Def: $G=(V,E)$, $X,Y \subseteq V$, $X \cap Y = \emptyset$, $\varepsilon > 0$, $d \geq 0$

- (X,Y) ist <u>(ε,d)-regulär</u>, falls
  $\forall X' \subseteq X$ und $Y' \subseteq Y$ mit $|X'| \geq \varepsilon |X|$, $|Y'| \geq \varepsilon |Y|$
  gilt
  $$|d(X',Y') - d| \leq \varepsilon,$$
  wobei: $d(X',Y') = \dfrac{e(X',Y')}{|X'|\,|Y'|}$.

- (X,Y) ist <u>ε-regulär</u>, falls es ein $d \geq 0$ gibt, so dass (X,Y) (ε,d)-regulär ist.

<u>Satz</u> (Regularitätslemma, Szemerédi '78)

$\forall\, \varepsilon > 0,\ t_0 \in \mathbb{N}\ \exists\, T_0, n_0: \forall\, G=(V,E)$ mit $|V| = n \geq n_0$ $\exists$ Partition $V_0 \dot\cup V_1 \dot\cup \dots \dot\cup V_t = V$ so, dass

i) $t_0 \leq t \leq T_0$

ii) $|V_0| \leq \varepsilon n$ und $|V_1| = \dots = |V_t|$

iii) alle bis auf höchstens $\varepsilon \binom{t}{2}$ Paare (V_i, V_j) sind ε-regulär.

Counting Lemma

Def.: · F, $V(F) = [\ell] = \{1, \dots, \ell\}$
· $G = (V_1, \dots, V_\ell, E)$ ℓ-partit

Eine Kopie F' von F in G ist <u>partit-isomorph</u>, falls $|V(F') \cap V_i| = 1$ $\forall i = 1, \dots, \ell$ und $\varphi: V(F) \to V(F')$ mit $\varphi(i) \in V_i$ ein Homomorphismus ist.

· $\#\{F \leq G\}$ sei dann die Anzahl der partit-isomorphen Kopien.

Satz (Counting Lemma)

$\forall$ F mit $V(F) = [\ell]$, $\gamma > 0$, $d_0 > 0$
$\exists$ $\varepsilon > 0$ und n_0:
$\forall$ $G = (V_1, \dots, V_\ell, E)$ mit

a) $|V_i| \geq n_0$ $\forall i = 1, \dots, \ell$

b) (V_i, V_j) ist (ε, d_{ij})-regulär mit $d_{ij} \geq d_0$ $\forall ij \in E(F)$

$\Longrightarrow$

$$\#\{F \leq G\} = (1 \pm \gamma) \prod_{ij \in E(F)} d_{ij} \prod_{i=1}^{\ell} |V_i|$$

<u>Def:</u>
- $F = (W_1, \dots, W_\ell, E_F)$
- $G = (V_1, \dots, V_\ell, E_G)$

$\Big\}$ ℓ-partit

Kopie F' von F in G ist <u>partit-isomorph</u>, falls es einen Homomorphismus $\varphi : F \to F'$ gibt, so dass

$$|\varphi(W_i) \cap V_i| = |W_i| \quad \forall i = 1, \dots, \ell$$

<u>Korollar</u> (Counting Lemma)

$\forall$ $F = (W_1, \dots, W_\ell, E_F)$, $\gamma > 0$, $d_0 > 0$

$\exists$ $\varepsilon > 0$ und n_0:

$\forall$ $G = (V_1, \dots, V_\ell, E_G)$ mit

a) $|V_i| \geq n_0$

b) (V_i, V_j) ist (ε, d_{ij})-regulär mit $d_{ij} \geq d_0$ $\forall$ $1 \leq i < j \leq \ell$ mit $e_F(W_i, W_j) \neq 0$

$$\Longrightarrow \quad \#\{F \subseteq G\} = (1 \pm \gamma) \prod_{1 \leq i < j \leq \ell} d_{ij}^{\,e_F(W_i, W_j)} \prod_{i=1}^{\ell} |V_i|^{|W_i|}$$

