SCHRIJVERS BEWEIS VON MADERS SATZ

MATHIAS SCHACHT

Zusammenfassung. Wir reproduzieren Schrijvers Beweis [*A short proof of Mader's $\mathscr{S}$-paths theorem*, J. Combin. Theory Ser. B **82** (2001), no. 2, 319–321] von Maders Min-Max-Satz [*Über die Maximalzahl kreuzungsfreier H-Wege*, Arch. Math. (Basel) **31** (1978/79), no. 4, 387–402] über die Anzahl der H-Wege in einem Graphen.

1. Maders Min-Max-Satz über die Anzahl von H-Wegen

In der Arbeit von Schrijver [3] wird die folgende Formulierung von Maders Satz aus [2] bewiesen (siehe Satz 1). Wir werden skizzieren wie man aus diesem Satz die Formulierung von Maders Satz über kreuzungsfreie H-Wege (siehe Korollar 2) herleiten kann.

Eine Menge $\mathcal{P}$ von Wegen in einem Graphen $G = (V, E)$ ist *kreuzungsfrei*, wenn die Schnittmenge der Eckenmengen zweier unterschiedlicher Wege aus $\mathcal{P}$ eine Teilmenge der gemeinsamen Endecken beider Wege ist. Einfacher ausgedrückt zwei Wege sing kreuzungsfrei wenn sie sich höchstens in ihren Endecken schneiden. Darüber hinaus ist $\mathcal{P}$ *(ecken)disjunkt*, wenn keine zwei Wege eine gemeinsame Ecke haben. Sei $\mathscr{S}$ eine Menge von paarweise disjunkten Teilmengen von V. Ein *$\mathscr{S}$-Weg* ist ein Weg in G, deren Endecken in unterschiedlichen Mengen aus $\mathscr{S}$ liegen. Insbesondere enthält jeder $\mathscr{S}$-Weg mindestens eine Kante. Für einen Graphen $G = (V, E)$ und eine solche Menge $\mathscr{S}$ sei $\pi_{G,\mathscr{S}}$ die Kardinalität einer größten Menge von disjunkten $\mathscr{S}$-Wegen in G. Satz 1 gibt eine Darstellung von $\pi_{G,\mathscr{S}}$ als Minimum eines Parameters von speziellen Partitionen von G. In den Partitionen hier ist die leere Menge als Partitionsklasse zugelassen.

Eine Partition $\mathscr{X} = \{X, Y_1, \dots, Y_k\}$ von V, d. h. $X \dot\cup Y_1 \dot\cup \dots \dot\cup Y_k = V$, *überdeckt alle $\mathscr{S}$-Wege* (kurz $\mathscr{X}$ ist *$\mathscr{S}$-überdeckend*) falls jeder $\mathscr{S}$-Weg in G der X vermeidet, d. h. keine Ecke aus X enthält, eine Kante enthält, dessen beide Endecken in einer der Mengen Y_i enthalten sind. Für Y_i sei $\partial_{\mathscr{X},\mathscr{S}} Y_i$ die Menge der Ecken aus Y_i die entweder in $S = \bigcup \mathscr{S}$ liegen oder einen Nachbarn in einer anderen Menge Y_j mit $j \neq i$ haben

$$\partial_{\mathscr{X},\mathscr{S}} Y_i = \{y \in Y_i \colon\ y \in S \text{ oder } N_G(y) \setminus (X \dot\cup Y_i) \neq \emptyset\}\,.$$

Da jeder $\mathscr{S}$-Weg der X meidet für ein $i = 1, \dots, k$ mindestens eine Kante aus $G[Y_i]$ enthält, muss so ein $\mathscr{S}$-Weg dann auch mindestens zwei Ecken aus $\partial_{\mathscr{X},\mathscr{S}} Y_i$ enthalten. Somit gilt

$$\pi_{G,\mathscr{S}} \leq |X| + \sum_{i=1}^{k} \lfloor |\partial_{\mathscr{X},\mathscr{S}} Y_i|/2 \rfloor =: \mu_{G,\mathscr{S}}(\mathscr{X})\,.$$

Date: 14. November 2012.

für alle $\mathscr{S}$-überdeckenden Partitionen $\mathscr{X} = \{X, Y_1, \dots, Y_k\}$. Der Satz von Mader besagt, dass diese obere Schranke für eine Partitionen $\mathscr{X}$ tatsächlich angenommen wird.

