Graphentheorie

Mathias Schacht

Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg

WS 2010/11

Stand: 15. Februar 2011

Übersicht I

Übersicht II

8. Hamiltonkreise (vertreten durch F. Hundertmark)

9. Extremale Graphentheorie

10. Ramseytheorie für Graphen

11. Zufallsgraphen

12. Minoren

Kapitel 1

Grundbegriffe

Grad einer Ecke

Proposition 0.2.1

Die Anzahl der Ecken ungeraden Grades in G ist stets gerade.

Proposition 0.2.2

Jeder Graph G mit mindestens einer Kante hat einen Untergraphen H mit $\delta(H) > \varepsilon(H) \geq \varepsilon(G)$.

Wege und Kreise

Proposition 0.3.1

Jeder Graph G enthält einen Weg der Länge $\delta(G)$ und einen Kreis der Länge mindestens $\delta(G) + 1$ (für $\delta(G) \geq 2$).

Proposition 0.3.2

Für jeden Graphen G, der einen Kreis enthält, gilt $g(G) \leq 2\,\mathbf{diam}(G) + 1$.

Proposition 0.3.3

Ein Graph G mit Radius $\leq k$ und Maximalgrad höchstens $d \geq 3$ hat weniger als $\frac{d}{d-2}(d-1)^k$ Ecken.

Zusammenhang

Proposition 0.4.1

Die Eckenmenge eines zusammenhängenden Graphen G besitzt stets eine Aufzählung $(v_1, \ldots, v_n)$ mit der Eigenschaft, daß $G_i := G[v_1, \ldots, v_i]$ für jedes i zusammenhängend ist.

Proposition 0.4.2

Ist $|G| \geq 2$, so gilt $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$.

Satz 0.4.3 (Mader 1972)

Jeder Graph G mit $d(G) \geq 4k$, wobei $0 \neq k \in \mathbb{N}$ sei, hat einen $(k+1)$-zusammenhängenden Teilgraphen H mit $\varepsilon(H) > \varepsilon(G) - k$.

Bäume und Wälder

Satz 0.5.1

Die folgenden Aussagen sind äquivalent für einen Graphen T:

(*i*) T ist ein Baum; (d.h. T ist zusammenhängendund kreislos)

(*ii*) zwischen je zwei Ecken enthält T genau einen Weg;

(*iii*) T ist minimal zusammenhängend, d.h. T ist zusammenhängend aber für jede Kante e von T ist $T - e$ nicht zusammenhängend;

(*iv*) T ist maximal kreislos, d.h. T ist kreislos aber für je zwei nicht benachbarte Ecken x, y enthält $T + xy$ einen Kreis.

Bäume und Wälder

Korollar 0.5.2

Die Eckenmenge eines Baumes hat stets eine Aufzählung $(v_1, \ldots, v_n)$ mit der Eigenschaft, daß v_i für jedes $i \geq 2$ genau einen Nachbarn in $\{v_1, \ldots, v_{i-1}\}$ hat.

Korollar 0.5.3

Ein zusammenhängender Graph mit n Ecken ist genau dann ein Baum, wenn er $n-1$ Kanten hat.

Korollar 0.5.4

Ist T ein Baum und G ein Graph mit $\delta(G) \geq |T| - 1$, so gilt $T \subseteq G$, d.h. G hat einen zu T isomorphen Teilgraphen.

Bipartite Graphen

Korollar 0.6.1

Ein Graph ist genau dann bipartit, wenn er keinen Kreis ungerader Länge enthält.

Eulersche Graphen

Satz 0.8.1 (Euler 1736)

Ein zusammenhängender Graph ist genau dann Eulersch, wenn jede seiner Ecken geraden Grad hat.

Kapitel 2

Paarungen & Überdeckungen

- Paarungen in bipartiten Graphen
- Paarungen in allgemeinen Graphen
- Überdeckungen durch disjunkte Wege

Paarungen in bipartiten Graphen

Satz 1.1.1 (König 1931)

Die größte Mächtigkeit einer Paarung in einem bipartiten Graphen G ist gleich der geringsten Mächtigkeit einer Eckenüberdeckung.

Heiratsbedingung: $\quad |N(S)| \geq |S| \quad$ für alle $S \subseteq A$

Satz 1.1.2 (Hall 1935)

Ein bipartiter Graph $G = (A \dot\cup B, E)$ enthält genau dann eine Paarung von A, wenn $|N(S)| \geq |S|$ gilt für alle Eckenmengen $S \subseteq A$.

Korollar 1.1.3

Ist $G = (A \dot\cup B, E)$ k-regulär mit $k \geq 1$, so hat G einen 1-Faktor.

Korollar 1.1.5 (Petersen 1891)

Jeder reguläre Graph geraden Grades > 0 hat einen 2-Faktor.

Stabile Paarungen

Präferenzlisten für $G = (A\dot{\cup}B, E)$:

- totale Ordnungen $\leq_a$ von $N(a)$ für alle $a \in A$
- totale Ordnungen $\leq_b$ von $N(b)$ für alle $b \in B$

stabile Paarung:

- Matching M in $G = (A\dot{\cup}B, E)$ mit der Eigenschaft

$$\neg\exists\, a \in A \text{ und } b \in B\colon\; M(a) <_a b \text{ und } M(b) <_b a\,,$$

wobei $M(v)$ der Partner der Ecke v in M ist.

Satz 1.1.4 (stable marriage theorem, Gale & Shapley 1961)

Für jeden bipartiten Graphen und jedes System von Präferenzlisten gibt es eine stabile Paarung.

Paarungen in allgemeinen Graphen

- $q(H) =$ Anzahl ungerader Komponenten von H

Tutte-Bedingung:

$$q(G - S) \leq |S| \text{ für alle } S \subseteq V(G) \tag{T}$$

Satz 1.2.1 (Tutte 1947)

Ein Graph G hat genau dann einen 1-Faktor, wenn (T) gilt.

Korollar 1.2.2 (Petersen 1891)

Jeder brückenlose kubische Graph hat einen 1-Faktor.

