Fachbereich Mathematik
Dozent: Prof. Mathias Schacht
Übung: Fabian Schulenburg

WiSe 2014/15
8. Dezember 2014

Graphentheorie II

9. Serie

Besprechung und Abgabe am 15. Dezember 2014
`http://bit.ly/12FwTrU`

Aufgabe 1 (D-De, §6, Nr. 38)

Beweise das Regularitätslemma für nicht-dichte Graphen, d.h. für jede Folge $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Graphen mit $|V(G_n)| = n$ mit $|E(G_n)|/n^2 \to 0$ für $n \to \infty$.

Aufgabe 2

Es sei F ein Graph mit $V(F) = [\ell]$ und $G = (V_1 \dot\cup \ldots \dot\cup V_\ell, E)$ ein ℓ-partiter Graph, wobei für $1 \le i < j \le \ell$ das Paar (V_i, V_j) Dichte $d_{ij} > 0$ hat und ε-regulär ist.

(*a*) Zeigen Sie, für gegebenes $\gamma > 0$ und hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ und hinreichend große Mengen V_i, dass falls $d_{ij} = 1/2$ für alle $i < j$ gilt, dann liegt die Anzahl der induzierten Kopien von F in G, wobei die Ecke i von F in V_i eingebettet wird, im Intervall $((1/2)^{\binom{\ell}{2}} \pm \gamma)|V_1| \cdots |V_\ell|$.

(*b*) Was können Sie für den allgemeinen Fall zeigen, wenn die Dichten der Paare (V_i, V_j) verschieden sind?

Aufgabe 3 (für die schriftliche Abgabe)

Sei $G = (A \dot\cup B \dot\cup C, E)$ ein tripartiter Graph wobei die bipartiten Teilgraphen $G[A, B]$, $G[A, C]$ und $G[B, C]$ jeweils Dichte $d > 0$ haben. Zeigen oder widerlegen Sie, dass es für jedes $\gamma > 0$ ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass für hinreichend große Mengen A, B und C folgendes gilt

(*a*) die Anzahl der Dreiecke liegt im Intervall $(d^3 \pm \gamma)|A||B||C|$, falls nur einer der bipartiten Graphen ε-regulär ist;

(*b*) die Anzahl der Dreiecke liegt im Intervall $(d^3 \pm \gamma)|A||B||C|$, falls mindestens zwei der bipartiten Graphen ε-regulär sind.

Aufgabe 4

Ein ε-reguläres Paar (A, B) heisst *superregulär*, falls zusätzlich für alle $a \in A$ und $b \in B$ gilt $d(a) > \varepsilon|B|$ und $d(b) > \varepsilon|A|$.

(*a*) Was können Sie über den Durchmesser von superregulären Paaren sagen?

(*b*) Sei $X \subseteq A \dot\cup B$ eine Eckenüberdeckung eines superregulären Paares. Was können Sie über $|X|$ sagen?