Extremale Graphentheorie

4. Serie

Besprechung am 30. Juni 2016

Aufgabe 1
Zeige, für jedes $\varepsilon > 0$ und $p \gg n^{-1/2}$ erfüllt $G(n,p)$ die folgenden drei Eigenschaften mit einer Wahrscheinlichkeit die gegen 1 tendiert:

(*i*) $G(n,p)$ enthält mindestens $(1-\varepsilon)p^3\binom{n}{3}$ Dreiecke,
(*ii*) der Grad jeder Ecke liegt im Intervall $(1+\pm\varepsilon)pn$ und
(*iii*) für jede Ecke $v \in V$ und je zwei disjunkte Mengen U, $W \subseteq N(v)$ gilt $e(U,W) = p|U||W| \pm \varepsilon p^3 n^2$.

Übertrage den Beweis von Goodman unter Verwendung dieser Eigenschaften auf $G(n,p)$ und zeige somit direkt die Ramsey-Eigenschaft für Dreiecke und zwei Farben für $G(n,p)$.

Aufgabe 2
Zeige, für jedes $k \geqslant 3$ dass $\mathrm{ex}(G, K_k) \geqslant \frac{k-2}{k-1}e(G)$ gilt für jeden Graphen G.

Aufgabe 3
Zeige, dass für jedes $\varepsilon > 0$ und $k \geqslant 3$ die Funktion $n^{-\frac{2}{k+1}}$ ein Schwellenwert für die Turán-Eigenschaft

$$\mathrm{ex}(G, K_k) \leqslant \left(\frac{k-2}{k-1} + \varepsilon\right) e(G)$$

ist.

Aufgabe 4
Eine Menge $A \subseteq [n]$ hat die Szemerédi-Eigenschaft für $\delta > 0$ und $k \geqslant 3$, falls jede Teilmenge $B \subseteq A$ mit $|B| \geqslant \delta|A|$ eine arithmetische Folge der Länge k enthält. Stelle eine begründete Vermutung für den Schwellenwert der Szemerédi-Eigenschaft für fixiertes $\delta > 0$ und $k \geqslant 3$ auf und beweise die entsprechende 0- und 1-Aussage.