Überdeckungen durch disjunkte Wege

Wegüberdeckung:

- disjunkte Wege in einem Graphen die alle Ecken enthalten

Satz 1.5.1 (Gallai & Milgram 1960)

Jeder gerichtete Graph $D = (V, A)$ enthält eine Wegüberdeckung $\mathcal{P}$ und eine Menge $\{v_P \mid P \in \mathcal{P}\}$ unabhängiger Ecken mit $v_P \in P$ für alle $P \in \mathcal{P}$.

Korollar

Jeder gerichtete Graph D hat eine Wegüberdeckung durch höchstens $\alpha(D)$ Wege.

Korollar 1.5.2 (Dilworth 1950)

In jeder endlichen Halbordnung $(P, \leq)$ ist die geringste Anzahl von Ketten, die ganz P überdecken, gleich der größten Mächtigkeit einer Antikette in P.

Kapitel 3

Zusammenhang

- 2-zusammenhängende Graphen und Untergraphen
- Struktur 3-zusammenhängender Graphen
- Satz von Menger

2-zusammenhängende Graphen und Untergraphen

Proposition 2.1.1

Man erhält induktiv genau alle 2-zusammenhängenden Graphen, indem man von einem Kreis ausgehend jeweils zu einem bereits konstruierten Graphen H einen H-Weg hinzufügt.

Block:

- maximaler zusammenhängender Teilgraph B ohne Artikulation (in B)

$\Leftrightarrow$ maximaler 2-zusammenhängender Teilgraph oder K^2 oder K^1

Blockgraph von G:

- bipartiter Graph $BG(G) = (A \dot{\cup} \mathcal{B}, E_{BG})$ auf den Artikulationen und Blöcken mit $aB \in E_{BG}$ gdw. $a \in V(B)$

Proposition 2.1.4

Der Block-Graph eines zusammenhängenden Graphen ist ein Baum.

Struktur 3-zusammenhängender Graphen -Löschen

$G \dot{-} e$: lösche e, unterdrücke Endecken von e vom Grad 2

Lemma 2.2.1

Es sei G ein Graph und $e \in G$ eine Kante. Ist $G \dot{-} e$ 3-zusammenhängend, so ist auch G selbst 3-zusammenhängend.

Lemma 2.2.2

Jeder 3-zusammenhängende Graph $G \neq K^4$ hat eine Kante e, für die $G \dot{-} e$ wiederum ein 3-zusammenhängender Graph ist.

Satz 2.2.3 (Tutte 1966, Barnette & Grünbaum 1969)

Ein Graph G ist genau dann 3-zusammenhängend, wenn es eine Folge $G_0, \dots, G_n$ von Graphen gibt, mit

(i) $G_0 = K^4$ und $G_n = G$;

(ii) Für jedes $i < n$ hat G_{i+1} eine Kante e mit $G_i = G_{i+1} \dot{-} e$.

Überdies sind die Graphen $G_0, \dots, G_n$ stets 3-zusammenhängend.

Struktur 3-zusammenhängender Graphen -Kontraktion

G/e : Endecken von e „zusammenziehen“ und e löschen

Lemma

Es sei G ein Graph und $xy \in G$ eine Kante mit $d(x)$, $d(y) \geq 3$. Ist G/e 3-zusammenhängend, so ist auch G selbst 3-zusammenhängend.

Lemma 2.2.4

Jeder 3-zusammenhängende Graph $G \neq K^4$ hat eine Kante e, für die G/e wiederum ein 3-zusammenhängender Graph ist.

Satz 2.2.5 (Tutte 1961)

Ein Graph G ist genau dann 3-zusammenhängend, wenn es eine Folge $G_0, \ldots, G_n$ von Graphen gibt, mit

(i) $G_0 = K^4$ und $G_n = G$;

(ii) $\forall i < n$ hat G_{i+1} eine Kante xy mit $d(x), d(y) \geq 3$ und $G_i = G_{i+1}/xy$.

Überdies sind die Graphen $G_0, \ldots, G_n$ stets 3-zusammenhängend.

Satz von Menger I

Satz 2.3.1 (Menger 1927)

Es sei $G = (V, E)$ ein Graph und $A, B \subseteq V$. Die kleinste Mächtigkeit einer A von B in G trennenden Eckenmenge ist gleich der größten Mächtigkeit einer Menge disjunkter A–B-Wege in G.

a–B-Fächer: Menge von a–B-Wegen die sich paarweise nur in a schneiden.

Korollar 2.3.4

Ist $B \subseteq V$ und $a \in V \setminus B$, so ist die kleinste Mächtigkeit einer a von B in G trennenden Eckenmenge $X \subseteq V \setminus \{a\}$ gleich der größten Mächtigkeit eines a–B-Fächers in G.

Satz von Menger II

Korollar 2.3.5

Es seien a, b zwei verschiedene Ecken von G.

(*i*) Sind a und b nicht benachbart, so ist die kleinste Mächtigkeit einer a von b in G trennenden Eckenmenge $X \subseteq V \setminus \{a, b\}$ gleich der größten Mächtigkeit einer Menge kreuzungsfreier a–b-Wege in G.

(*ii*) Die kleinste Mächtigkeit einer a von b in G trennenden Kantenmenge $X \subseteq E$ ist gleich der größten Mächtigkeit einer Menge kantendisjunkter a–b-Wege in G.

Satz von Menger III

Satz 2.3.6 (Globale Version des Satzes von Menger)

(*i*) G ist genau dann k-zusammenhängend, wenn G zwischen je zwei Ecken k kreuzungsfreie Wege enthält.

(*ii*) G ist genau dann k-kantenzusammenhängend, wenn G zwischen je zwei Ecken k kantendisjunkte Wege enthält.

