LISTENFÄRBUNGEN UND DURCHSCHNITTSGRAD

MATHIAS SCHACHT

Zusammenfassung. Wir reproduzieren ein paar probabilistische Beobachtungen von Alon [*Restricted colorings of graphs*, Surveys in Combinatorics, London Math. Soc. Lecture Note Ser. **187** (1993), 1–33] über den Zusammenhang von der listenchromatischen Zahl $\mathrm{ch}(G)$ und dem Durchschnittsgrad $d(G)$ eines Graphen G.

§1. Listenchromatische Zahl von Graphen mit hohem Durchschnittsgrad

Die *listenchromatische Zahl* $\mathrm{ch}(G)$ eines Graphen $G = (V, E)$ ist eine Verallgemeinerung der *Färbungszahl* bzw. chromatischen Zahl $\chi(G)$ und wurde von Vizing [9] und Erős, Rubin und Taylor [7] eingeführt. Wie sagen $c \colon V \to \mathbb{N}$ ist eine Färbung bzw. Eckenfärbung des Graphen G, falls benachbarte Ecken unterschiedliche Farben zugeordnet bekommen, d. h. $c(x) \neq c(y)$ für alle Kanten $xy \in E$. Offensichtlich kann man jeder Ecke einer andere Farbe zuordnen und so eine Färbung erhalten. Somit gibt es auch eine kleinste natürliche Zahl k mit der Eigenschaft, dass es eine Färbung $c \colon V \to [k] := \{1, \dots, k\}$ gibt und k bezeichnen wir als die Färbungszahl von G (in Zeichen $\chi(G) = k$).

Sei nun für jede Ecke $v \in V$ eine Farbliste $S_v \subseteq \mathbb{N}$ gegeben. Wir sagen $c \colon V \to \mathbb{N}$ ist eine Listenfärbung (bzgl. $(S_v)_{v\in V}$), falls c eine Färbung ist und $c(v) \in S_v$ für alle $v \in V$ erfüllt ist. Die Listen schränken also die mögliche Farbwahl ein. Die listenchromatische Zahl $\mathrm{ch}(G)$ ist die kleinste Zahl k, so dass es für jede Wahl von Farblisten $S_v \subseteq \mathbb{N}$ mit $|S_v| \geqslant k$ für alle $v \in V$ eine Färbung c von G mit $c(v) \in S_v$ gibt. Man sieht sofort ein, dass $\mathrm{ch}(G) \geqslant \chi(G)$ gilt, in dem man einfach die Listen $S_v = [\mathrm{ch}(G)]$ für jede Ecke $v \in V$ benutzt.

Auf der anderen Seite gibt es keine Funktion $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass sich die listenchromatische Zahl für beliebige Graphen G durch $f(\chi(G))$ beschränken lässt. Tatsächlich folgt aus Satz 1.1, dass z. B. für den vollständigen bipartiten Graphen $K_{n,n}$ gilt

$$\mathrm{ch}(K_{n,n}) = \Omega\left(\frac{\log n}{\log\log n}\right). \tag{1.1}$$

Es gibt also eine Familie von Graphen mit beschränkter chromatischer Zahl deren listenchromatische Zahl unbeschränkt ist. Tatsächlich zeigt Satz 1.1, dass die im Gegensatz zur chromatischen Zahl die listenchromatische Zahl mit dem Durchschnittsgrad $d(G) = 2|E|/|V|$ eines Graphen $G = (V, E)$ gegen unendlich tendiert. Genauer für jede Folge von Graphen

$(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $d(G_n) \to \infty$ für $n \to \infty$ gilt $\mathrm{ch}(G_n) \to \infty$. Genauer zeigen wir den folgenden Satz von Alon [1].

