Extremale Graphentheorie

3. Serie

Besprechung am 9. Juni 2016

Aufgabe 1
Zeige für jedes $\ell \geqslant 2$, dass jeder Graph $G = (V, E)$ mit Minimalgrad $\delta(G) > \frac{2}{2\ell+1}$, der keine ungeraden Kreise der Länge höchstens $2\ell - 1$ enthält, bipartit ist. Ist die Schranke an den Minimalgrad bestmöglich? Was kann man im Gleichheitsfall sagen?

Aufgabe 2
Für n, $k \geqslant 2$ und $\alpha > 0$ sei $\mathcal{F}'_{n,k}(\alpha)$ die Menge aller K_{k+1}-freien Graphen $G = ([n], E)$ mit einer Eckenpartition $V_1 \cup \ldots \cup V_k = [n]$ so dass

(*i*) $\sum_{i=1}^{k} e_G(V_i) \leqslant \alpha n^2$ und
(*ii*) $\big||V_i| - n/k\big| \leqslant \alpha n$.

Zeige, dass für jedes $k \geqslant 2$ und $\alpha > 0$ ein $c > 0$ existiert, so dass für hinreichend große n gilt

$$|\mathcal{F}'_{n,k}(\alpha)| \geqslant (1 - 2^{-cn^2})|\operatorname{Forb}_n(K_{k+1})|.$$

Aufgabe 3
Für n, $k \geqslant 2$, α, $\beta > 0$ sei $\mathcal{F}''_{n,k}(\alpha, \beta)$ die Menge aller Graphen $G = ([n], E) \in \mathcal{F}'_{n,k}(\alpha)$ so dass für alle $1 \leqslant i < j \leqslant k$ das Paar (V_i, V_j) ist *bipartit* $(\beta, 1/4)$*-dicht*, d. h. für alle $X \subseteq V_i$ und $Y \subseteq V_j$ gilt

$$e_G(X, Y) \geqslant \tfrac{1}{4}|X||Y| - \beta|V_i||V_j|^2 .$$

Zeige, dass für jedes $k \geqslant 2$ und $\beta > 0$ ein $\alpha > 0$ und $c' > 0$ existieren, so dass für hinreichend große n gilt

$$|\mathcal{F}''_{n,k}(\alpha, \beta)| \geqslant (1 - 2^{-c'n^2})|\operatorname{Forb}_n(K_{k+1})|.$$

Aufgabe 4
Formuliere (und skizziere den Beweis)

(*a*) eines *counting lemmas* für k-partite Graphen, deren bipartite Paare bipartit (β, d)-dicht sind (für $1/k$, $d \gg \beta$);
(*b*) falls (U, V) bipartit (β, d)-dicht in G ist, dann ist für alle $X \subseteq U$ und $Y \subseteq V$ mit $|X| \geqslant \beta'|U|$ und $|Y| \geqslant \beta'|V|$ auch das Paar (X, Y) bipartit (β'', d)-dicht für geeignetes $\beta'' = \beta''(\beta, \beta')$ unabhängig von X und Y.

Zeige, dass für jedes $k \geqslant 2$ und $\hat{\beta} > 0$ ein $\beta > 0$ existiert, so dass für jedes $\alpha > 0$ und hinreichend große n für alle $G \in \mathcal{F}''_{n,k}(\alpha, \beta)$, $i \in [k]$ und $v \in V_i$ gilt $|N(v) \cap V_i| \leqslant \hat{\beta}|V_i|$.

Aufgabe 5
Für n, $k \geqslant 2$, α, $\beta > 0$, $\gamma > 0$ sei $\mathcal{F}'''_{n,k}(\alpha, \beta, \gamma)$ die Menge aller Graphen $G = ([n], E) \in \mathcal{F}''_{n,k}(\alpha, \beta)$ so dass für alle $i \neq j \in [k]$ und alle Ecken x, $y \in V_i$ gilt

$$\big|N(x) \cap N(y) \cap V_j\big| \geqslant \tfrac{1}{8}|V_j|.$$

Finde eine geeignete Abschätzung für die Größe der Menge $\mathcal{F}'''_{n,k}(\alpha, \beta, \gamma)$, um den Beweis des Satzes von Kolaitis, Prömel und Rothschild abzuschließen. Die folgenden Abschätzungen für die Menge der k-färbbaren Graphen mit Eckenmenge $[n]$ dürfen vorausgesetzt werden

$$\frac{1}{n^k} k^n 2^{\binom{k}{2}(n/k)^2} \leqslant |\operatorname{Col}_n(k)| \leqslant k^n 2^{\binom{k}{2}(n/k)^2} .$$