

Übungen zu Mathematik III (Lehramt GM/So)

WiSe 07/08

H. König und H.-J. Samaga

Blatt 4

A: Präsenzaufgaben und Verständnisfragen

13. Gesucht sind alle Häufungspunkte der Folge $(-1)^n + \frac{2n+3}{3n-1}$.
14. Bestimme den Grenzwert von a) $\frac{n^2+5}{n^3}$ b) $\frac{2n+5}{3n}$ c) $\frac{2^n+5}{3^n}$ d) $\frac{n^2}{n-1} - \frac{n^2}{n+1}$ e) $\frac{(1+\frac{1}{n})^{2n} \cdot n}{2n-1}$
15. a) Gesucht sind alle Hoch- und Tiefpunkte der Folge (a_n) , definiert durch $a_n := \frac{3n-4}{n+1}$ für $n < 4$ und $a_n := 1$ für $n \geq 4$.
b) Gesucht sind – wenn möglich – eine beschränkte und eine nicht beschränkte Folge mit jeweils genau zwei Hoch- und genau zwei Tiefpunkten.
16. Wahr oder falsch?
a) Wenn eine Folge zwei der drei Eigenschaften *beschränkt*, *monoton*, *konvergent* besitzt, dann auch die dritte.
b) Konvergente Folgen, die in fast allen Folgenglieder übereinstimmen, müssen den gleichen Grenzwert haben.
c) Für Folgen $(a_n), (b_n)$ gilt $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{b_n}{a_n} \rightarrow \infty$.

B: Übungsaufgaben

10. Sei $a_1 := 0$ und $a_{n+1} := \frac{1}{3} (1 + a_n + a_n^2)$.
a) Gibt es untere Schranken? (Mit Begründung)
b) Beweisen Sie durch vollständige Induktion: $a_n \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
c) Beweisen Sie, dass die Folge gegen 1 konvergiert.
11. Überprüfen Sie auf Konvergenz und geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an! (Mit Beweis):
a) $a_n := \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2}$, hier ist ferner a_{50} gesucht (kann man im Kopf ausrechnen!).
b) $b_n := \frac{3n(n+1)}{n+3} - \frac{3n^3}{n^2+2}$
12. Beweisen oder widerlegen Sie: Jede beschränkte Folge mit höchstens einem Häufungspunkt ist konvergent. (Kleiner Tipp: Was folgt aus bekannten Sätzen, falls ein Häufungspunkt einer beschränkten Folge *kein* Grenzwert ist?)

Abgabe der Übungsaufgaben : Dienstag, 20. November 07, in den Übungen.