Satz 1.1 (Alon 1993)**.** *Sei $k \geqslant 1$ und $G = (V, E)$ ein Graph mit Durchschnittsgrad*

$$d(G) \geqslant 4\tbinom{k^4}{k} \ln\left(2\tbinom{k^4}{k}\right),$$

dann gilt $\mathrm{ch}(G) > k$*.*

Bemerkung 1.2. Wenn wir die Beziehung zwischen k und $d = d(G)$ aus Satz 1.1 nach d auflösen, dann erhalten wir die Existenz einer geeigneten Konstanten $\gamma > 0$, so dass

$$d(G) \geqslant d \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{ch}(G) > \gamma \frac{\log d}{\log\log d}. \tag{1.2}$$

und somit insbesondere (1.1). In Kapitel 2 werden wir sehen, dass dieser funktionale Zusammenhang fast bestmöglich ist, indem wir $\mathrm{ch}(K_{n,n}) \leqslant C \log n$ für eine geeignete Konstante $C > 0$ herleiten (siehe Proposition 2.1). In [2] konnte Alon seinen Beweis von Satz 1.1 verbessern und in (1.2) den $\log\log d$ im Nenner vermeiden. Somit ergibt sich sogar eine passende untere Schranke für $K_{n,n}$ und es gilt $\mathrm{ch}(K_{n,n}) = \Theta(\log n)$.

Beweis von Satz 1.1. In einem ersten Schritt reduzieren wir den Satz auf bipartite Graphen mit hohem Minimalgrad. Tatsächlich enthält jeder Graph mit Durchschnittsgrad d einen Teilgraphen mit Minimalgrad $d/2$ (siehe z. B. [4, Proposition 0.2.2]). Darüber hinaus gibt es für jeden Graphen eine Partition der Ecken in zwei Klassen, so dass jede Ecke in der sie nicht enthaltenden Klasse mehr Nachbarn hat, als in der „eigenen“. Genauer gibt es für jeden Graphen H eine Partition $A \cup B = V(H)$ mit der Eigenschaft $|N_H(a) \cap B| \geqslant |N_H(a) \cap A|$ und $|N_H(b) \cap A| \geqslant |N_H(b) \cap B|$ für alle Ecken $a \in A$ und $b \in B$.

Sei also $X \cup Y$ mit $|X| \geqslant |Y|$ die Partition eines bipartiten Teilgraphen Γ von G mit Minimalgrad

$$\delta(\Gamma) \geqslant \tfrac{1}{4} d(G) \geqslant \tbinom{k^4}{k} \ln\left(2\tbinom{k^4}{k}\right). \tag{1.3}$$

Wir werden zeigen, dass $\mathrm{ch}(\Gamma) > k$ und wegen $\mathrm{ch}(G) \geqslant \mathrm{ch}(\Gamma)$ folgt der Satz.

Der Beweis beruht auf einem probabilistischen Argument. Wir fixieren die Grundmenge der Farben $S = [k^4]$ und wählen Listen der Länge k zufällig in zwei Phasen aus. In der ersten Phase wählen wir die Listen für die Ecken $y \in Y$. Für jedes $y \in Y$ sei S_y eine zufällige k-elementige Teilmenge von S, wobei jede Liste gleichwahrscheinlich ist und die Wahl für jedes y unabhängig ist. Genauer gesagt betrachten wir den diskreten Produktraum $\binom{S}{k}^Y$, wobei für jedes $y \in Y$ der Faktor des Produktraumes durch die Elementarwahrscheinlichkeiten

$$\mathbb{P}(S_y = K) = \frac{1}{\binom{k^4}{k}}$$

für jedes $K \in \binom{S}{k}$ generiert wird.

Wir sagen für eine gegebene Familie von Listen $(S_y)_{y\in Y}$ ist die Nachbarschaft einer Ecke $x \in X$ *reichhaltig* (bzw. einfach x *ist reich*), falls es für jedes $K \in \binom{S}{k}$ ein $y \in N_\Gamma(x)$ mit $S_y = K$ gibt. Eine Ecke $x \in X$ ist also genau dann reich, wenn in ihrer Nachbarschaft jede mögliche k-elementige Farbliste aus S vorkommt. Für eine fest gewählte Ecke $x \in X$ und $K \in \binom{k^4}{k}$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass K nicht als Liste in der Nachbarschaft von x vorkommt durch

