Fachbereich Mathematik
Diskrete Mathematik
Prof. Mathias Schacht

WS 2010/11
10. Dezember 2010

Graphentheorie

∞. *Serie*

Besprechung am 17. Dezember 2010
9SP-Studenten können sich drei der fünft 2-Punkte Aufgaben aussuchen

Aufgabe 1 (D-En, §8, Nr. 2^-) [1 Punkt]

Für jedes $i \in \mathbb{N}$ sei $\sigma^i = (s^i_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge natürlicher Zahlen. Zeige, dass es eine Folge $\sigma = (s_j)_{j\in\mathbb{N}}$ gibt, welche jede der gegebenen Folgen irgendwann dominiert, d.h. für jedes $i \in \mathbb{N}$ gibt es ein n_i, so dass $s_n > s^i_n$ für alle $n \geq n_i$.

Aufgabe 2 (D-En, §8, Nr. 5^-) [1 Punkt]

Sei G ein unendlicher Graph und A, $B \subseteq V(G)$. Zeige, dass es in G eine unendliche Familie von paarweise disjunkten A-B-Wegen existiert, falls es keinen endlichen A-B-Trenner gibt.

Aufgabe 3 (D-En, §8, Nr. 9) [2 Punkte]

Sei G ein abzählbarer ∞-zusammenhängender (d.h. G ist k-zusammenhängend für jedes $k \in \mathbb{N}$) Graph. Zeige, dass G für jedes $k \in \mathbb{N}$ einen ∞-zusammenhängenden Teilgraphen mit Taillenweite mindestens k enthält.

Aufgabe 4 (D-En, §8, Nr. 10) [2 Punkte]

Konstruiere für jedes $k \in \mathbb{N}$ einen plättbaren k-zusammenhängenden Graphen. Finde eine Konstruktion die zusätzlich Taillenweite mindestens k garantiert. Gibt es einen plättbaren Graphen der ∞-zusammenhängend ist?

Aufgabe 5 (D-En, §8, Nr. 21) [2 Punkte]

Erweitere den Heiratssatz für lokal-endliche Graphen und zeige, dass der Satz sich nicht auf beliebige abzählbare Graphen erweitern lässt.

Aufgabe 6 (D-En, §8, Nr. 27) [2 Punkte]

Zeige, dass jeder lokal-endlicher, zusammenhängender, (ecken)transitiver Graph genau entweder höchstens 2 oder unendlich viele Enden hat.

Aufgabe 7 (D-En, §8, Nr. 31) [2 Punkte]

Zeige, dass folgende Aussagen für abzählbare Graphen G äquivalent sind:

(*i*) G enthält einen lokal-endlichen Spannbaum;
(*ii*) G enthält einen lokal-endlichen normalen Spannbaum;
(*iii*) jeder normale Spannbaum von G ist lokal-endlich;
(*iv*) für jede endliche Menge $X \subseteq V(G)$ besteht $G-X$ aus nur endlich viele Komponenten.