Fachbereich Mathematik
Diskrete Mathematik
Prof. Mathias Schacht

WS 2010/11
03. Dezember 2010

Graphentheorie

6. Serie

Besprechung am 10. Dezember 2010

Aufgabe 1 (D-De, §3, Nr. 16) [2 Punkte]

(*i*) Zeige, ohne den Satz von Kuratowski zu benutzen, dass die plättbaren Graphen im Prinzip wie in diesem Satz charakterisierbar sind: dass eine Menge $\mathcal{X}$ von Graphen existiert so dass ein Graph genau dann plättbar ist, wenn er keinen Minor aus $\mathcal{X}$ enthält.

(*ii*) Lässt sich jede Grapheneigenschaft auf diese Weise durch eine geeignete Menge $\mathcal{X}$ „verbotener Minoren“ charakterisieren? Wenn nicht, für welche Eigenschaften ist dies möglich?

Aufgabe 2 (D-De, §3, Nr. 19^-) [1 Punkt]

Enthält jeder minimal nicht plättbare Graph G (d.h. jeder nicht plättbare Graph G, dessen echte Teilgraphen alle plättbar sind) eine Kante e, für die $G - e$ maximal plättbar ist? Ändert sich die Antwort, wenn man unter „minimal nicht plättbar“ einen nicht plättbaren Graphen versteht, dessen echte Minoren alle plättbar sind?

Aufgabe 3 (D-De, §3, Nr. 20) [2 Punkte]

Zeige, dass in einem maximal plättbaren Graphen mit mindestens 6 Ecken jede zusätzliche Kante sowohl einen TK^5 als auch einen $TK_{3,3}$ entstehen lässt.

Aufgabe 4 (D-De, §3, Nr. 22) [2 Punkte]

Ein Graph heißt *outerplanar*, wenn er eine Zeichnung besitzt, bei der alle Ecken auf dem Rand des Außengebiets liegen. Zeige, dass ein Graph genau dann outerplanar ist, wenn er weder K^4 noch $K_{2,3}$ als Minor enthält.

Aufgabe 5 (D-De, §4, Nr. 3^-) [1 Punkt]

Versuche, den Beweis des Fünffarbensatzes in einen Beweis des Vierfarbensatzes umzuwandeln, wie folgt. Definiere v und H wie gehabt, nimm induktiv an, dass H eine 4-Färbung habe, und folge dann wieder dem Beweis des Fünffarbensatzes. Wo geht dies schief?

Aufgabe 6 (D-De, §4, Nr. 13^+) [6 Punkte]

Zeige, dass jeder kritisch k-chromatische Graph $(k-1)$-kantenzusammenhängend ist.

Aufgabe 7 (D-De, §4, Nr. 17^+) [6 Punkte]

Zeige die Gleichwertigkeit der folgenden Aussagen über Graphen G:

(*i*) $\chi(G) \leq k$;

(*ii*) G hat eine Orientierung, in der kein gerichteter Weg die Länge k hat;

(*iii*) G hat eine Orientierung wie in (*ii*), in der es auch keine gerichteten Kreise gibt.

(Für jede einzelne der 6 möglichen Implikationen gibt es einen Punkt.)