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\neg\exists\, y \in N_\Gamma(x) \colon K = S_y) &= \left(\frac{\binom{k^4}{k}-1}{\binom{k^4}{k}}\right)^{|N_\Gamma(x)|} \leqslant \left(1-\frac{1}{\binom{k^4}{k}}\right)^{\delta(\Gamma)}\\ &\leqslant \exp\big(-\delta(\Gamma)/\tbinom{k^4}{k}\big) \overset{(1.3)}{\leqslant} \frac{1}{2\binom{k^4}{k}}\end{aligned}$$

beschränkt. Durch aufsummieren dieser Fehlerwahrscheinlichkeiten erhalten wir

$$\mathbb{P}(x \text{ ist nicht reich}) \leqslant \sum_{K\in\binom{S}{k}} \mathbb{P}(\neg\exists\, y \in N_\Gamma(x) \colon K = S_y) \leqslant \frac{1}{2}\,.$$

Also ist die erwartete Anzahl von Ecken in X die durch eine zufällige Auswahl von Listen $(S_y)_{y\in Y}$ nicht reich werden höchstens $|X|/2$. D. h. es gibt eine Auswahl von Listen, so dass mindestens $|X|/2$ Ecken in x reich sind und für den Rest des Beweises fixieren wir eine solche Auswahl $(T_y)_{y\in Y}$.

Als nächstes wählen wir die Listen für die Ecken in X aus. Auch diese Listen werden zunächst zufällig gleichverteilt und unabhängig voneinander gewählt. Wir betrachten also diesmal den Produktraum $\binom{S}{k}^X$. Sei $c\colon Y \to S$ eine Färbung der Ecken in Y, welche die Listenrestriktion der für Y fest gewählten Listen $(T_y)_{y\in Y}$ erfüllt, d. h. $c(y) \in T_y$ für alle $y \in Y$ und für eine Ecke $x \in X$ sei

$$c_x = \{c(y) \colon y \in N_\Gamma(x)\}$$

die Menge der Farben die in der Nachbarschaft von x vorkommen.

Falls x bezüglich der Listen $(T_y)_{y\in Y}$ eine reichhaltige Nachbarschaft hat, dann muss gelten

$$|S \smallsetminus c_x| \leqslant k-1\,,$$

da jede k-elementige Teilmenge von S mindestens einem Nachbar von x als Farbliste zugeordnet wurde. Um also die partielle Färbung c zu einer Eckenfärbung von ganz Γ erweitern zu können, muss die Liste S_x der reichen Ecke x mindestens eine der $k-1$ Farben aus $S \smallsetminus c_x$ zugeordnet bekommen. Die Wahrscheinlichkeit für diese Ereignis kann mit

$$\mathbb{P}(c \text{ kann auf } x \text{ erweitert werden}) = \mathbb{P}\big(S_x \cap (S \smallsetminus c_x) \neq \varnothing\big) \leqslant \frac{(k-1)\binom{k^4-1}{k-1}}{\binom{k^4}{k}} < \frac{1}{k^2}$$

abgeschätzt werden. Da die Farblisten $(S_x)_{x\in X}$ unabhängig voneinander gewählt werden und es mindestens $|X|/2$ reiche Ecken in X gibt, ergibt sich

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(c \text{ kann auf ganz } X \text{ erweitert werden}) &\leqslant \prod_{x \text{ reich}} \mathbb{P}(c \text{ kann auf } x \text{ erweitert werden})\\ &< \left(\frac{1}{k^2}\right)^{|X|/2} = \frac{1}{k^{|X|}}\,.\end{aligned}$$

Schließlich summieren wir über alle $k^{|Y|}$ Färbungen c von Y, die die Listenrestriktionen erfüllen und mit $|X| \geqslant |Y|$ erhalten wir

$$\mathbb{P}(\exists \text{ Färbung } c\colon X \mathbin{\dot\cup} Y \to S \text{ von } \Gamma \text{ mit } c(x) \in S_x \text{ und } c(y) \in T_y) < \frac{k^{|Y|}}{k^{|X|}} \leqslant 1\,.$$