Satz 1 (Mader 1978)**.** *Für jeden Graphen $G = (V, E)$ und jede Menge $\mathscr{S}$ von disjunkten Teilmengen aus V gilt*

$$\pi_{G,\mathscr{S}} = \min_{\mathscr{X}} \mu_{G,\mathscr{S}}(\mathscr{X})\,, \tag{1}$$

wobei das Minimum über alle $\mathscr{S}$-überdeckenden Partitionen genommen wird.

Der folgende Beweis ist mit minimalen Änderungen direkt aus der Arbeit [3] von Schrijver entnommen.

Beweis. Der Beweis besteht aus zwei Teilen. Im ersten Teil beweisen wir den Spezialfall, wenn alle Mengen $T \in \mathscr{S}$ aus genau einer Ecke bestehen. Dieser Fall wurde bereits von Gallai [1] behandelt und kann auf die Matchingformel von Tutte zurückgeführt werden.

1. Fall: $|T| = 1$ für alle $T \in \mathscr{S}$. Seien $G = (V, E)$ und $\mathscr{S}$ gegeben und sei

$$\mu_{G,\mathscr{S}} = \min_{\mathscr{X}} \mu_{G,\mathscr{S}}(\mathscr{X})$$

die rechte Seite aus (1). Wir setzen $S = \bigcup \mathscr{S}$ und betrachten den folgenden Hilfsgraphen $\widetilde{G} = (\widetilde{V}, \widetilde{E})$: Seien (V_1, E_1) und (V_2, E_2) zwei Kopien von G, wobei für eine Ecke $v \in V$ die Ecken $v_1 \in V_1$ und $v_2 \in V_2$ die entsprechenden Kopien bezeichnen und $\mathscr{S}_1$ und $\mathscr{S}_2$ entsprechen den Kopien von $\mathscr{S}$. Der Graph $\widetilde{G}$ entsteht aus den beiden Kopien, in dem wir zuerst jeweils die beiden Kopien von jeder Ecke $v \in S$ identifizieren, die entstehende Kopie von S bezeichnen wir dann mit $\widetilde{S} = \bigcup \mathscr{S}_1 = \bigcup \mathscr{S}_2$, und für jede Ecke $v \in V \setminus S$ fügen wir die Kanten $v_1 u_2$ und $v_2 u_1$ für alle $u \in N_G(v) \setminus S$ und die Kante $v_1 v_2$ hinzu.

Wir werden zeigen, dass $\widetilde{G}$ eine Paarung der Größe $\mu_{G,\mathscr{S}} + |V \setminus S|$ enthält. Auf Grund der Matchingformel von Tutte ist es hinreichend, die folgende Ungleichung für jede Menge $\widetilde{X} \subseteq \widetilde{V}$

$$|\widetilde{X}| + \sum_{\widetilde{C} \in \mathcal{C}_{\widetilde{G}-\widetilde{X}}} \big\lfloor |V(\widetilde{C})|/2 \big\rfloor \geq \mu_{G,\mathscr{S}} + |V \setminus S| \tag{2}$$

zu überprüfen, wobei $\mathcal{C}_{\widetilde{G}-\widetilde{X}}$ die Menge der Komponenten in $\widetilde{G} - \widetilde{X}$ ist.

Sei $\widetilde{X} \subseteq \widetilde{V}$. O. B. d. A. können wir annehmen, dass für jede Ecke $v \in V \setminus S$ gilt

$$v_1 \in \widetilde{X} \quad \Leftrightarrow \quad v_2 \in \widetilde{X}\,. \tag{3}$$

Falls nur eine der Ecken, sagen wir v_1, in $\widetilde{X}$ enthalten wäre, dann könnten wir sie aus $\widetilde{X}$ entfernen und der Komponente in $\widetilde{G} - \widetilde{X}$ hinzufügen die auch v_2 enthält. Da v_1 und v_2 in $\widetilde{V} \setminus \{v_1, v_2\}$ die gleiche Nachbarschaft haben, sind alle anderen Komponenten aus $\widetilde{G} - \widetilde{X}$ auch Komponenten von $\widetilde{G} - (\widetilde{X} \setminus \{v_1\})$. Die linke Seite von (2) würde sich also durch das entfernen von v_1 aus $\widetilde{X}$ nicht erhöhen und deswegen können wir (3) voraussetzen.