Kapitel 4

Graphen in der Ebene

- Topologische Voraussetzungen
- Ebene Graphen
- Der Satz von Kuratowski

Topologische Voraussetzungen

Strecke: $\{a + \lambda(b - a) \colon \lambda \in [0, 1]\}$ für $a, b \in \mathbb{R}^2$

Polygon: Vereinigung endlich vieler Strecken homöomorph zum Einheitskreis S^1

Polygonzug: ... Einheitsintervall $[0, 1]$

Gebiet: Äquivalenzklassen einer offenen Menge $O \subseteq \mathbb{R}^2$ von durch Polygonzügen in O verbundener Punkte

Rand von X: Punkte für die jede Umgebung X und $\mathbb{R}^2 \setminus X$ trifft

Satz 3.1.1 (Jordanscher Kurvensatz (für Polygone))

Ist $P \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Polygon, so hat $\mathbb{R}^2 \setminus P$ genau zwei Gebiete und jedes der beiden Gebiete hat als Rand ganz P. □

Topologische Voraussetzungen

Lemma 3.1.2

Es seien P_1, P_2 und P_3 drei Polygonzüge, mit den gleichen Endpunkten aber sonst disjunkt.

(*i*) $\mathbb{R}^2 \setminus (P_1 \cup P_2 \cup P_3)$ hat genau drei Gebiete, mit den Rändern $P_1 \cup P_2$, $P_2 \cup P_3$ und $P_1 \cup P_3$.

(*ii*) Ist P ein Polygonzug zwischen einem Punkt im Inneren von P_1 und einem Punkt im Inneren von P_3, dessen Inneres in dem Gebiet von $\mathbb{R}^2 \setminus (P_1 \cup P_3)$ liegt, welches das Innere von P_2 enthält, dann trifft das Innere von P das Innere von P_2. □

Lemma 3.1.3

Sind zwei disjunkte Mengen $X_1, X_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ jeweils die Vereinigung endlich vieler Punkte und Polygonzüge, und ist P ein Polygonzug zwischen einem Punkt in X_1 und einem Punkt in X_2, dessen Inneres ganz in einem Gebiet O von $\mathbb{R}^2 \setminus (X_1 \cup X_2)$ liegt, so ist $O \setminus P$ ein Gebiet von $\mathbb{R}^2 \setminus (X_1 \cup P \cup X_2)$. □

Ebene Graphen

Ebener Graph:

(i) $V \subseteq \mathbb{R}^2$ endlich;

(ii) jede Kante ist ein Polygonzug zwischen zwei Ecken;

(iii) verschiedene Kanten haben verschiedene Mengen von Endpunkten;

(iv) das Innere einer jeden Kante enthält weder eine Ecke noch einen Punkt einer anderen Kante.

$F(G)$: Gebiete von G

$G[f]$: Rand des Gebietes f

Lemma 3.2.1

Ist G ein ebener Graph, $f \in F(G)$ und $H \subseteq G$, so gilt:

(i) f ist in einem Gebiet f' von H enthalten.

(ii) Ist $G[f] \subseteq H$, so gilt $f' = f$.

Ebene Graphen

Lemma 3.2.2

Es sei G ein ebener Graph und $e \in G$ eine Kante.

(*i*) Für jedes Gebiet f von G gilt entweder $e \subseteq G[f]$ oder $\mathring{e} \cap G[f] = \emptyset$.

(*ii*) Die Kante e liegt auf dem Rand mindestens eines und höchstens zweier Gebiete von G.

(*iii*) Liegt e auf einem Kreis $C \subseteq G$, so liegt e auf dem Rand genau zweier Gebiete von G, und diese sind in verschiedenen Gebieten von C enthalten. Liegt e auf keinem Kreis, so liegt e auf dem Rand nur eines Gebietes. $\square$

Korollar 3.2.3

Für jedes Gebiet f von G ist $G[f]$ die Punktmenge eines Teilgraphen von G.

Ebene Graphen

Lemma 3.2.4

Ein ebener Wald hat genau ein Gebiet.

Lemma 3.2.5

Hat ein ebener Graph verschiedene Gebiete mit dem gleichen Rand, so ist der Graph ein Kreis.

Proposition 3.2.6

In einem 2-zusammenhängenden ebenen Graphen ist jedes Gebiet durch einen Kreis berandet.

Eulers Formel

Proposition 3.2.8

Ein ebener Graph der Ordnung ≥ 3 ist genau dann maximal eben, wenn er ein ebener Dreiecksgraph ist.

Satz 3.2.9 (Eulersche Polyederformel 1758)

Ist G ein zusammenhängender ebener Graph mit $n \geq 1$ Ecken, m Kanten und ℓ Gebieten, so gilt $n - m + \ell = 2$.

Korollar 3.2.10

Sei G ein ebener Graph mit $n \geq 3$ Ecken, dann gilt

(i) G hat höchstens $3n - 6$ Kanten und Gleichheit gilt nur für Dreiecksgraphen.

(ii) falls G dreiecksfrei ist, dann hat G höchstens $2n - 4$ Kanten.

Korollar 3.2.11

Kein ebener Graph enthält einen K^5 oder $K_{3,3}$ als topologischen Minor.

Plättbare/planare Graphen – Satz von Kuratowski

Plättbarer Graph: isomorph zu einem ebenen Graphen

Proposition 3.4.1

(*i*) Jeder maximal ebene Graph ist maximal plättbar.

(*ii*) Ein plättbarer Graph mit $n \geq 3$ Ecken ist genau dann maximal plättbar, wenn er $3n - 6$ Kanten hat.

Satz 3.4.6 (Kuratowski 1930; Wagner 1937)

Die folgenden Aussagen sind äquivalent für Graphen G:

(*i*) G ist plättbar;

(*ii*) G enthält weder einen K^5 noch einen $K_{3,3}$ als Minor;

(*iii*) G enthält weder einen K^5 noch einen $K_{3,3}$ als topologischen Minor.

Satz von Kuratowski – Beweis

Lemma 3.4.2

$K^5 \preceq G$ oder $K_{3,3} \preceq G \iff TK^5 \subseteq G$ oder $TK_{3,3} \subseteq G$

Lemma 3.4.3 (Kuratowski für 3-zusammenhängende G)

$\kappa(G) \geq 3,\ K^5, K_{3,3} \not\preceq G \implies G$ ist plättbar.