Somit gibt es k-elementige Farblisten T_x für $x \in X$, so dass keine Listenfärbung von Γ für die Listen $(T_z)_{z\in X\dot\cup Y}$ existiert und deswegen gilt $\mathrm{ch}(\Gamma) > k$. $\square$

§2. Listenchromatische Zahl vollständiger bipartiter Graphen

In diesem Kapitel werden wir zeigen, dass Satz 1.1 fast bestmöglich ist. Aus Satz 1.1 folgt $\mathrm{ch}(K_{n,n}) \geqslant \gamma \log n/\log\log n$ für eine hinreichend kleine Konstante $\gamma > 0$ (unabhängig von n) und aus [2] folgt sogar für jedes $\varepsilon > 0$

$$\mathrm{ch}(K_{n,n}) \geqslant \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)\log_2 n$$

für hinreichend großes n. Mit Hilfe eines einfachen probabilistischen Arguments werden wir

$$\mathrm{ch}(K_{n,n}) \leqslant 1 + \lfloor \log_2 n \rfloor$$

zeigen, was eine direkte Konsequenz der folgenden Proposition ist.

Proposition 2.1. *Falls $n < 2^{k-1}$ für natürliche Zahlen n, $k \geqslant 1$, dann $\mathrm{ch}(K_{n,n}) \leqslant k$.*

Beweis. Seien X und Y die Eckenklassen von $K_{n,n}$, seien $(S_z)_{z\in X\dot\cup Y}$ gegebene Farblisten der Länge mindestens k und sei $S := \bigcup_{z\in X\dot\cup Y} S_z$ die Menge der in den Listen vorkommenden Farben. Wir wählen eine zufällige Partition von $S = S_X \mathbin{\dot\cup} S_Y$, wobei für jede Farbe $s \in S$ unabhängig mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ das Ereignis $s \in S_X$ eintritt. Anders ausgedrückt werfen wir für jede Farbe eine faire Münze und bei „Kopf" kommt die Farbe in die Menge S_X und bei „Zahl" in die Menge S_Y.

Auf Grund der Unabhängigkeit der Zuordnung der Farben auf S_X und S_Y und da $|S_z| \geqslant k$ für jede Ecke $z \in X \mathbin{\dot\cup} Y$ gilt

$$\mathbb{P}(S_x \cap S_X = \varnothing) \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^k \qquad \text{und} \qquad \mathbb{P}(S_y \cap S_Y = \varnothing) \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

für alle Ecken $x \in X$ und $y \in Y$. Aufsummieren dieser Fehlerwahrscheinlichkeiten ergibt

$$\mathbb{P}(\exists\, x \in X \colon S_x \cap S_X = \varnothing) + \mathbb{P}(\exists\, y \in Y \colon S_y \cap S_Y = \varnothing) \leqslant 2n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k < 1\,,$$

da $n < 2^{k-1}$. Also gibt es eine Aufteilung $T_X \cupdot T_Y$ der Farben S mit der Eigenschaft $S_x \cap T_X \neq \varnothing$ und $S_y \cap T_Y \neq \varnothing$ für alle Ecken $x \in X$ und $y \in Y$. Wählen wir jeweils eine Farbe aus $S_x \cap T_X$ und $S_y \cap T_Y$ für alle Ecken $x \in X$ und $y \in Y$ aus, dann erhalten wir eine Listenfärbung von $K_{n,n}$ für die gegebenen Farblisten $(S_z)_{z \in X \cupdot Y}$ □

