Fachbereich Mathematik
Diskrete Mathematik
Prof. Mathias Schacht

WS 2010/11
29. Oktober 2010

Graphentheorie

2. Serie

Besprechung am 5. November 2010

Aufgabe 1 (D-De, §0, Nr. 26^-) [1 Punkt]

Zeige, dass ein Graph genau dann bipartit ist, wenn jeder *induzierte* Kreis gerade Länge hat.

Aufgabe 2 (D-De, §1, Nr. 1) [2 Punkte]

Zeige, dass ein bipartiter Graph zu jeder Paarung mit weniger als der größtmöglichen Anzahl von Kanten einen Verbesserungsweg enthält. Gilt die entsprechende Aussage auch in nicht bipartiten Graphen? (Ein *Verbesserungsweg* dort sei ein beliebiger Weg, der zwei nicht gepaarte Ecken verbindet und abwechselnd Kanten innerhalb und außerhalb der gegebenen Paarung enthält.)

Aufgabe 3 (D-De, §1, Nr. 5) [2 Punkte]

Beweise den Heiratssatz (Satz 1.1.2) mit dem Satz von König.

Aufgabe 4 (D-De, §1, Nr. 10^+) [6 Punkte]

Beweise den folgenden *Satz von Sperner*: in einer n-elementigen Menge X gibt es höchstens $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ einander paarweise nicht enthaltende Teilmengen.
(Tipp: Offenbar reicht es, eine Überdeckung des Teilmengenverbandes von X durch $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ Ketten zu finden.)

Aufgabe 5 (D-De, §1, Nr. 11^+) [6 Punkte]

Es sei $G = (A \dot\cup B, E)$ ein bipartiter Graph. Es gelte $\delta(G) \geq 1$, sowie $d(a) \geq d(b)$ für jede Kante ab mit $a \in A$. Zeige, dass G eine Paarung von A enthält.

Aufgabe 6 (D-De, §1, Nr. 12^-) [1 Punkt]

Finde einen bipartiten Graphen mit Präferenzlisten, für den keine Paarung maximaler Größe stabil ist und keine stabile Paarung maximale Größe hat. Finde einen nicht-bipartiten Graphen mit Präferenzlisten, für den es keine stabile Paarung gibt.

Aufgabe 7 (D-De, §1, Nr. 14) [2 Punkte]

Zeige, dass alle stabilen Paarungen eines Graphen dieselben Ecken überdecken. (Insbesondere haben sie alle dieselbe Mächtigkeit.)