Lemma 3.4.4

Sei $\mathcal{X}$ eine Menge 3-zusammenhängender Graphen und $\{V_1, V_2\}$ eine Teilung von G der Ordnung $\kappa(G) \leq 2$. Ist G kantenmaximal ohne topologischen Minor in $\mathcal{X}$, dann sind es auch $G[V_1]$ und $G[V_2]$ und $G_1 \cap G_2 = K^2$.

Lemma 3.4.5

Ist $|G| \geq 4$ und G kantenmaximal ohne TK^5 und $TK_{3,3}$, so ist G 3-zusammenhängend.

Korollar 3.4.7

Jeder maximal plättbare Graph mit $|G| \geq 4$ ist 3-zusammenhängend.

Kapitel 5

Färbungen

- Färben ebener Graphen
- Eckenfärbungen
- Kantenfärbungen

Färben ebener Graphen

Satz 4.1.1 (Vierfarbensatz – Appel & Haken 1977)

Jeder ebene Graph hat eine Eckenfärbung mit höchstens vier Farben. □

Proposition 4.1.2 (Fünffarbensatz – Heawood 1890)

Jeder ebene Graph hat eine Eckenfärbung mit höchstens fünf Farben.

Satz 4.1.3 (Grötzsch 1959)

Jeder dreiecksfreie ebene Graph hat eine Eckenfärbung mit höchstens drei Farben. □

Eckenfärbungen

Proposition 4.2.1

Für jeden Graphen $G = (V, E)$ gilt $\chi(G) \leq \sqrt{2|E| + 1/4} + 1/2$.

Proposition 4.2.2

Für jeden Graphen G gilt $\chi(G) \leq \mathbf{col}(G) = \max\{\delta(H) \colon H \subseteq G\} + 1$.

Korollar 4.2.3

Jeder Graph G hat einen Untergraphen H mit $\delta(H) \geq \chi(G) - 1$.

Satz 4.2.4 (Brooks 1941)

Es sei G ein zusammenhängender Graph. Falls G weder vollständig noch ein Kreis ungerader Länge ist, so gilt $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

Satz 4.2.5 (Erdős 1959)

Für alle $k \in \mathbb{N}$ existiert ein Graph G mit Taillenweite $g(G) > k$ und $\chi(G) > k$. $\square$

Satz von Hajós und k-konstruierbare Graphen

k-konstruierbarer Graph:

(*i*) K^k ist k-konstruierbarer,

(*ii*) ist G k-konstruierbar und x nicht mit y in G benachbart, so ist auch $(G + xy)/xy$ k-konstruierbar,

(*iii*) Sind G_1 und G_2 k-konstruierbar mit $V(G_1) \cap V(G_2) = \{x\}$, sowie y_1 und y_2 Nachbarn von x in G_1 bzw. G_2, so ist auch

$$(G_1 \cup G_2) - xy_1 - xy_2 + y_1 y_2$$

k-konstruierbar.

Satz 4.2.6 (Hajós 1961)

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ und jeden Graphen G gilt genau dann $\chi(G) \geq k$, wenn G einen k-konstruierbaren Teilgraphen enthält.

Kantenfärbungen

Satz 4.3.1 (König 1916)

Für jeden bipartiten Graphen G gilt $\chi'(G) = \Delta(G)$.

Satz 4.3.2 (Vizing 1964)

Für jeden Graphen G gilt

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1\,.$$

Kapitel 6

Unendliche Graphen (vertreten durch R. Diestel)

- siehe Buchkapitel auf der Webseite

Kapitel 7

Flüsse

- Rundflüsse
- Netzwerke

Rundflüsse

Notation:

$$\vec{E} = \{(e,x,y)\colon\ e = xy \in E\}$$

$$\vec{F}(X,Y) = \{\vec{e} = (e,x,y) \in \vec{F}\colon\ x \in X \text{ und } y \in Y\} \quad \text{für alle } \vec{F} \subseteq \vec{E}$$

$$f\colon\ \vec{E} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(X,Y) = \sum_{(e,x,y)\in\vec{E}(X,Y)} f(e,x,y)\,.$$

Rundfluss $f\colon\ \vec{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ *auf* $G = (V,E)$:

$$f(e,x,y) = -f(e,y,x) \qquad \forall (e,x,y) \in \vec{E} \tag{1}$$

$$f(v,V) = 0 \qquad \forall v \in V \tag{2}$$

Proposition 5.1.1

$f(X,\bar{X}) = 0$ für jeden Rundfluss f und jede Menge $X \subseteq V$.

Korollar 5.1.2

$f(e,x,y) = 0$ für jeden Rundfluss f und jede Brücke $e = xy$.

Flüsse in Netzwerken

Netzwerk $N = (G, s, t, c)$: $G = (V, E)$ Graph, $s \neq t \in V$, $c\colon \vec{E} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ (Kapazität)

Fluss $f\colon \vec{E} \to \mathbb{R}$ *auf* $G = (V, E)$:

$$f(e, x, y) = -f(e, y, x) \qquad \forall (e, x, y) \in \vec{E} \tag{3}$$

$$f(v, V) = 0 \qquad \forall v \in V \setminus \{s, t\} \tag{4}$$

$$f(e, x, y) \leq c(e, x, y) \qquad \forall (e, x, y) \in \vec{E} \tag{5}$$

s-t-Schnitt S: $\quad s \in S \subseteq V \setminus \{t\}$

Proposition 5.2.1

Für jeden s-t-Schnitt S in $N = (G, s, t, c)$ und jeden Fluss f gilt

$$f(s, V) = f(S, \bar{S}) \leq c(S, \bar{S}) = \sum_{(e,x,y) \in \vec{E}(S, \bar{S})} c(e, x, y)\,.$$

Satz 5.2.2 (Ford & Fulkerson 1956 (Max-Flow-Min-Cut))

Sei $N = (G, s, t, c)$ ein Netzwerk. Dann gilt

$$\max_{\text{Fluss } f} f(s, V) = \min_{s\text{-}t\text{-Schnitt } S} c(S, \bar{S})\,.$$

Kapitel 8

Hamiltonkreise (vertreten durch F. Hundertmark)

- Hinreichende Bedingungen
- Gradsequenzen
- Hamiltonkreise im Quadrat eines Graphen

Hinreichende Bedingungen

Hamiltonkreis/-weg: Kreis/Weg der jede Ecke genau einmal durchläuft

Satz 8.1.1 (Dirac 1952)

Ist G ein Graph mit $n \geq 3$ Ecken und Minimalgrad $\delta(G) \geq n/2$, so enthält G einen Hamiltonkreis.

