Übungen Modul Grundlagen der Mathematik

WS 09/10 H. König und H.-J. Samaga **Blatt 6**

A: Präsenzaufgaben und Verständnisfragen

22. Ergänze folgenden Lückentext zur vollständigen Induktion:

Behauptung : $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) \;=\; n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Beweis : I. ____________: Die Behauptung ist richtig für $n =$___ , da ______ gilt.

II.________________: Wir setzen voraus ______________________

III. Induktionsschluss: Wir zeigen $1 + 3 + \cdots + (2(n + 1) - 1) =$________.

Es ist $1 + 3 + \cdots + (2(n + 1) - 1) = 1 + 3 + \cdots + (2n - 1) + (2n + 1) =$ ____$+2n + 1 =$

$= ($______$)^2$, was zu zeigen war.

23. Berechne $\sum\limits_{l=0}^{2} 3$ und $\sum\limits_{k=2}^{4} \sum\limits_{i=1}^{k} i$.

24. Wahr oder falsch? a) Für $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2$, ist $h^{-1}(\{2\}) = \mathbb{R}$ und $h \circ h = h$.

b) Die Abbildung $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ (n, m) \mapsto n \cdot m$, ist surjektiv, aber nicht injektiv.

c) Weil die Abbildung in b) nicht bijektiv ist, sind $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und $\mathbb{N}$ nicht gleichmächtig.

d) Für alle $k, l \in \mathbb{N}$ gilt $\sum\limits_{k=1}^{l} k = \sum\limits_{l=1}^{k} l$

25. Wo steckt der Fehler? *Beh.*: Alle natürlichen Zahlen sind gleich.

Bew.: $n = 1$: Jede Zahl ist – verglichen mit sich selbst – gleich.

$n \to n + 1$: Wenn von $n + 1$ Zahlen je n gleich sind (Induktionsannahme), dann sind auch alle $n + 1$ Zahlen gleich, fertig.

B: Übungsaufgaben

16. Beweisen Sie: $f : A \to B$ und $g : B \to C$ bijektiv $\Rightarrow$ $g \circ f$ bijektiv.

Hinweis: Sie müssen die Injektivität und die Surjektivität der verketteten Abbildung nachweisen.

17. Die Abbildungen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien definiert durch $f(x) := 3x - 5$ und

$g(x) := \begin{cases} x - 1 & \text{falls } x < 2 \\ 3x - 5 & \text{falls } x \geq 2 \end{cases}$. Gesucht sind die zugehörigen Umkehrfunktionen sowie $f \circ f$

und $g \circ g$. Für eine Zeichnung des Graphen von $g \circ g$ gibt es einen Extrapunkt!

18. $(*)$ Beweisen Sie für alle natürlichen Zahlen $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Abgabe der **B** – Aufgaben : Montag, 30. November 09