Graphentheorie II

10. Serie

Besprechung und Abgabe am 19. Januar 2015
`http://bit.ly/1Bq8Z0s`

Aufgabe 1 (für die schriftliche Abgabe)

Beweisen Sie das *removal lemma* für Dreiecke, in dem Sie zeigen, dass jeder Graph mit n Ecken und höchstens $o(n^3)$ Dreiecken durch das Entfernen von bis zu $o(n^2)$ Kanten dreiecksfrei gemacht werden kann.
Tipp: Folgen Sie dem Beweis des *jede-Kante-in-genau-einem-Dreieck-Lemma* aus der VL.

Formulieren Sie das *removal lemma* für Cliquen und allgemeine Graphen. In wieweit lässt sich Ihr Beweis entsprechend verallgemeinern. Wo liegen die Schwierigkeiten.

Aufgabe 2

Es sei $G = (A \dot\cup B, E)$ ein bipartiter Graph mit Dichte $d > 0$. Zeige, dass es Funktionen f und $g\colon (0,1] \to (0,1]$ gibt, so dass für jedes $\varepsilon \in (0,1]$ und hinreichend grosses n mit $|A| = |B| = n$ gilt:

(a) falls (A, B) $f(\varepsilon)$-regulär ist, dann enthält G $(1 \pm \varepsilon)d^4n^4$ gelabelte Kreise der Länge vier;

(b) falls G höchstens $(1 + g(\varepsilon))d^4n^4$ gelabelte Kreise der Länge vier enthält, dann ist (A, B) ε-regulär.

Aufgabe 3

Leiten Sie die Version vom induzierten Ramseysatz für mehr Farben aus der Zweifarbenvariante (Satz 7.3.1) her.

Aufgabe 4 (D-De, §7, Nr. 18)

Zeige, dass es zu je zwei Graphen H_1 und H_2 einen Graphen $G = G(H_1, H_2)$ gibt mit der Eigenschaft, dass G zu jeder *Eckenfärbung* mit den Farben 1 und 2 einen induzierten H_1 der Farbe 1 oder einen induzierten H_2 der Farbe 2 enthält.