Wegen (3) und da für jede Ecke $v \in V \setminus S$ die Kante $v_1 v_2$ in $\widetilde{G}$ liegt, muss auch

$$v_1 \in V(C) \quad \Leftrightarrow \quad v_2 \in V(C)\,. \tag{4}$$

für alle Ecken $v \in V \setminus S$ und alle Komponenten $C \in \mathcal{C}_{\widetilde{G}-\widetilde{X}}$ gelten. Insbesondere haben $|V(C)|$ und $|V(C) \cap \widetilde{S}|$ die gleiche Parität. Für $X_1 = \widetilde{X} \cap V_1$, sei $\mathscr{X}_1$ die Partition von V_1 bestehend aus X_1 und den Eckenmengen der Komponenten von $G_1 - X_1$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} |\widetilde{X}| + \sum_{\widetilde{C} \in \mathcal{C}_{\widetilde{G}-\widetilde{X}}} \left\lfloor \left|V(\widetilde{C})\right|/2 \right\rfloor &= |X_1| + \sum_{C_1 \in \mathcal{C}_{G_1 - X_1}} \left\lfloor \left|V(C_1) \cap \widetilde{S}\right|/2 \right\rfloor + |V \setminus S| \\ &\geq |X_1| + \sum_{C_1 \in \mathcal{C}_{G_1 - X_1}} \left\lfloor \left|\partial_{\mathscr{X}_1, \mathscr{S}_1} V(C_1))\right|/2 \right\rfloor + |V \setminus S| \\ &\geq \mu_{G_1, \mathscr{S}_1} + |V \setminus S| = \mu_{G, \mathscr{S}} + |V \setminus S| \,. \end{aligned}$$

Die Matchingformel von Tutte besagt nun, dass $\widetilde{G}$ eine Paarung mit mindestens $\mu_{G,\mathscr{S}} + |V \setminus S|$ Kanten enthält und wir halten eine solche Paarung M fest. Des weiteren sei N die Paarung in $\widetilde{G}$ die aus den $|V \setminus S|$ Kanten der Form $v_1 v_2$ mit $v \in V \setminus S$ besteht. Die Paarung M hat also $\mu_{G,\mathscr{S}}$ Kanten mehr als die Paarung N und deswegen gibt es mindestens $\mu_{G,\mathscr{S}}$ Komponenten in dem Graphen $(\widetilde{V}, M \cup N)$ die genau eine Kante mehr aus M als aus N haben. Jede solche Komponente ist ein alternierender Weg dessen Endecken in $\widetilde{S}$ liegen. Durch Kontraktion aller Kanten aus N in $\widetilde{G}$ erhalten wir wieder eine Kopie von G und jeder der angesprochenen Wege entspricht einem $\mathscr{S}$-Weg in dieser Kopie. Um einzusehen, dass diese Wege tatsächlich $\mathscr{S}$-Wege sind, berufen wir uns auf die Annahme, dass $\mathscr{S}$ nur aus einelementigen Mengen besteht und somit ist jeder Weg mit Endecken in S auch ein $\mathscr{S}$-Weg. Wir haben also für diesen Fall gezeigt, dass G mindestens $\mu_{G,\mathscr{S}}$ disjunkte $\mathscr{S}$-Wege enthält.

2. Fall: $|T| \geq 2$ für ein $T \in \mathscr{S}$. Wir führen einen Widerspruchsbeweis. Für eine gegebene Eckenmenge V wählen wir unter allen möglichen Gegenbeispielen einen Graphen $G = (V, E)$ und eine Menge disjunkter Teilmengen $\mathscr{S}$ aus, so dass

$$\sigma(G, \mathscr{S}) := |E| - \sum_{S_1 \neq S_2 \in \mathscr{S}} |S_1||S_2|$$

minimiert wird. Da jeder $\mathscr{S}$-Weg der eine innere Ecke in $S = \bigcup \mathscr{S}$ hat einen Teilweg enthält der ebenfalls ein $\mathscr{S}$-Weg ist, können wir uns im Folgenden auf Wege beschränken, die keine inneren Ecken in S haben. Insbesondere folgt damit aus der Minimalität von $\sigma(G, \mathscr{S})$, dass die Mengen aus $\mathscr{S}$ unabhängig in G sind.