Proposition 8.1.2 (Chvátal & Erdős 1972)

Jeder Graph G mit mindestens drei Ecken und $\kappa(G) \geq \alpha(G)$ enthält einen Hamiltonkreis.

Hamiltonische Gradsequenzen

Hamiltonische Sequenz: $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n$ heisst *hamiltonisch* bzw. *Weg-hamiltonisch*, falls jeder Graph G mit $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ und $d(v_i) \geq a_i$ für alle $i \in [n]$ einen Hamiltonkreis bzw. Hamiltonweg enthält

Satz 8.2.1 (Chvátal 1972)

Ein Tupel $(a_1, \dots, a_n)$ natürlicher Zahlen mit $a_1 \leq \dots \leq a_n < n$ und $n \geq 3$ ist genau dann hamiltonsch, wenn für jedes $i < n/2$ gilt:

$$a_i \leq i \Rightarrow a_{n-i} \geq n - i\,.$$

Korollar 8.2.2

Ein Tupel $(a_1, \dots, a_n)$ natürlicher Zahlen mit $n \geq 3$ und $a_1 \leq \dots \leq a_n < n$ ist genau dann Weg-hamiltonisch, wenn für jedes $i \leq n/2$ gilt:

$$a_i < i \Rightarrow a_{n+1-i} \geq n - i\,.$$

Satz von Fleischner

d-te Potenz von G: Für einen Graphen G und $d \in \mathbb{N}$ bezeichnet G^d den Graphen auf $V(G)$, bei dem zwei Ecken genau dann benachbart sind, wenn sie in G einen Abstand $\leq d$ haben.

Satz 8.3.1 (Fleischner 1974)

Ist G ein 2-zusammenhängender Graph, so enthält G^2 einen Hamiltonkreis.

Kapitel 9

Extremale Graphentheorie

- Teilgraphen
- Minoren

Vollständige Teilgraphen

Extremale-/Turánfunktion: $\mathrm{ex}(n, F) = \max\{e(G) \colon F \not\subseteq G \subseteq K^n\}$

Turángraph $T^k(n)$: Vollständiger k-partiter Graph auf $n \geq k$ Ecken, dessen Partitionsmengen sich in ihrer Größe um höchstens 1 unterscheiden.

- Offensichtlich gilt für jeden Graphen mit mindestens einer Kante:

$$\mathrm{ex}(n, K^{r-1}) \geq e(T^{r-1}(n))$$
$$\mathrm{ex}(n, F) \geq e(T^{\chi(F)-1}(n)) .$$

Satz 6.1.1 (Turán 1941)

Für alle $r, n \in \mathbb{N}$ mit $r > 1$ ist jeder Graph $G \not\supseteq K^r$ mit n Ecken und $\mathrm{ex}(n, K^r)$ Kanten ein $T^{r-1}(n)$. Also $\mathrm{ex}(n, K^r) = e(T^{r-1}(n))$.

Bipartite Teilgraphen

Satz (Kövari, Sós & Turán 1954)

Für jeden bipartiten Graphen F gilt: $\mathrm{ex}(n,F)=o(n^2)$. D.h. für jedes $\varepsilon>0$ existiert ein n_0, so dass für jedes $n\geq n_0$ gilt $\mathrm{ex}(n,F)\leq\varepsilon n^2$.

Bemerkung: Tatsächlich ergibt der folgende Beweises für $2\leq a\leq b$

$$\mathrm{ex}(n,K_{a,b})\leq\frac{1}{2}\Big((b-1)^{1/a}n^{2-1/a}+(a-1)n\Big)\leq Cn^{2-1/a},$$

für eine geeignete Konstante C, welche nur von a und b abhängt.

Beweis des Satzes von Kövari, Sós & Turán

- Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit n Ecken der keine Kopie des $K_{a,b}$ enthält.

$\Rightarrow$ G enthält höchstens $(b-1)\binom{n}{a}$ Sterne $K_{a,1}$, da sonst eine a-Menge existiert, welche in mindestens b Sternen $K_{a,1}$ die Menge der Blätter darstellt und somit in einem $K_{a,b} \subseteq G$ enthalten ist.

- Andererseits enthält G mindestens

$$\sum_{v \in V} \binom{d_G(v)}{a}$$

Sterne $K_{a,1}$ und mit Jensens Ungleichung für konvexe Funktionen folgt

$$(b-1)\binom{n}{a} \geq \sum_{v \in V} \binom{d_G(v)}{a} \overset{\text{J.-U.}}{\geq} n\binom{\sum_v d_G(v)/n}{a} \geq n\binom{2|E|/n}{a}.$$

$\Rightarrow$

$$(b-1)\frac{n^a}{a!} \geq n\frac{(2|E|/n)_a}{a!} \geq n\frac{(2|E|/n - a + 1)^a}{a!}$$

$\Rightarrow$

$$|E| \leq \frac{1}{2}\left((b-1)^{1/a} n^{2-1/a} + (a-1)n\right)$$

$\square$

Beliebige Teilgraphen

Proposition

Für jeden Graphen F existiert $\pi_F := \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{ex}(n,F)}{\binom{n}{2}}$.

- Turán $\Rightarrow \pi_{K^r} = 1 - \frac{1}{r-1}$ für alle $r \geq 2$
- KST $\Rightarrow \pi_F = 0$ für bipartites F

Satz 6.1.2 (Erdős & Stone 1946)

Für jeden Graphen F mit mindestens einer Kante und jedes $\varepsilon > 0$ existiert n_0, so dass für jedes $n \geq n_0$ gilt $\mathrm{ex}(n,F) \leq e(T^{\chi(F)-1}(n)) + \varepsilon n^2$.

