Extremale Graphentheorie

2. Serie

Besprechung am 24. Mai 2016

Aufgabe 1
In der Literatur wird ein ε-reguläres Paar (X, Y) oft wie folgt definiert: *Für alle* $X' \subseteq X$ *und* $Y' \subseteq Y$ *mit* $|X'| \geqslant \varepsilon|X|$ *und* $|Y'| \geqslant \varepsilon|Y|$ *gilt* $\big|d(X', Y') - d(X, Y)\big| \leqslant \varepsilon$. Zeige, dass diese Definition äquivalent zu der Definition aus der Vorlesung ist, d. h. für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\varepsilon' > 0$, so dass jedes Paar (X, Y) welches die Definition mit ε' erfüllt, auch die andere Definition mit ε erfüllt.

Aufgabe 2
Zeige, dass mit $d \gg \varepsilon$ jedes ε-reguläre Paar (X, Y) mit $|d(x) \cap Y| \geqslant d|Y|$ für alle $x \in X$, $|d(y) \cap X| \geqslant d|X|$ für alle $y \in Y$ und $|X| = |Y|$ ein perfektes Matching enthält.

Aufgabe 3
Zeige, dass das *counting lemma* für Dreiecke auch dann noch gilt, wenn nur zwei der drei Paare ε-regulär sind, während es im Allgemeinen nicht gilt, wenn nur ein Paar ε-regulär ist. Wie lässt sich diese Beobachtung verallgemeinern für das counting lemma für allgemeine Graphen F an Stelle des Dreiecks?

Aufgabe 4
Leite die folgenden Konsequenzen des *removal lemmas* her:

(i) Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit der Eigenschaft, dass jede Kante in genau einem Dreieck enthalten ist, dann gilt $|E| = o(|V|^2)$.

(ii) Die Kanten eines bipartiten Graphen $G = (X \cup Y, E)$ sei die Vereinigung von $|V|$ *induzierten* Matchings $M_1, \ldots, M_|V|$, d. h. die vier Ecken von zwei Kanten eines Matchings spannen keine weitere Kante auf. Zeige, $|E| = o(|V|^2)$.

(iii) Sei $H = (V, E)$ ein 3-uniformer Hypergraph der auf sechs Ecken höchstens zwei Kanten aufspannt. Dann gilt $|E| = o(|V|^2)$.

Aufgabe 5
Geben Sie die Details des Beweises des Simonovits'schen Satbilitätssatzes für allgemeine Graphen basierend auf Stabilitätssatzes für Cliquen und der Regularitätsmethode.

Aufgabe 6
Zeige, dass für jeden Graph F mit ℓ Ecken und jedes $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ und n_0 existieren, so dass jeder Graph $G = (V, E)$ mit $|V| = n \geqslant n_0$ und $|E| \geqslant (\pi(F) + \varepsilon)\binom{n}{2}$ mindestens δn^ℓ Kopien von F enthält.