Die listenchromatische Zahl von $K_{n,n}$ ist eng verwandt mit der sogenannten *Eigenschaft B* von Hypergraphen. Ein *k-uniformer Hypergraph* (bzw. k-Graph) $\mathcal{H}$ ist ein Paar (V, E), wobei V eine Menge und $E \subseteq \binom{V}{k}$ eine Teilmenge der k-elementigen Teilmengen von V ist. Für $k = 2$ erhalten wir den Begriff des Graphen und auch für Hypergraphen bezeichnen wir die Elemente von V als Ecken und die Elemente von E als Kanten. Zurückgehend auf Miller [8] (zur Ehre von Felix Bernstein [3]) sagen wir $\mathcal{H}$ hat die *Eigenschaft B* (bzw. $\mathcal{H}$ ist 2-färbbar), falls es eine Partition der Eckenmenge $X \cupdot Y = V$ gibt, so dass keine Kante von $\mathcal{H}$ vollständig in X oder in Y enthalten ist, d. h. $E \cap \binom{X}{k} = \varnothing$ und $E \cap \binom{Y}{k} = \varnothing$. Weiter sei $m(k)$ die größte natürliche Zahl m, so dass jeder k-uniforme Hypergraph mit echt weniger als m Kanten die Eigenschaft B hat. Der Beweis von Proposition 2.1 ist fast identisch zu dem Beweis von Erdős [5], dass $m(k) < 2^{k-1}$. Allgemein kann man zeigen

$$n \leqslant \tfrac{1}{2} m(k) \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{ch}(K_{n,n}) \leqslant k$$

und

$$n > m(k) \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{ch}(K_{n,n}) > k\,,$$

(siehe [7, p. 128ff]). Die zur Zeit besten Schranken für $m(k)$ sind

$$c_1 \left(\frac{k}{\log k}\right)^{1/2} \leqslant \frac{m(k)}{2^k} \leqslant c_2 k^2$$

für geeignete Konstanten c_1 und $c_2 > 0$. Die obere Schranke geht auf Erdős [6] und die untere Schranke geht auf Radhakrishnan und Srinivasan [10] zurück. Somit erhalten wir

$$\mathrm{ch}(K_{n,n}) = (1 + o(1)) \log_2 n\,,$$

wobei $o(1) \to 0$ für $n \to \infty$.

Literatur

[1] N. Alon, *Restricted colorings of graphs*, Surveys in combinatorics, 1993 (Keele), London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 187, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993, pp. 1–33. MR1239230 ↑1

[2] ———, *Degrees and choice numbers*, Random Structures Algorithms **16** (2000), no. 4, 364–368, DOI 10.1002/1098-2418(200007)16:4<364::AID-RSA5>3.0.CO;2-0. MR1761581 ↑1.2, 2

[3] F. Bernstein, *Zur Theorie der trigonometrischen Reihe*, Leipz. Ber. **60** (1908), 325–338. ↑2

[4] R. Diestel, *Graphentheorie*, 5th ed., Springer-Lehrbuch, Springer Spektrum, 2017 (German). ↑1

[5] P. Erdős, *On a combinatorial problem*, Nordisk Mat. Tidskr. **11** (1963), 5–10, 40. MR0148554 ↑2

[6] ———, *On a combinatorial problem. II*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar **15** (1964), 445–447. MR0167427 ↑2

[7] P. Erdős, A. L. Rubin, and H. Taylor, *Choosability in graphs*, Proceedings of the West Coast Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing (Humboldt State Univ., Arcata, Calif., 1979), Congress. Numer., XXVI, Utilitas Math., Winnipeg, Man., 1980, pp. 125–157. MR593902 ↑1, 2

[8] E. W. Miller, *Concerning biconnected sets*, Fund. Math. **29** (1937), 123-133. ↑2

[9] V. G. Vizing, *Coloring the vertices of a graph in prescribed colors*, Diskret. Analiz **29** (1976), 3–10, 101 (Russian). Metody Diskret. Anal. v Teorii Kodov i Shem. MR0498216 ↑1

[10] J. Radhakrishnan and A. Srinivasan, *Improved bounds and algorithms for hypergraph* 2*-coloring*, Random Structures Algorithms **16** (2000), no. 1, 4–32. MR1728350 ↑2

Fachbereich Mathematik, Universität Hamburg, Hamburg, Germany

E-mail address: `schacht@math.uni-hamburg.de`