Korollar 6.1.3

Für jeden Graphen F mit mindestens einer Kante gilt

$$\pi_F = \pi_{K^{\chi(F)}} = 1 - \frac{1}{\chi(F)-1}.$$

Beweis der Proposition

Es ist hinreichend zu zeigen, dass $(\mathrm{ex}(n,F)/\binom{n}{2})_{n\geq 3}$ eine monoton fallende Folge ist.

Seien F und n gegeben und sei G ein extremaler Graph mit Eckenmenge $V(G)=\{v_1,\dots,v_n\}$ der keine Kopie von F enthält, d.h. $e(G)=\mathrm{ex}(n,F)$.

Für $i=1,\dots,n$ sei $G_i=G-v_i$. Offensichtlich enhält jeder solche Graph G_i keine Kopie von F, also $e(G_i)\leq \mathrm{ex}(n-1,F)$ und jede Kante von G ist in genau $n-2$ dieser Graphen enthalten.

Somit gilt

$$\begin{aligned}(n-2)\,\mathrm{ex}(n,F)=(n-2)e(G)&=\sum_{i=1}^{n}e(G_i)\\&\leq\sum_{i=1}^{n}\mathrm{ex}(n-1,F)=n\,\mathrm{ex}(n-1,F)\end{aligned}$$

und es folgt

$$\frac{\mathrm{ex}(n,F)}{n}\leq\frac{\mathrm{ex}(n-1,F)}{n-2}\qquad\Leftrightarrow\qquad\frac{\mathrm{ex}(n,F)}{n(n-1)/2}\leq\frac{\mathrm{ex}(n-1,F)}{(n-2)(n-1)/2}$$

□

Beweis des Satzes von Erdős und Stone

Lemma (ES mit Minimalgrad)

Für jedes $\delta > 0$ und alle $r, s \in \mathbb{N}$ mit $r \geq 2$ existiert ein $n_1 \in \mathbb{N}$, so dass jeder Graph G mit $n \geq n_1$ Ecken und Minimalgrad $\delta(G) \geq \left(1 - \frac{1}{r-1} + \delta\right)(n-1)$ enthält K_s^r.

ES mit Minimalgrad $\Longrightarrow$ Satz 6.1.2.

Seien $\varepsilon > 0$ und ein Graph F mit $\chi(F) = r \geq 2$ gegeben. Dann gibt es ein $s \in \mathbb{N}$ mit $F \subseteq K_s^r$. Wir wenden das Lemma mit $\delta = \varepsilon/2$ und K_s^r und erhalten $n_1 \in \mathbb{N}$. Das n_0 in Satz 6.1.2 wählen wir als $n_0 = \lceil (n_1 + 1)/\sqrt{\varepsilon/2} \rceil$.

Sei nun $G = (V, E)$ ein Graph mit $|V| = n \geq n_0$ Ecken und $|E| \geq (1 - 1/(r-1) + \varepsilon)\binom{n}{2}$ Kanten. Wir entfernen sukzessive Ecken von G solange bis der resultierende Graph H die Minimalgradbedingung $\delta(H) \geq (1 - 1/(r-1) + \delta)(|V(H)| - 1)$ erfüllt.

Offensichtlich existiert solch ein Untergraph H, da der K^1 die Bedingung erfüllt und somit ist $\ell = n - |V(H)| < n$. Dann gilt

$$e(H) > e(G) - \sum_{i=1}^{\ell} (1 - \tfrac{1}{r-1} + \delta)(n - i) > |E| - (1 - \tfrac{1}{r-1} + \tfrac{\varepsilon}{2}) \sum_{i=1}^{n-1} (n - i)$$

$$= |E| - (1 - \tfrac{1}{r-1} + \tfrac{\varepsilon}{2})\binom{n}{2} \geq \tfrac{\varepsilon}{2}\binom{n}{2} \geq \binom{\lfloor \sqrt{\varepsilon/2} \cdot n \rfloor}{2}.$$

$\Rightarrow |V(H)| \geq \lfloor n\sqrt{\varepsilon/2} \rfloor \geq n_0\sqrt{\varepsilon/2} - 1 \geq n_1$ und das Lemma gibt $G \supseteq H \supseteq K_s^r \supseteq F$. $\square$

Beweis des Lemmas (ES mit Minimalgrad)

Wir führen Induktion über r. Der Fall $r = 2$ folgt vom Satz von Kövari, Sós und Turán.

Sei nun $r + 1 \geq 2$, $s \in \mathbb{N}$ und $\delta > 0$ gegeben. Wir wählen $t = \lceil s/\delta \rceil$ und wählen n_1 groß genug, so dass wir die Induktionsvoraussetzung für r, t, und δ anwenden können und so dass

$$n_1 > \tfrac{1}{\delta}\left(\tbinom{t}{s}^r (s-1) + rt\right) .$$

Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $|V| = n \geq n_1$ Ecken und $\delta(G) \geq (1 - \frac{1}{r} + \delta)(n-1)$. Nach Induktionsvoraussetzung finden enthält G einen K_t^r und seien $X_1, \dots, X_r$ die Partitionsklassen dieser Kopie von K_t^r. Definiere $X = X_1 \dot\cup \dots \dot\cup X_r$, $Y = V \setminus X$ und sei Z die Menge der Ecken in Y, welche mindestens s Nachbarn in jeder der Partitionsklassen hat, d.h.

$$Z = \{y \in Y \colon |N_G(y) \cap X_i| \geq s \text{ für alle } i = 1, \dots, r\}.$$

Wir wollen zeigen, dass $|Z| > \binom{t}{s}^r (s-1)$, da es dann s Ecken $z_1, \dots, z_s$ in $Z \subseteq Y$ und s-elementige Teilmengen $X_1' \subseteq X_1, \dots, X_r' \subseteq X_r$ geben muss, so dass für jedes $j = 1, \dots, s$ und jedes $i = 1, \dots, r$ gilt

$$N_G(z_j) \cap X_i \supseteq X_i'$$

und somit die Existenz einer Kopie von K_s^{r+1} in G gegeben ist.

