Department Mathematik
Diskrete Mathematik
Dozent: Dr. Mathias Schacht

WS 2009/10
18. Dezember 2009

Extremale Graphentheorie

2. Serie

Besprechung am 5. Januar 2010

Aufgabe 1
Ein (ε, d)-reguläres Paar (X, Y) ist (ε, d)-*super-regulär*, falls $|N(x) \cap Y| \geq \varepsilon|Y|$ für alle $x \in X$ und $|N(y) \cap X| \geq \varepsilon|X|$ für alle $y \in Y$. Sei $1 \geq d > 0$ und $0 < \varepsilon \leq d/2$.

(*i*) Zeigen Sie, dass jedes (ε, d)-reguläre Paar (X, Y) ein $(2\varepsilon, d)$-super-reguläres Paar (X', Y') enthält.

(*ii*) Zeigen Sie, dass der Durchmesser jedes (ε, d)-super-regulären Paares beschränkt ist. Finden Sie die bestmögliche obere Schranke.

(*iii*) Zeigen Sie, dass jedes (ε, d)-super-reguläre Paar (X, Y) mit $|X| = |Y|$ ein perfektes Matching enthält.

Aufgabe 2
Beweisen Sie die Äquivalenz der Eigenschaften P_4 und P_5 aus dem Satz von Chung, Graham, und Wilson.

Aufgabe 3
Geben Sie eine Folge von Graphen $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an, die die folgenden Eigenschaften erfüllt:

(*i*) $e(G_n) = (1/2 + o(1))\binom{n}{2}$,

(*ii*) $N_{K_3}(G_n) = (1/8 + o(1))n^3$ und

(*iii*) $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nicht quasizufällig.

Gibt es eine solche Folge auch mit der folgenden leicht verschärften Variante von (*i*)

(*i'*) $\sum_{v\in V(G_n)} |\deg(v) - n/2| = o(n^2)$.

Aufgabe 4
Eine Folge von Graphen $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erfüllt die Eigenschaft $\textbf{BIP-DISC}_{d,\alpha}$ für $d > 0$ und $0 < \alpha \leq 1/2$, falls

$$\big|e(X, Y) - d|X||Y|\big| = o(n^2)$$

für alle disjunkten X, $Y \subseteq V(G_n)$ mit $|X| = |Y| = \lfloor \alpha n \rfloor$.

(*i*) Zeigen Sie, dass $\textbf{BIP-DISC}_{d,o(1)}$ eine quasizufällige Eigenschaft ist.

(*ii*) Zeigen Sie, dass $\textbf{BIP-DISC}_{d,\alpha}$ für $0 < \alpha < 1/2$ eine quasizufällige Eigenschaft ist.

(*iii*) Was können Sie über $\textbf{BIP-DISC}_{d,1/2}$ sagen?