

Übungen Modul Grundlagen der Mathematik

WS 09/10

H. König und H.-J. Samaga

Blatt 7

A: Präsenzaufgaben und Verständnisfragen

26. Sei $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ definiert durch $x \oplus y := x + y - 1$, $x \odot y := xy - x - y + 2$. Überprüfe die Gültigkeit einiger Körperaxiome (Einzelheiten in den Übungen).

27. Im Skript wird in Satz 1.2 $a \cdot (-b) = -ab$ folgendermaßen bewiesen:

$$a(-b) + ab = a((-b) + b) = a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0 \Rightarrow a(-b) = -ab$$

Begründe jeden einzelnen Beweisschritt!

28. Wahr oder falsch?

a) In $(\mathbb{Z}_7, +_7, \cdot_7)$ ist das Element 6 bezüglich \cdot_7 selbstinvers.

b) $(\mathbb{Z}_6, +_6, \cdot_6)$ ist kein Körper, da das Element 2 bzgl. \cdot_6 kein Inverses besitzt.

B: Übungsaufgaben

19. Für welche natürlichen Zahlen n gilt $\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$ (mit Beweis)?

20. Beweisen Sie: $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ aus Aufgabe **A 26** ist ein Körper. (Einzelheiten in den Übungen).

21. Beweisen Sie für $a, b \in \mathbb{K}$, $c, d, y \in \mathbb{K}^*$ (siehe Satz 1.1 und Satz 1.2), indem Sie jeden Rechenschritt durch Axiome oder bereits bewiesene Aussagen belegen:

a) $cy = dy \Rightarrow c = d$

b) $(c^{-1})^{-1} = c$

c) $(-a)(-b) = ab$

Hinweise: Sie können in a) und b) wie in der Vorlesung bei den entsprechenden Beweisen zur Verknüpfung $+$ vorgehen. Wenn Sie bei b) und c) die bereits bewiesenen Aussagen von Satz 1.1 und Satz 1.2 geschickt anwenden, werden Ihre Beweise extrem kurz!

Abgabe der **B** – Aufgaben : Montag, 7. Dezember 09