Fachbereich Mathematik
Diskrete Mathematik
Prof. Mathias Schacht

WS 2010/11
21. Januar 2011

Graphentheorie

10. Serie

Besprechung am 28. Januar 2011

Aufgabe 1 (D-De, §6, Nr. 2^-) [1 Punkt]

Bestimme für jedes $k > 0$ die extremalen Graphen mit chromatischer Zahl höchstens k.

Aufgabe 2 (D-De, §6, Nr. 4) [2 Punkte]

Bestimme den Wert von $\mathbf{ex}(n, K_{1,r})$ für alle $r, n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3 (D-De, §6, Nr. 6) [2 Punkte]

Zeige ohne den Satz von Turán, dass die maximale Anzahl von Kanten in einem dreiecksfreien Graphen der Ordnung $n > 1$ gleich $\lfloor n^2/4 \rfloor$ ist.

Aufgabe 4 (D-De, §6, Nr. 12) [2 Punkte]

Die *obere Kantendichte* eines unendlichen Graphen G ist das Infimum aller reellen Zahlen α, so dass G bis auf Isomorphie nur endlich viele endliche Teilgraphen der Kantendichte $> \alpha$ hat. Zeige, dass die obere Kantendichte stets einen der abzählbar vielen Werte $0, 1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots$ annimmt.

(Tipp: Erdős-Stone.)

Aufgabe 5 (D-De, §6, Nr. 19^+) [6 Punkte]

Beweise ohne Zuhilfenahme eines anderen Satzes, und ohne die Betrachtung von Durchschnittsgraden, die Existenz einer Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, so dass jeder Graph der chromatischen Zahl mindestens $f(r)$ einen K^r als Minor enthält.

(Tipp: Induktion nach r. Zum Induktionsschritt von $(r-1)$ nach r versuche eine zusammenhängende Eckenmenge U zu finden, deren Nachbarn einen Untergraphen induzieren, dessen chromatische Zahl groß genug ist zur Erzwingung eines K^{r-1}-Minors. Sollte es eine solche Menge U nicht geben, so zeige, dass der gesamte Graph mit weniger Farben färbbar ist als angenommen.)

Aufgabe 6 (D-De, §6, Nr. 26^-) [1 Punkt]

Führe die Hadwiger-Vermutung für r auf die Hadwiger-Vermutung für $r + 1$ zurück.

Aufgabe 7 (D-De, §6, Nr. 33^+) [6 Punkte]

Beweise die Hadwiger-Vermutung für Ḳantengraphen.