②

Reg. Lemma

Simple Beobachtung

$\longrightarrow$ daher der Name

Counting Lemma 1

—————— " —————— 2

<u>Beweis:</u>

zähle Homomorphismen Homomorphismus

induktion über Kanten

$\boxed{\text{Erdős - Stone}}$

Satz (Erdős - Stone '46)

$\forall F,\ \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0,\ n_0$:

- $\forall n \geq n_0: \quad ex(n, F) \leq \left(1 - \frac{1}{\chi(F)-1} + \varepsilon\right)\binom{n}{2}$

Darüber hinaus gilt:

$\forall G = (V, E)$ mit $|V| = n \geq n_0$ und $|E| \geq \left(1 - \frac{1}{\chi(F)-1} + \varepsilon\right)\binom{n}{2}$

gilt

$$\#\{F \subseteq G\} \geq \delta\, n^{|V(F)|} .$$

Bew: Seien F und $\varepsilon > 0$ geg.

~~Wähle~~

Konstanten

Setze: $\quad d_0 = \frac{\varepsilon}{6}, \quad \gamma = \frac{1}{2} \qquad$ (***)

$t_0 = \left\lceil \frac{6}{\varepsilon} \right\rceil$ und groß genug so dass $\qquad$ (**)

geg. durch Turáns Thm. $\longrightarrow \left(1 - \frac{1}{\chi(F)-1} + \frac{\varepsilon}{14}\right)\binom{t}{2} \geq e(T_{\chi(F)}(t))$

$$\varepsilon' = \min\Big\{\frac{\varepsilon}{6},\ \underbrace{\varepsilon(F, \gamma, d_0)}_{\text{vom generalisierten Counting Lemma}}\Big\} \qquad (*)$$

$$\varepsilon', t_0 \xrightarrow{\text{Reg. Lemma}} T_0$$

$$\delta = \frac{d_0^{e(F)}}{|V(F)|!\, T_0^{|V(F)|}} \cdot \frac{1}{2^{|V(F)|+1}} \Big/ 2$$

Sei: $n \geq n_0$ groß genug.

Sei: $G=(V,E)$ mit $|V|=n$ und $|E| \geq \left(1-\frac{1}{\chi(F)-1}+\varepsilon\right)\binom{n}{2}$.

Reg. Lemma $\longrightarrow$ $\exists\ V_0 \dot\cup \dots \dot\cup V_t$ mit den Eigenschaften i) – iii).

Wir entfernen folgende Kanten $e = xy$ von G:

1) $e \cap V_0 \neq \emptyset$

$\longrightarrow$ höchstens $|V_0|\cdot|V| \leq \varepsilon' n^2 \overset{(*)}{\leq} \frac{\varepsilon n^2}{6}$ gelöschte Kanten

2) $e \subseteq V_i$ für ein $i \in [t]$

$\longrightarrow$ höchstens $t\cdot\binom{n/t}{2} \leq \frac{n^2}{2t} \overset{i)}{\leq} \frac{n^2}{2t_0} \overset{(**)}{\leq} \frac{\varepsilon n^2}{12}$

3) $e \in E(V_i,V_j)$ und (V_i,V_j) ist nicht ε-regulär

$\longrightarrow$ höchstens $\varepsilon'\binom{t}{2}\cdot\left(\frac{n}{t}\right)^2 \leq \frac{\varepsilon' n^2}{2} \overset{(*)}{\leq} \frac{\varepsilon n^2}{12}$

4) $e \in E(V_i,V_j)$ und $d(V_i,V_j) < d_0$

$\longrightarrow$ höchstens $d_0\left(\frac{n}{t}\right)^2\cdot\binom{t}{2} \leq \frac{d_0 n^2}{2} \overset{(**)}{\leq} \varepsilon n^2$

$\boxed{\text{ES Bew II}}$

Sei G' der resultierende Graph.

$$\Longrightarrow \quad e(G') \geq e(G) - \left(\frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{12} + \frac{\varepsilon}{12} + \frac{\varepsilon}{12}\right) n^2$$

n groß

$$\geq \left(1 - \frac{1}{\chi(F)-1} + \frac{\varepsilon}{13}\right)\binom{n}{2}$$

