrow a' \sim a \Rightarrow a' \leq a$  und  $a \leq a'$ .

Ebenso  $b' \in [b] \Rightarrow b' \leq b$  und  $b \leq b'$ .

Wegen der Transitivität von  $\leq$  gilt also  $a \leq b \Rightarrow a' \leq a \leq b \leq b' \Rightarrow a' \leq b'$  und ebenso  $b \leq a \Rightarrow b' \leq a'$ .



# Beweis des Satzes

**Beweis:** Der Beweis hat drei Teile

- 1  $\sim$  ist eine Äquivalenzrelation,
- 2  $\leq$  ist wohldefiniert und
- 3  $\leq$  ist eine Teilordnung.

zu 1: Reflexivität und Transitivität vererben sich von  $\leq$  und Symmetrie folgt von der Definition von  $\sim$ .

zu 2: Es ist zu zeigen, dass die Definition unabhängig von den gewählten Repräsentanten ist. D. h. für alle  $a' \in [a]$  und  $b' \in [b]$  muss gelten:

$$a \leq b \iff a' \leq b'.$$

Es gilt:  $a' \in [a] \Rightarrow a' \sim a \Rightarrow a' \leq a$  und  $a \leq a'$ .

Ebenso  $b' \in [b] \Rightarrow b' \leq b$  und  $b \leq b'$ .

Wegen der Transitivität von  $\leq$  gilt also  $a \leq b \Rightarrow a' \leq a \leq b \leq b' \Rightarrow a' \leq b'$  und ebenso  $b \leq a \Rightarrow b' \leq a'$ .

zu 3: Reflexivität und Transitivität vererben sich von  $\leq$ .

# Beweis des Satzes

**Beweis:** Der Beweis hat drei Teile

- 1  $\sim$  ist eine Äquivalenzrelation,
- 2  $\leq$  ist wohldefiniert und
- 3  $\leq$  ist eine Teilordnung.

zu 1: Reflexivität und Transitivität vererben sich von  $\leq$  und Symmetrie folgt von der Definition von  $\sim$ .

zu 2: Es ist zu zeigen, dass die Definition unabhängig von den gewählten Repräsentanten ist. D. h. für alle  $a' \in [a]$  und  $b' \in [b]$  muss gelten:

$$a \leq b \iff a' \leq b'.$$

Es gilt:  $a' \in [a] \Rightarrow a' \sim a \Rightarrow a' \leq a$  und  $a \leq a'$ .

Ebenso  $b' \in [b] \Rightarrow b' \leq b$  und  $b \leq b'$ .

Wegen der Transitivität von  $\leq$  gilt also  $a \leq b \Rightarrow a' \leq a \leq b \leq b' \Rightarrow a' \leq b'$  und ebenso  $b \leq a \Rightarrow b' \leq a'$ .

zu 3: Reflexivität und Transitivität vererben sich von  $\leq$ .

Für die Antisymmetrie seien  $a, b \in A$  mit  $[a] \leq [b]$  und  $[b] \leq [a]$ .

# Beweis des Satzes

**Beweis:** Der Beweis hat drei Teile

- 1  $\sim$  ist eine Äquivalenzrelation,
- 2  $\leq$  ist wohldefiniert und
- 3  $\leq$  ist eine Teilordnung.

zu 1: Reflexivität und Transitivität vererben sich von  $\leq$  und Symmetrie folgt von der Definition von  $\sim$ .

zu 2: Es ist zu zeigen, dass die Definition unabhängig von den gewählten Repräsentanten ist. D. h. für alle  $a' \in [a]$  und  $b' \in [b]$  muss gelten:

$$a \leq b \iff a' \leq b'.$$

Es gilt:  $a' \in [a] \Rightarrow a' \sim a \Rightarrow a' \leq a$  und  $a \leq a'$ .

Ebenso  $b' \in [b] \Rightarrow b' \leq b$  und  $b \leq b'$ .

Wegen der Transitivität von  $\leq$  gilt also  $a \leq b \Rightarrow a' \leq a \leq b \leq b' \Rightarrow a' \leq b'$  und ebenso  $b \leq a \Rightarrow b' \leq a'$ .

zu 3: Reflexivität und Transitivität vererben sich von  $\leq$ .

Für die Antisymmetrie seien  $a, b \in A$  mit  $[a] \leq [b]$  und  $[b] \leq [a]$ . Aus der Definition von  $\leq$  folgern wir  $a \leq b \leq a$  und somit  $a \sim b$ , also  $[a] = [b]$ .

# Beweis des Satzes

**Beweis:** Der Beweis hat drei Teile

- 1**  $\sim$  ist eine Äquivalenzrelation,
- 2**  $\leq$  ist wohldefiniert und
- 3**  $\leq$  ist eine Teilordnung.

zu 1: Reflexivität und Transitivität vererben sich von  $\leq$  und Symmetrie folgt von der Definition von  $\sim$ .

zu 2: Es ist zu zeigen, dass die Definition unabhängig von den gewählten Repräsentanten ist. D. h. für alle  $a' \in [a]$  und  $b' \in [b]$  muss gelten:

$$a \leq b \iff a' \leq b'.$$

Es gilt:  $a' \in [a] \Rightarrow a' \sim a \Rightarrow a' \leq a$  und  $a \leq a'$ .

Ebenso  $b' \in [b] \Rightarrow b' \leq b$  und  $b \leq b'$ .

Wegen der Transitivität von  $\leq$  gilt also  $a \leq b \Rightarrow a' \leq a \leq b \leq b' \Rightarrow a' \leq b'$  und ebenso  $b \leq a \Rightarrow b' \leq a'$ .

zu 3: Reflexivität und Transitivität vererben sich von  $\leq$ .

Für die Antisymmetrie seien  $a, b \in A$  mit  $[a] \leq [b]$  und  $[b] \leq [a]$ . Aus der Definition von  $\leq$  folgern wir  $a \leq b \leq a$  und somit  $a \sim b$ , also  $[a] = [b]$ .  $\square$