Übungen Modul Grundlagen der Mathematik

WS 09/10 H. König und H.-J. Samaga **Blatt 9**

A: Präsenzaufgaben und Verständnisfragen

32. Für die folgenden Mengen sind gesucht (falls vorhanden) Infimum, Minimum, Maximum, Supremum:
$\{-2, 1, 4\}$, $\{-2n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $[-3, 1[$, $\{r \in \mathbb{R} \mid r^2 < 9\}$, $\{\frac{2}{n} - 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$

33. Ein Hotel für Mathematiker hat genau $\mathbb{N}$ Zimmer (d.h., abzählbar unendlich viele). Das Hotel ist bereits voll belegt, als ein weiterer Mathematiker eintrifft. Da alle Gäste sich nach Belieben innerhalb des Hotels umquartieren lassen, kann der neue Gast ebenfalls untergebracht werden. Wie ist dies möglich?

34. Wahr oder falsch ?

a) Wenn a eine obere Schranke von $A \subset \mathbb{R}$ ist, ist $-a$ eine untere Schranke von A.

b) Für jede untere Schranke t von M gilt: $t = \inf M \iff \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, m \in M :\ t + \varepsilon > m$

c) In jeder noch so kleinen Umgebung jeder der überabzählbar vielen reellen Zahlen liegen unendlich viele rationale Zahlen.

d) In jeder noch so kleinen Umgebung jeder der abzählbar vielen rationalen Zahlen liegen überabzählbar viele reelle Zahlen.

B: Übungsaufgaben

25. a) Gesucht ist eine abzählbare Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ mit $\inf M = 2$ und $\sup M = \max M = 5$, $\min M$ soll nicht existieren (ohne Begründung).

b) Gesucht sind $\inf M$, $\min M$, $\sup M$, $\max M$ von

(1) der Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ der Glieder der Folge (a_n) mit $a_n := \frac{3}{n^2+1}$ (mit Begründung).

(2) $M := \left\{ \frac{x^2}{x^2-1} \mid x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x| \geq 3 \text{ oder } |x| < \frac{1}{3} \right\}$ (ohne Begründung).

26. $(*)$ Ein Satz der Vorlesung besagt: Sei s eine obere Schranke von $M \neq \emptyset$, $M \subseteq \mathbb{R}$. Dann gilt

$$s = \sup M \iff \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, m \in M\ : s - \varepsilon < m$$

Formulieren und beweisen Sie einen analogen Satz für untere Schranken.

27. In das Hotel aus Aufgabe **A 33** kommen weitere Gäste. Ist eine Unterbringung möglich (mit Beweis), falls

a) die Insassen eines Kleinbusses mit n Plätzen Unterkunft suchen?

b) ein Großraumbus mit $\mathbb{N}$ Personen ankommt?

Abgabe der **B** – Aufgaben : Montag, 4. Januar 10

Bitte zweite Seite beachten!

C: Einige Aufgaben, wie sie in der Klausur vorkommen könnten:

1. Bitte nur die gesuchte Menge bzw. Zahl eintragen:

a) $\{z \in \mathbb{Z} \mid z^2 > 5\} \cap \{z \in \mathbb{Z} \mid z^2 \leq z + 20\} =$ ________________ b) $\sum_{k=1}^{90} k =$ ________

2. Untersuchen Sie die Relation $R := \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x + y \text{ ist ein Vielfaches von } 3\}$ auf Reflexivität, Symmetrie und Transitivität.

3. Die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x) := \begin{cases} x+1 & \text{für} \quad x \leq 0 \\ 2x-1 & \text{für} \quad x > 0 \end{cases}$

a) Skizzieren Sie den Graphen dieser Funktion für $-3 \leq x \leq 2$.

b) Beweisen oder widerlegen Sie: f ist injektiv.

4. Beweisen Sie durch vollständige Induktion $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$.

5. Wahr oder falsch? Es genügen Kreuze an richtiger Stelle, aber aufgepasst: Jedes falsche Kreuz bringt einen Minuspunkt!

		Wahr	Falsch
a)	Die Aussage $A \Rightarrow (A \vee B)$ ist stets wahr	☐	☐
b)	$(2, \{2\}) \in \{2\} \times \mathbb{N}$	☐	☐
c)	Es gibt genau 3 nichtinjektive Abbildungen von $\{y, z\}$ auf $\{1, 2, 3\}$	☐	☐
d)	Für die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^3 - x$, gilt $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$	☐	☐
e)	$2 \cdot n! = (2 \cdot n)! \quad \Rightarrow \quad n = 1$	☐	☐

D: Ein Weihnachtspreisausschreiben: Jede(r) Mitspieler(in) wählt eine rationale Zahl $q \in [0, 100]$ und schickt sie per E-Mail mit dem Betreff *Zahlenrätsel* an mich (samaga@math.uni-hamburg.de). Jede(r) Teilnehmer(in) dieser Vorlesung darf sich maximal zweimal beteiligen, kann aber höchstens einmal gewinnen. Berücksichtigt werden alle E-Mails, die bis zum 22.12.09 um 14 Uhr bei mir angekommen sind.

Ich werde den Durchschnitt aller eingesandten Zahlen ermitteln. Wer mit einer seiner bzw. ihrer Zahlen am nächsten bei *zwei Drittel des Durchschnitts aller eingesandten Zahlen* liegt, hat gewonnen!

Bei mindestens 25 Teilnehmer(innen) besteht der i–te Preis für $i = 1, 2, 3$ aus $4 - i$ Extrapunkten.

Wir wünschen allen Teilnehmerinnen und Teilnehmern der Übungen ein frohes Weihnachtsfest und ein erfolgreiches Jahr 2010!