

Übungen Modul Grundlagen der Mathematik

WS 09/10

H. König und H.-J. Samaga

Blatt 5

A: Präsenzaufgaben und Verständnisfragen

18. Sei $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ definiert durch $f(z) := \begin{cases} 2z - 1 & \text{falls } z \geq 0 \\ -2z & \text{falls } z < 0 \end{cases}$.

(Worin) unterscheiden sich $f(1)$, $f(\{1\})$ und $\{f(1)\}$? Gesucht sind $f(\{2, 3, 5\})$, $f^{-1}(\{2, 3, 5\})$ und $f^{-1}(\{0\})$. Was bedeutet die Aussage $f(\mathbb{Z}) \neq \mathbb{Z}$?

19. Untersuche mit Hilfe der Graphen, ob die Funktionen $g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$g(x) := \begin{cases} x - 1 & \text{falls } x < 0 \\ x + 1 & \text{falls } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad h(x) := \begin{cases} x + 1 & \text{falls } x < 0 \\ x - 1 & \text{falls } x \geq 0 \end{cases}, \text{injektiv oder surjektiv sind.}$$

20. Gesucht ist die Anzahl aller injektiven, nicht injektiven, surjektiven und nicht surjektiven Abbildungen $f : A \rightarrow B$ für $|A| = 3$ und $|B| = 2$.

21. Wahr oder falsch?

- Die Zuordnung aus dem Kapitel 0 (Gleichmächtigkeit von \mathbb{Z} und \mathbb{N}) ist eine Funktion.
- Bei der Abbildung in Aufgabe 18 hat keine negative Zahl ein Bild.
- Bei der Abbildung in Aufgabe 18 hat keine negative Zahl ein Urbild.
- Es gibt keine Abbildungen zwischen endlichen und unendlichen Mengen.

B: Übungsaufgaben

13. (*) Sei $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ definiert durch $f((a, b)) := 2a - b$ und $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definiert durch $g((a, b)) := (a + b, 3a - 1)$.

a) Gesucht sind $f(\{(n, n) \mid n \in \mathbb{N}\})$, $f^{-1}(\{2\})$ und $g^{-1}(\{(0, 2)\})$.

b) Beweisen oder widerlegen Sie: $f(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \neq \mathbb{Z}$.

c) Gesucht sind alle $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ohne Urbild unter der Abbildung g (mit Begründung). Wenn Sie dies nicht schaffen: Geben Sie mindestens drei dieser Zahlenpaare an.

14. Die Abbildung $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch $g(x) := \begin{cases} 1 - x & \text{falls } x < 1 \\ 2x - 3 & \text{falls } x \geq 1 \end{cases}$.

Überprüfen Sie, ob für $A_1 := \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 2\}$ und $A_2 := \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 3\}$ in Satz 4.1 b) das Gleichheitszeichen gilt.

15. a) Gesucht ist die Anzahl aller surjektiven Abbildungen $f : A \rightarrow B$ für $|A| = 4$ und $|B| = 3$.

b) Wie a) für $|A| = m$ und $|B| = n$ mit $n \in \{1, 2, 3\}$.

Abgabe der B – Aufgaben : Montag, 23. November 09