Sei $R = ([t], E_R)$ definiert durch

$$ij \in E_R \iff e_{G'}(V_i, V_j) \neq 0$$

∗∗

d.h. $ij \in E_R$, falls (V_i, V_j) (ε, d_{ij})-regulär mit $d_{ij} \geq 0$.

$$\Longrightarrow \quad e(R) \geq \frac{e(G')}{(n/t)^2}$$

$$\geq \frac{\left(1 - \frac{1}{\chi(F)-1} + \frac{\varepsilon}{13}\right)\binom{n}{2}}{(n/t)^2}$$

n groß

$$\geq \frac{\left(1 - \frac{1}{\chi(F)-1} + \frac{\varepsilon}{14}\right)\frac{n^2}{2}}{(n/t)^2}$$

$$\geq \left(1 - \frac{1}{\chi(F)-1} + \frac{\varepsilon}{14}\right)\binom{t}{2}$$

$$\overset{(**)}{\geq} e(T_{\chi(F)}(t)) = ex(t, K_{\chi(F)})$$

$\Longrightarrow \quad K_{\chi(F)} \subseteq R$

(**) $\Longrightarrow$ Voraussetzungen des general. Counting Lemma sind erfüllt.

$$\Longrightarrow \quad \#\{F \subseteq G\} \geq \#\{F \subseteq G'\}$$

$$\overset{C.L.}{\geq} \frac{1}{2}\, d_0^{\,e(F)} \cdot \left(\min_{i=1,\dots,t} |V_i|\right)^{|V(F)|} \cdot \frac{1}{|V(F)|!}$$

γ

in C.L. zählen wir jede Kopie $|W_1|! \cdots |W_\ell|!$ mal

Da $|V_i| \geq \frac{(1-\varepsilon)n}{t} \geq \frac{\frac{1}{2}n}{T_0}$

$$\#\{F \subseteq G\} \geq \delta\, n^{|V(F)|}$$

$\blacksquare$

Satz (Removal lemma, Ruzsa-Szemerédi '78 $F = K_3$
Erdős-Frankl-Rödl '86 allgemein)

$\forall F, \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0, n_0$:
$\forall G = (V, E)$ mit $|V| = n \geq n_0$ gilt.

Falls $\#\{F \subseteq G\} \leq \delta n^{|V(F)|}$,
dann $\exists E' \subseteq E$: $|E \setminus E'| \leq \varepsilon n^2$ und
$G' = (V, E')$ ist F-frei.

Bew: (ähnlich wie Erdős-Stone)

Konstanten: Seien F und $\varepsilon > 0$ geg.

Setze: $d_0 = \frac{\varepsilon}{3}$, $\gamma = \frac{1}{2}$

$t_0 = \lceil \frac{3}{\varepsilon} \rceil$

$$\varepsilon' = \min \left\{ \frac{\varepsilon}{3}, \underbrace{\varepsilon(F, \gamma, d_0)}_{\text{gen. C.L.}} \right\}$$

$\varepsilon', t_0 \xrightarrow{\text{Reg. Lemma}} T_0$

setze

$$\delta = \frac{d_0^{e(F)}}{|V(F)|! \ T_0^{|V(F)|}} \cdot \frac{1}{2^{|V(F)|+1}}$$

Sei $n \geq n_0$ groß genug und $G = (V, E)$ mit $|V| = n$ und $\# \{ F \subseteq G \} \leq \delta n^{|V(F)|}$.

Reg. Lemma $\longrightarrow$ $\exists \; V_0 \,\dot{\cup} \ldots \dot{\cup}\, V_t \; \ldots$

Lösche wie in ES $\longrightarrow G'$

Diesmal gilt

$$e(G') \geq e(G) - \varepsilon n^2$$

Beh: G' ist F-frei

Bew: Angenommen F' ist eine Kopie von F in G'.

Aus der Wahl der gelöschten Kanten folgt:

$$\exists \; W_1 \,\dot{\cup} \ldots \dot{\cup}\, W_\ell = V(F) :$$

$e_F(W_{i_j}, W_{i_k}) \neq 0 \Rightarrow (V_{i_j}, V_{i_k})$ ist ε-regulär mit Dichte $\geq d_0$

Bem: $V_{i_1}, \ldots, V_{i_\ell}$ entsprechen den Knotenklassen, welche Knoten von F' enthalten.

