

Übungen Modul Grundlagen der Mathematik

WS 09/10

H. König und H.-J. Samaga

Blatt 8

A: Präsenzaufgaben und Verständnisfragen

29. Für welche $a, b \in \mathbb{R}^*$ gilt $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 2$ bzw. $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 0$ bzw. $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = -2$? (Beweis?)
30. In jedem Körper $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ gilt das Distributivgesetz $a(b + c) = ab + ac$.
- a) Zeige durch jeweils ein Gegenbeispiel, dass das andere Distributivgesetz $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$ weder im Körper \mathbb{R} , noch im Körper \mathbb{Z}_2 gilt.
- b) Wir untersuchen $(\mathbb{N}, \circ, *)$, wobei \circ und $*$ folgendermaßen definiert sind: $k \circ l := \max\{k, l\}$ und $k * l := \min\{k, l\}$. Wie lauten die Distributivgesetze? Gibt es ein neutrales Element bzgl. der Verknüpfung \circ ?
31. Wahr oder falsch?
- a) Es gibt keine kleinste positive rationale Zahl.
- b) Es gibt keine kleinste positive reelle Zahl.
- c) Es gibt keine kleinste positive ganze Zahl.
- d) Für jede reelle Zahl $x \neq 0$ gilt $-x < x$.
- e) Für jede reelle Zahl $x \neq 0$ gilt $-|x| < |x|$.

B: Übungsaufgaben

22. Für welche $a, b \in \mathbb{R}^*$ gilt $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} < 2$? Im Beweis dürfen Sie alle üblichen Rechenregeln für das Rechnen mit reellen Zahlen ohne Beweis benutzen.
23. Es geht um $(\mathbb{N}, \circ, *)$ von **A 30 b**.
- a) Beweisen oder widerlegen Sie die Gültigkeit der Distributivgesetze, indem Sie jeweils die verschiedenen Fälle untersuchen, wie die beteiligten Elemente angeordnet sein können.
- b) $(\mathbb{N}, \circ, *)$ ist kein Körper. Geben Sie mit Begründung ein Körperaxiom an, das in $(\mathbb{N}, \circ, *)$ nicht erfüllt ist.
24. Beweisen Sie: In angeordneten Körpern \mathbb{K} gilt für alle $a, b \in \mathbb{K}$: $0 < a < b \Rightarrow 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.
Hinweis: Zeigen Sie zuerst durch Widerspruch, dass für $a > 0$ auch $\frac{1}{a} > 0$ gelten muss; dann ebenfalls durch Widerspruch die eigentliche Behauptung. Als Hilfsmittel stehen Ihnen alle anderen Teile des Satzes 1.3 zur Verfügung.

Abgabe der **B** – Aufgaben : Montag, 14. Dezember 09