Sei also $T \in \mathscr{S}$ eine in G unabhängige Menge mit $|T| \geq 2$ und sei t eine Ecke aus T. Wir betrachten nun die Menge disjunkter Teilmengen $\mathscr{S}'$ die wir erhalten, wenn wir T aus $\mathscr{S}$ entfernen und dafür die beiden Mengen $T' = T \setminus \{t\}$ und $\{t\}$ einfügen. Für $\mathscr{S}'$ gilt

$$\sigma(G, \mathscr{S}') = \sigma(G, \mathscr{S}') - |T| + 1 < \sigma(G, \mathscr{S})$$

und wegen der Wahl von G und $\mathscr{S}$ gibt es $\mu_{G,\mathscr{S}'}$ disjunkte $\mathscr{S}'$-Wege in G. Da jeder $\mathscr{S}$-Weg in G auch ein $\mathscr{S}'$-Weg ist, ist jede $\mathscr{S}'$-überdeckende Partition $\mathscr{X}$ eine $\mathscr{S}$-überdeckende Partition. Darüber hinaus hängt die Definition von $\partial_{\mathscr{X},\mathscr{S}'}(\cdot)$ nur von der Menge $S = \bigcup \mathscr{S} = \bigcup \mathscr{S}'$, nicht aber von den einzelnen Mengen in $\mathscr{S}'$ ab. Somit gilt $\mu_{G,\mathscr{S}'} \geq \mu_{G,\mathscr{S}}$.

Wir wählen eine Menge $\mathcal{P}'$ von $\mu_{G,\mathscr{S}}$ disjunkten $\mathscr{S}'$-Wegen so aus, dass kein Weg $P' \in \mathcal{P}'$ eine innere Ecke in S hat. Da $\mathcal{P}'$ keine Menge von $\mathscr{S}$-Wegen ist, muss $\mathcal{P}'$ einen $t-T'$-Weg P_0' enthalten und nach unserer Wahl von T und $\mathcal{P}'$ muss dieser Weg eine innere Ecke $u \in V \setminus S$ haben.

Als nächstes betrachten wir die Mengenfamilie $\mathscr{S}''$, die wir erhalten, wenn wir in $\mathscr{S}$ die Menge T durch $T \cup \{u\}$ ersetzen. Da der Satz für Mengen $\mathscr{S}$ mit $|\mathscr{S}| = 1$ leicht einzusehen ist (in diesem Fall ist $\mu_{G,\mathscr{S}}(\mathscr{X}) = 0$ für die triviale Partition $\mathscr{X} = \{\emptyset\} \cup \{\{v\}\colon\ v \in V\}$ mit $X = \emptyset$), können wir $\mathscr{S} \neq \{T\}$ annehmen. Folglich gilt

$$\sigma(G, \mathscr{S}'') = \sigma(G, \mathscr{S}) - |S \setminus T| < \sigma(G, \mathscr{S})$$

und wegen der Minimalität von G und $\mathscr{S}$ gibt es $\mu_{G,\mathscr{S}''}$ disjunkte $\mathscr{S}''$-Wege in G. Da wieder jeder $\mathscr{S}$-Weg auch ein $\mathscr{S}''$-Weg ist und $S \subsetneq (S \cup \{u\}) = \bigcup \mathscr{S}''$ gilt $\mu_{G,\mathscr{S}''} \geq \mu_{G,\mathscr{S}}$.

Unter allen Mengen von $\mu_{G,\mathscr{S}}$ disjunkten $\mathscr{S}''$-Wegen in G die keine inneren Ecken in $S \cup \{u\}$ haben, sei $\mathcal{P}''$ eine der Mengen die die die wenigsten Kanten ausserhalb von mit Wegen aus $\mathcal{P}'$ benutzt. D. h. $\mathcal{P}''$ minimiert

$$\sum_{P'' \in \mathcal{P}''} \Big| E(P'') \setminus \bigcup_{P' \in \mathcal{P}'} E(P') \Big| . \tag{5}$$

Da $\mathcal{P}''$ nicht ausschließlich aus $\mathscr{S}$-Wegen bestehen kann, muss es einen Weg P_0'' mit Endecke u enthalten. Wegen $u \notin S = \bigcup \mathscr{S}'$ und $|\mathcal{P}'| = |\mathcal{P}''|$ muss es eine Endecke $v \in S$ eines $\mathscr{S}'$-Weges $P' \in \mathcal{P}'$ geben, die in keinem Weg aus $\mathcal{P}''$ enthalten ist.

