Fachbereich Mathematik
Diskrete Mathematik
Prof. Mathias Schacht

WS 2010/11
19. November 2010

Graphentheorie

5. Serie

Besprechung am 26. November 2010

Aufgabe 1 (D-De, §2, Nr. 18) [2 Punkte]

Zeige, dass für $k \geq 2$ jeder k-zusammenhängende Graph mit mindestens $2k$ Ecken einen Kreis der Länge mindestens $2k$ enthält.

Aufgabe 2 (D-De, §2, Nr. 19) [2 Punkte]

Zeige, dass in einem k-zusammenhängenden Graphen ($k \geq 2$) je k Ecken auf einem gemeinsamen Kreis liegen.

Aufgabe 3 (D-De, §2, Nr. 22^-) [1 Punkt]

In der disjunkten Vereinigung eines Graphen $H = \overline{K^{2m+1}}$ mit k Exemplaren des K^{2m+1} verbinde $V(H)$ mit jedem der K^{2m+1} bijektiv durch $2m+1$ Kanten. Zeige, dass der entstandene Graph G höchstens $km = \frac{1}{2}\kappa_G(H)$ kreuzungsfreie H Wege enthält.

Aufgabe 4 (D-De, §3, Nr. 2^-) [1 Punkt]

Zeige direkt mit Lemma 3.1.2, dass $K_{3,3}$ nicht als ebener Graph auftreten kann.

Aufgabe 5 (D-De, §3, Nr. 3^+ (ist im Buch keine +-Aufgabe)) [6 Punkte]

Hier ist ein Induktionsbeweis für die Aussage, dass jeder maximal ebene Graph G mit mindestens vier Ecken ein ebener Dreiecksgraph mit $\delta(G) = 3$ ist.

Der Induktionsanfang steht mit K^4. Zum Induktionsschritt für Eckenzahlen $n \to n+1$ nehmen wir an, dass jeder maximal ebene Graph G mit n Ecken ein ebener Dreiecksgraph mit Minimalgrad 3 ist. Füge nun auf beliebige Weise zu G eine $(n+1)$-te Ecke v hinzu, so dass der erweiterte Graph G' wieder maximal eben ist. Offenbar liegt v in einem Gebiet f von G, und da G' maximal eben ist, ist v zu allen Ecken auf dem Rand von f benachbart (und zu keinen weiteren Ecken). Da G ein ebener Dreiecksgraph ist, sind dies genau drei Ecken, d.h. auch G' ist ein ebener Dreiecksgraph mit Minimalgrad 3.

(i) Finde den Fehler im skizzierten Beweis.

(ii) Finde ein Gegenbeispiel zur behaupteten Aussage und zeige, weshalb der falsche Beweis dieses Gegenbeispiel übersieht.

Aufgabe 6 (D-De, §3, Nr. 6) [2 Punkte]

Ein Fußball ist aus beliebig geformten Fünfecken und Sechsecken so zusammengenäht, dass die Nähte einen kubischen Graphen bilden. Wie viele Fünfecke hat der Fußball?