$\xRightarrow{\text{gen. C.L.}}$ $\# \{ F \subseteq G \} \geq \# \{ F \subseteq G' \} \geq \frac{1}{2} d_0^{e(F)} \prod_{j=1}^{\ell} |V_{i_j}|^{|W_{i_j}|} \cdot \frac{1}{|V(F)|!}$

$> 2\delta n^{|V(F)|}$

↑ $\boxed{\text{Anwendungen des Rem. L.}}$

Satz (Szemerédi '75, Roth '52 $k=3$)

Sei $\quad r_k(n) = \max\{|A| : A \subseteq [n],\ A$ enthält keine arithmetische Progression der Länge $k\}$

$\forall k \in \mathbb{N},\ \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 : \quad \forall n \geq n_0$

$$r_k(n) \leq \varepsilon n.$$

Bem: berühmter Satz in der kombinatorischen Zahlentheorie mit verschiedenen Beweisen von teilweise sehr bekannten Mathematikern

z.B.
- Roth — Fields-Medaille 1958, $r_3(n) = o(n)$ wird in Laudatio erwähnt
- Furstenberg — neuer Beweis für alle k 1978
- Gowers — Fields-Medaille 1998 für neuen Beweis
- Tao — Fields-Medaille 2006

Bew: $k=3$

Wir leiten den Satz von Roth aus dem Removal Lemma für $k=3$ ab.

$\boxed{\text{Rem.L.} \Rightarrow r_3(n) = o(n).}$

Satz (Roth '53)

$$r_3(n) = o(n)$$

Bew: Wir zeigen: $\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists n_0: \ r_3(n) \le \varepsilon n \ \forall n \ge n_0.$

~~Sei $\zeta > 0$ gegeben.~~

~~Wir setzen~~

~~$\varepsilon = \frac{\zeta}{3}$~~

Sei $\delta = \delta(K_3, \varepsilon)$ die Konstante, welche das Removal Lemma für $F = K_3$ garantiert.

Sei $n \ge n_0$ groß genug, so dass wir das Removal Lemma anwenden können und so dass $\frac{1}{3}\binom{6n}{2} \le \delta (6n)^3 \ \forall n \ge n_0.$

Sei $A \subseteq [n]$ und A ist AP-3-frei.

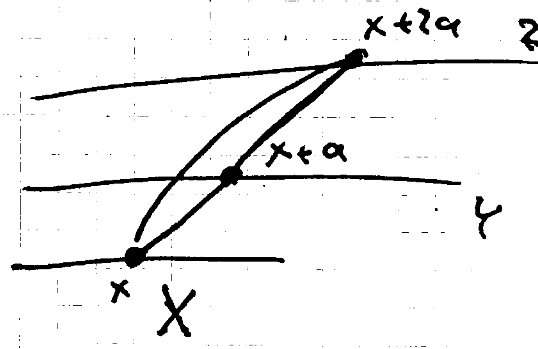
Wir konstruieren den folgenden Graphen

$$G_A = (X, Y, Z, E)$$

$X = [n]$

$Y = [2n]$

$Z = [3n]$



$$E = \bigcup_{x \in X} \bigcup_{a \in A} \Big\{ \{\underset{X}{x}, \underset{Y}{x+a}\}, \{\underset{X}{x}, \underset{Z}{x+2a}\}, \{\underset{Y}{x+a}, \underset{Z}{x+2a}\} \Big\}$$

$\Rightarrow E$ ist die Vereinigung von Dreiecken.

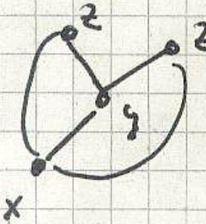
Rem. 1 $\Rightarrow r_3(n) = o(n)$

<u>Beh.:</u> Jede Kante von G ist in genau einem K_3 enthalten.

<u>Bew.:</u> Offensichtlich ist jede Kante in mindestens einem K_3.