Beweis des Lemmas (ES mit Minimalgrad) - Teil 2

Dafür schätzen wir die Anzahl der fehlenden Kanten zwischen X und Y ab. Nach der Definition von Z gilt

$$e_{\bar{G}}(X,Y) \geq |Y \setminus Z|(t-s) \geq |Y \setminus Z|(t-\delta t) = (n-rt-|Z|)(1-\delta)t\,.$$

Andererseits ergibt die Minimalgradbedingung von G eine Maximalgradbedingung für $\overline{G}$ und es folgt

$$e_{\bar{G}}(X,Y) \leq (\tfrac{1}{r}-\delta)(n-1)\cdot|X| \leq (\tfrac{1}{r}-\delta)n\cdot rt = (1-r\delta)tn\,.$$

Beide Abschätzungen zusammen ergeben

$$(n-rt-|Z|)(1-\delta)t \leq e_{\bar{G}}(X,Y) \leq (1-r\delta)tn$$

und es folgt

$$|Z| \geq \frac{(r-1)\delta}{1-\delta}n - rt\,.$$

Schließlich stellt die Wahl von n_1 und $n \geq n_1$ sicher, dass

$$|Z| \geq \frac{(r-1)\delta}{1-\delta}n - rt > \binom{t}{s}^r(s-1)\,.$$

$\square$

Minoren

Proposition 6.2.2

Jeder Graph G mit $d(G) \geq 2^{r-2}$ enthält einen K^r-Minor.

Bemerkungen:

- 2^{r-2} kann durch $Cr\sqrt{\log r}$ ersetzt werden (Satz 6.2.3 von Kostochka)
- für topologische Minoren ist Durchschnittsgrad Cr^2 ausreichend (Satz 6.2.1 von Bollobás und Thomason)

Vermutung (Hadwiger 1943)

Für jedes $r \in \mathbb{N}$ und jeden Graphen G gilt, falls $\chi(G) \geq r$, dann $K^r \preceq G$.

- $r \leq 4$: trivial und $r = 5 \iff$ Vierfarbensatz (siehe Kapitel 6.3)
- $r = 6$ wurde 1993 von Robertson, Seymour und Thomas auf den Vierfarbensatz zurc̆kgeführt

Kapitel 10

Ramseytheorie für Graphen

- Satz von Ramsey

Satz von Ramsey

Ramseyzahlen: Für Graphen $F_1, \dots, F_r$ sei

$$R(F_1, \dots, F_r) := \min \Big\{ n_0 \in \mathbb{N} \colon \forall n \geq n_0 \ \forall E_1 \dot\cup \dots \dot\cup E_r = E(K^n) \\ \exists j \in [r] \colon E_j \text{ enhält Kopie von } F_j \Big\} .$$

Satz 7.1.1 (Ramsey 1930)

Für alle $r, \ell \in \mathbb{N}$ ist $R(\underbrace{K^\ell, \dots, K^\ell}_{r-mal})$ wohldefiniert, d.h. $R(K^\ell, \dots, K^\ell) < \infty$.

Beweis.

$R(K^{\ell_1}, \dots, K^1, \dots, K^{\ell_r}) = 1$ und für alle $\ell_1, \dots, \ell_r \geq 2$ gilt per Induktion

$$R(K^{\ell_1}, \dots, K^{\ell_r}) \leq \sum_{i=1}^{r} R(K^{\ell_1}, \dots, K^{\ell_i - 1}, \dots, K^{\ell_r}) - r + 2. \qquad \square$$

Korollar

Für alle Graphen $F_1, \dots, F_r$ ist $R(F_1, \dots, F_r)$ wohldefiniert.

Satz von Ramsey für Hypergraphen (unendliche Version)

Satz 7.1.2

Für alle k und $r \in \mathbb{N}$, für jede abzählbar unendliche Menge X und jede Partition $E_1 \dot\cup \dots \dot\cup E_r = [X]^k = \binom{X}{k}$ aller k-elementigen Teilmengen von X existiert eine unendliche Menge $Y \subseteq X$ und ein Index $j \in [r]$, so dass $\binom{Y}{k} \subseteq E_j$.

Satz 7.1.4

Für alle k, r, $\ell \in \mathbb{N}$, existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass für jede n-elementige Menge X und jede Partition $E_1 \dot\cup \dots \dot\cup E_r = [X]^k = \binom{X}{k}$ existiert eine ℓ-elementige Menge $Y \subseteq X$ und ein Index $j \in [r]$, so dass $\binom{Y}{k} \subseteq E_j$.

Satz von Ramsey – Bemerkungen

Satz

Für alle k, r, $\ell \in \mathbb{N}$, existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass für jede Partition $E_1 \dot\cup \ldots \dot\cup E_r = \binom{X}{k}$ mit $X = \{1, \ldots, n\}$ eine Teilmenge $Y \subseteq X$ mit $|Y| \geq \max\{\ell, \min Y\}$ und ein index $j \in [r]$ existiert, so dass $\binom{Y}{k} \subseteq E_j$.

Beweis.

Wie Beweis von Satz 7.1.4 Korollar von Satz 7.1.2. □

Satz (Paris–Harrington 1977)

Dieser Satz kann nicht innerhalb der Peano-Arithmetik bewiesen werden. □

Offene Probleme:

- verbessere Schranken für $k \to \infty$ für $R(K^\ell, K^\ell)$
- Existiert $\lim_{\ell\to\infty} \big(R(K^\ell, K^\ell)\big)^{1/\ell} = c$?

$$\sqrt{2} \leq \liminf_{\ell\to\infty} \big(R(K^\ell, K^\ell)\big)^{1/\ell} \leq \limsup_{\ell\to\infty} \big(R(K^\ell, K^\ell)\big)^{1/\ell} \leq 4$$

Erdős: \$100 für den Beweis „c existiert" und \$250 für dessen Bestimmung

Kapitel 11

Zufallsgraphen

- Modelle
- Die probabilistische Methode
- Eigenschaften fast aller Graphen

Zufallsgraphen

endlicher Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{P})$:

endliche Menge Ω und $\mathbb{P}\colon\ \Omega \to [0,1]$ mit $\sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{P}(\omega) = 1$