Ausgehend von v sei w die erste Ecke auf dem Weg P' die auch auf einem Weg aus $\mathcal{P}''$ liegt. So eine Ecke w muss es tatsächlich geben, da sonst P' disjunkt zu allen Wegen aus $\mathcal{P}''$ ist, was auch $P' \neq P_0'$ nach sich zieht (da $V(P_0') \cap V(P_0'') \supseteq \{u\}$), und deswegen $(\mathcal{P}'' \setminus \{P_0''\}) \cup \{P'\}$ eine Menge von $\mu_{G,\mathscr{S}}$ disjunkten $\mathscr{S}$-Wegen in G wäre. Sei x die andere Endecke von P', sei $P'' \in \mathcal{P}''$ der Weg der w enthält und seien y und z die Endecken von P''. Weiterhin sei $T'' \in \mathscr{S}''$ die Menge die v enthält.

Wir werden zeigen, dass $P' = P_0'$ und wegen der Wahl von w muss dann u eine Ecke des Teilweges $wP'x$ sein. Dann werden wir aus dem Teilweg $vP'w$ und einem Teilweg von P'' einen $\mathscr{S}$-Weg bauen, den wir an Stelle von P_0' zu $\mathcal{P}'$ hinzufügen können, um so $\mu_{G,\mathscr{S}}$ disjunkte $\mathscr{S}$-Wege zu erhalten.

Wir beginnen mit folgender Beobachtung, falls der Teilweg $yP''w$ nicht ganz in $wP'x$ enthalten ist und z nicht in T'' liegt, dann könnten wir das Teilstück $yP''w$ durch $vP'w$ in P'' ersetzen und erhielten auf diese Weise $\mu_{G,\mathscr{S}}$ disjunkte $\mathscr{S}''$-Wege die der minimalen Wahl von $\mathcal{P}''$ in (5) widersprechen würden. Also muss gelten, dass entweder der Teilweg $yP''w$ (bzw. $wP''z$) in $wP'x$ enthalten ist oder z (bzw. y) liegt in T''. Da aber nicht sowohl y, als auch z in T'' liegen können (dann wäre P'' kein $\mathscr{S}''$-Weg), können wir o. B. d. A. annehmen, dass $y \notin T''$ und dass dann $wP''z$ in $wP'x$ enthalten ist. Auf der anderen Seite werden wir zeigen, dass nun aber $yP''w$ nicht mehr in $wP'x$ enthalten sein kann, was $z \in T''$ nach sich zieht.

Angenommen $yP''w$ wäre auch in $wP'x$ enthalten. Dann muss $w = y$ gelten und da die Wege aus $\mathcal{P}$ und $\mathcal{P}'$ keine inneren Ecken in S haben, muss in diesem Fall $y = w = u$ und $x = z$ gelten (bzw. $z = w = u$ und $x = y$). Das bedeutet aber, dass u eine innere Ecke von P' ist und deswegen $P' = P_0'$. Somit liegen y und $x = z$ in $T \cup \{u\}$, also wäre P'' kein $\mathscr{S}''$-Weg. Also ist $yP''w$ nicht in $wP'x$ enthalten und $z \in T''$

Falls $z = x$ ist, dann wären die Endecken x und v von P' beide in T''. Somit muss T'' zwei Mengen aus $\mathscr{S}'$ schneiden und deswegen gilt $T'' = T \cup \{u\}$ und

$P' = P'_0$. Aber dann enthält P' die Ecke u und schneidet den Weg P''_0. Da u keine innere Ecke von $vP'w$ sein kann (wegen der Wahl von w) und $u \neq x = z$ muss dann aber $w = u$, $P''_0 = wP'x$ und somit auch $P'' = P_0$ und $w = y$ gelten. Dann wären aber die Endecken $y = u$ und x von P'' beide in $T'' = T \cup \{u\}$ enthalten und wir erhielten den Widerspruch, dass P'' kein $\mathscr{S}''$-Weg ist.

