

# Übungen Modul Grundlagen der Mathematik

WS 09/10

H. König und H.-J. Samaga

Blatt 7

## A: Präsenzaufgaben und Verständnisfragen

26. Sei  $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$  definiert durch  $x \oplus y := x + y - 1$ ,  $x \odot y := xy - x - y + 2$ . Überprüfe die Gültigkeit einiger Körperaxiome (Einzelheiten in den Übungen).
27. Im Skript wird in Satz 1.2  $a \cdot (-b) = -ab$  folgendermaßen bewiesen:

$$a(-b) + ab = a((-b) + b) = a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0 \Rightarrow a(-b) = -ab$$

Begründe jeden einzelnen Beweisschritt!

28. Wahr oder falsch?
- a) In  $(\mathbb{Z}_7, +_7, \cdot_7)$  ist das Element 6 bezüglich  $\cdot_7$  selbstinvers.
- b)  $(\mathbb{Z}_6, +_6, \cdot_6)$  ist kein Körper, da das Element 2 bzgl.  $\cdot_6$  kein Inverses besitzt.

## B: Übungsaufgaben

19. Für welche natürlichen Zahlen  $n$  gilt  $\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$  (mit Beweis)?
20. Beweisen Sie:  $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$  aus Aufgabe **A 26** ist ein Körper. (Einzelheiten in den Übungen).
21. Beweisen Sie für  $a, b \in \mathbb{K}$ ,  $c, d, y \in \mathbb{K}^*$  (siehe Satz 1.1 und Satz 1.2), indem Sie jeden Rechenschritt durch Axiome oder bereits bewiesene Aussagen belegen:
- a)  $cy = dy \Rightarrow c = d$
- b)  $(c^{-1})^{-1} = c$
- c)  $(-a)(-b) = ab$

Hinweise: Sie können in a) und b) wie in der Vorlesung bei den entsprechenden Beweisen zur Verknüpfung  $+$  vorgehen. Wenn Sie bei b) und c) die bereits bewiesenen Aussagen von Satz 1.1 und Satz 1.2 geschickt anwenden, werden Ihre Beweise extrem kurz!

Abgabe der **B** – Aufgaben : Montag, 7. Dezember 09