Ereignis $\quad A \subseteq \Omega$ mit $\mathbb{P}(A) = \sum_{a\in A} \mathbb{P}(a)$

$G(n)$: jeder Graph ist gleichwahrscheinlich

$$\Omega = \{G\colon\ V(G) = [n]\} \text{ und } \mathbb{P}(G) = \frac{1}{|\Omega|} = 2^{-\binom{n}{2}}$$

$G(n, M)$: $\quad \Omega = \{G\colon\ V(G) = [n] \text{ und } e(G) = M\}$ und $\mathbb{P}(G) = \frac{1}{|\Omega|} = \binom{\binom{n}{2}}{M}^{-1}$

$G(n, p)$: jede Kante ist unabhängig mit Wahrscheinlichkeit p enthalten

$$\Omega = \{G\colon\ V(G) = [n]\} \text{ und } \mathbb{P}(G) = p^{e(G)}(1-p)^{\binom{n}{2}-e(G)}$$

Bemerkungen:

- $G(n) = G(n, 1/2)$
- $G(n, p)$ heisst *Binomialer Zufallsgraph*

Untere Ramseyschranke

Lemma 9.1.2

Für jedes $k \geq 2$ gilt für die Wahrscheinlichkeit, dass $G \in G(n, p)$ eine unabhängige Eckenmenge bzw. eine Clique der Mächtigkeit k enthält,

$$\mathbb{P}(\alpha(G) \geq k) \leq \binom{n}{k}(1-p)^{\binom{k}{2}}$$

bzw.

$$\mathbb{P}(\omega(G) \geq k) \leq \binom{n}{k}p^{\binom{k}{2}}.$$

Satz 9.1.3 (Erdős 1947)

Für $\ell \geq 3$ gilt $R(K^\ell, K^\ell) > 2^{\ell/2}$.

Markov-Ungleichung

Zufallsvariable/-größe: $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$

Erwartungswert/Mittelwert $\mathbb{E}[X]$:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\omega)$$
$$= \sum_{x\in X(\Omega)} x\,\underbrace{\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega\colon\ X(\omega) = x\})}_{\mathbb{P}(X=x)}$$

Lemma 9.1.4 (Markov-Ungleichung)

Für jede nicht-negative Zufallsvariable X (d.h. $X\colon \Omega \to \mathbb{R}_{\geq 0}$) und jedes $a > 0$ gilt

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{a}\,.$$

Hohe Taillenweite und chromatische Zahl

Lemma 9.1.5

Sei X_k die Anzahl der Kreise der Länge k in $G(n,p)$. Dann gilt

$$\mathbb{E}[X_k] = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{2k}\,p^k = \frac{(n)_k}{2k}\,p^k .$$

Lemma 9.2.1

Sei $k \in \mathbb{N}$ und $p = p(n)\colon \mathbb{N} \to [0,1]$ mit $p \geq (6k \ln n)/n$ für alle hinreichend große n. Dann gilt für $G \in G(n,p)$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\alpha(G) \geq \tfrac{n}{2k}) = 0\,.$$

Satz 9.2.2 (Erdős 1959)

Zu jedem $k \in \mathbb{N}$ gibt es einen Graphen H mit Taillenweite $g(H) > k$ und $\chi(H) > k$.

Korollar 9.2.3

Es gibt Graphen mit beliebig hoher Taillenweite und gleichzeitig beliebig hohen Werten der Invarianten Minimalgrad δ, Kantendichte ε und Zusammenhang κ.

Eigenschaften fast aller Graphen

Grapheneigenschaft $\mathscr{P}$: unter Isomorphie abgeschlossene Menge von Graphen

$G(n,p)$ *hat fast sicher* $\mathscr{P}$ *für* $p = p(n)\colon \mathbb{N} \to [0,1]$:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(G(n,p(n)) \in \mathscr{P}) = 1$$

Proposition 9.3.1

Für jedes feste $p \in (0,1)$ und jeden Graphen F enthält $G(n,p)$ fast sicher eine induzierte Kopie von F.

Proposition 9.3.2

Für jedes feste $p \in (0,1)$ und jedes $k \in \mathbb{N}$ hat $G(n,p)$ fast sicher die Eigenschaft, dass für jedes $U \in \binom{[n]}{k}$ und jedes $W \subseteq U$ eine Ecke $v \in [n] \setminus U$ mit $N(v) \cap U = W$ existiert.

Kapitel 12

Minoren

- Wohlquasiordnung
- Minorensatz

Wohlquasiordnungen

Quasiordnung: reflexive, transitive Relation

Wohlquasiordnung: Quasiordnung $(X, \leq)$ mit der Eigenschaft

für alle Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ gibt es $i < j$ mit $x_i \leq x_j$

Proposition 10.1.1

Eine Quasiordnung $(X, \leq)$ ist genau dann eine Wohlquasiordnung, wenn es in X bezüglich $\leq$ weder eine unendliche Antikette noch eine unendliche absteigende Folge $x_0 > x_1 > \dots$ gibt.

Korollar 10.1.2

Ist $(X, \leq)$ wohlquasigeordnet, so enthält jede unendliche Folge in X eine unendliche aufsteigende Teilfolge.

$[X]^{<\omega}$: endliche Teilmengen von X

Quasiordnung auf $[X]^{<\omega}$: $A \leq B$ falls es injektives $f\colon A \to B$ mit $a \leq f(a)$ $\forall a \in A$ gibt

Lemma 10.1.3

Mit X ist auch $[X]^{<\omega}$ durch $\leq$ wohlquasigeordnet.

Minorensatz

Satz 10.2.1 (Kruskal 1960)

Die endlichen Bäume sind durch die topologische Minorenrelation wohlquasigeordnet.

SATZ 10.5.1 (Robertson & Seymour 1984-2004)

Die endlichen Graphen sind durch die Minorenrelation wohlquasigeordnet. □

. . . a single theorem, one which dwarfs any other result in graph theory and may doubtless be counted among the deepest theorems that mathematics has to offer . . .