Also ist z eine innere Ecke P'. Da aber keine innere Ecke von P' in S liegt muss dann $z = u$ sein und somit gilt $P' = P'_0$ und $P'' = P''_0$ und y ist nicht in P' enthalten, also $y \neq w$. Nun können wir P'' in $\mathcal{P}''$ durch $vP'wP''y$ ersetzen und erhalten auf diese Weise $\mu_{G,\mathscr{S}}$ disjunkte $\mathscr{S}''$-Wege die alle u nicht als Endecke haben und deswegen alle auch $\mathscr{S}$-Wege sind. □

Die folgende Formulierung von Maders Satz findet sich bereits in Maders Arbeit [2]. Ein Weg P in $G = (V, E)$ ist ein H-Weg für einen induzierten Teilgraphen $H = G[U]$, falls die Endecken von P in H liegen und alle inneren Ecken außerhalb von H liegen. Wir sagen (X, F) für $X \subseteq V \setminus U$ und $F \subseteq E(G-U-X)$ ist *H-zulässig*, falls jeder X-vermeidende H-Weg eine Kante aus F enthält. Für so ein Paar (X, F) sei $G(H; X, F)$ der Teilgraph mit Eckenmenge $(V \setminus U) \setminus X$ und Kantenmenge F. Für eine Komponente $C \in \mathcal{C}_{G(H;X,F)}$ definieren wir

$$\partial_{G,H,X,F}(C) = \{v \in V(C)\colon\ N_G(v) \setminus (X \cup V(C)) \neq \emptyset\}$$

und setzen

$$\mu_{G,H}(X, F) = |X| + \sum_{C \in \mathcal{C}_{G(H;X,F)}} \left\lfloor |\partial_{G,H,X,F}(C)|/2 \right\rfloor .$$

Es ist leicht einzusehen, dass jeder X-vermeidende H-Weg mindestens zwei Ecken aus $\partial_{G,H,X,F}(C)$ für ein $C \in \mathcal{C}_{G(H;X,F)}$ enthalten muss, weswegen für jedes H-zulässige Paar (X, F) der Wert $\mu_{G,H}(X, F)$ eine obere Schranke für die maximale Anzahl kreuzungsfreier H-Wege in G darstellt. Wie in Satz 1 ist diese Schranke bestmöglich.

Korollar 2. *Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $H = G[U]$ ein induzierter Teilgraph für eine Menge $U \subseteq V$. Die maximale Anzahl kreuzungsfreier H-Wege in G ist $\min_{X,F} \mu_{G,H}(X, F)$, wobei das Minimum über alle H-zulässigen Paare (X, F) genommen wird.*

Beweis (Skizze). Grob gesprochen würden wir gerne Satz 1 für den Graphen $G' = G-U$ und die Mengen $\mathscr{S} = \{N_G(u) \setminus U\colon\ u \in U\}$ anwenden, um disjunkte $\mathscr{S}$-Wege in G' mit kreuzungsfreien H-Wegen in G in Zusammenhang zu bringen. Hierbei ergeben sich zwei kleine technische Problem. Zum einen besteht $\mathscr{S}$ im Allgemeinen nicht aus paarweise disjunkten Mengen und zum anderen kann es sein, dass ein H-Weg bestehend aus zwei Kanten in G zu einem trivialen Weg in G' degeneriert.

Die folgende Konstruktion adressiert diese beiden technischen Details.

- Setze $W = V \setminus U$ und $W_{\geq 2} = \{w \in W\colon\ |N_G(w) \cap U| \geq 2\}$.
- Ausgehend von $G' = G[W]$ füge für jede Ecke $w \in W_{\geq 2}$ eine neue Ecke w' ein, die nur mit w verbunden wird und sei G'' der resultierende Graph.
- Setze

$$\mathscr{S} = \{(N_G(u) \cap W) \setminus W_{\geq 2}\colon\ u \in U\} \cup \{\{w\}\colon\ w \in W_{\geq 2}\} \cup \{\{w'\}\colon\ w \in W_{\geq 2}\}$$

Mit Hilfe dieser Konstruktion kann man zeigen, dass die Kriterien in Satz 1 angewandt für G'' und $\mathscr{S}$ denen in Korollar 2 für G und H entsprechen und so kann man Korollar 2 aus Satz 1 herleiten. □

Literatur

1. T. Gallai, *Maximum-minimum Sätze und verallgemeinerte Faktoren von Graphen*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **12** (1961), 131–173. 1
2. W. Mader, *Über die Maximalzahl kreuzungsfreier H-Wege*, Arch. Math. (Basel) **31** (1978/79), no. 4, 387–402. 1, 1
3. A. Schrijver, *A short proof of Mader's $\mathscr{S}$-paths theorem*, J. Combin. Theory Ser. B **82** (2001), no. 2, 319–321. 1, 1