Sei $\{x,y\}$ in zwei K_3 enthalten:

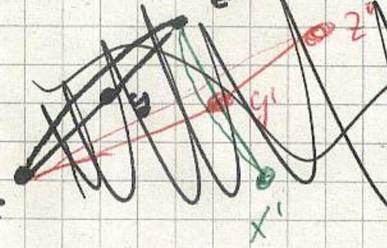
<u>1. Fall:</u>



wobei $y = x + a$, $z = x + 2a$ für ein $a \in A$

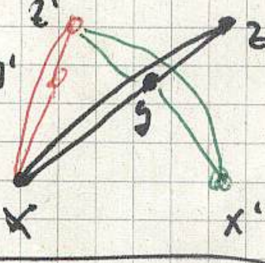
↯ zwei Knoten eines „Originaldreiecks" definieren eindeutig den dritten Knoten

<u>2. Fall</u>



~~$y = x + a$, $z = x + 2a$, $a \in A$~~

~~$y' = x + b$, $z' = x + 2b$, $b \in A$~~



x, y, z Original-K_3

$\Rightarrow \exists a: y = x + a$, $z = x + 2a$ (1)

x, y, z' zweites Dreieck mit xy

$x\, y'\, z'$ Original-K_3

$\Rightarrow \exists b: y' = x + b$, $z' = x + 2b$ (2)

$x'\, y\, z'$ O.-K_3

$\Rightarrow \exists c: y = x' + c$ (1), $z' = x' + 2c$ (2)

Beachte: $a, b, c \in A$

und $a \neq b \neq c$ sonst $y = y'$, $z = z'$ ↯

Also

$$y \overset{1)}{=} x + a = x' + c$$

und $$z' = x + 2b = x' + 2c$$

$\Rightarrow a = c + x' - x$ und $b = c + \frac{x' - x}{2}$ $\Rightarrow a, b, c$ ist AP-3

$$\boxed{\text{Rem. L} \Rightarrow r_3(n) = o(n)}$$

Beh: $\Rightarrow$ $\#\{K_3 \subseteq G\} = \dfrac{|E|}{3}$

$|V| = 6n$ $\Rightarrow$ $\#\{K_3 \subseteq G\} \leq \frac{1}{3}\binom{6n}{2} = \mathcal{O}(n^2) = o(n^3)$

$\leq \delta n^3$ für jedes $\delta > 0$ und n groß.

Rem. L. $\Rightarrow$ $\exists\, E' \subseteq E$: $G' = (V, E')$ ist K_3-frei und $|E \setminus E'| \leq \varepsilon n^2$.

Wegen Beh. zerstört jede gelöschte Kante e in $E \setminus E'$ nur einen K_3 in G.

$$\Rightarrow |E \setminus E'| \geq \#\{K_3 \subseteq G\} = \frac{|E|}{3}$$

$$\Rightarrow |E| \leq 3\varepsilon n^2$$

Aus der Definition von G folgt:

$$|E| = n \cdot |A| \cdot 3$$

$$\Rightarrow |A| \leq \varepsilon n$$

$\boxed{\text{Embedding Lemma}}$

<u>Satz</u> (Chvátal, Szemerédi, Trotter, Rödl '83)

$\forall F, \overbrace{\Delta \in \mathbb{N}}^{V(F)=[\ell]}, d_0 > 0 \quad \exists \varepsilon, c > 0$:

$\forall\ G = (V_1, \dots, V_\ell, E_G)$ und $H = (W_1, \dots, W_\ell, E_H)$

mit

a) $|W_i| \le c \cdot |V_i|$

b) (V_i, V_j) ist (ε, d_{ij})-regulär mit $d_{ij} \ge d_0$ $\forall\ ij \in E(F)$

c) $\exists$ Homomorphismus $\varphi : H \to F$ mit $\varphi(W_i) = \{i\} \quad \forall i = 1, \dots, \ell$

d) $\Delta(H) \le \Delta$

$\Longrightarrow \quad H \subseteq G.$

<u>Bew:</u> Diestel (3ed, Eng.) Lemma 7.5.2

Diestel		hier
$\cancel{d}$	$\approx$	d_0
ℓ	$\approx$	$\min \lvert V_i\rvert$
s	$\approx$	$c \min \lvert V_i\rvert$

$$c = \frac{d_0^\Delta}{2}$$

<u>Anwendung:</u> Theorem 9.7.2. (Diestel)