

Übungen zu Mathematik III (Lehramt GM/So)

WiSe 07/08

H. König und H.-J. Samaga

Blatt 2

A: Präsenzaufgaben und Verständnisfragen

5. Gesucht ist eine Folge mit genau zwei Häufungspunkten, von denen genau einer auch als Folgenglied vorkommt (ohne Beweis).
6. Gesucht sind alle Häufungspunkte der Cantorfolge (Abzählung von $\mathbb{Q}$).
7. Zeichne in eine Skizze (Grundmenge sei die Menge aller reellen Folgen)
 M_1 : Menge aller reellen Folgen, die konvergent sind,
 M_2 : Menge aller reellen Folgen, die einen Häufungspunkt haben,
und gib für jede der möglichen Gebiete je eine Beispielfolge an (ohne Beweis).
8. Wahr oder falsch ?
 - a) Wenn für alle Glieder einer Folge $|a_n - a| < \frac{1}{10}$ gilt, dann gilt auch $|a_n - a_m| < \frac{1}{5}$.
 - b) In jeder Nullfolge kommt die Zahl 0 unendlich oft vor.
 - c) In jeder Nullfolge kommt die Zahl 0 wenigstens einmal vor.
 - d) Es gibt Folgen mit unendlich vielen Folgengliedern 0, die nicht gegen 0 konvergieren.
 - e) Für jede Nullfolge (a_n) gilt: $\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \forall n \geq n_0 \quad : \quad |a_n| < \varepsilon$.

B: Übungsaufgaben

4. Zeichnen Sie in eine Skizze (Grundmenge sei die Menge aller reellen Folgen)
 M_1 : Menge aller reellen Folgen, die beschränkt sind,
 M_2 : Menge aller reellen Folgen, die konvergent sind,
 M_3 : Menge aller reellen Folgen, die monoton wachsen,
 M_4 : Menge aller reellen Folgen, die genau zwei Häufungspunkte haben,
und geben Sie für jede der möglichen Gebiete je eine Beispielfolge an (ohne Beweis).
5. a) Wie Aufgabe B 4 für M_1 : Menge aller reellen Folgen, die nicht beschränkt sind,
 M_2 : Menge aller reellen Folgen ohne Häufungspunkt,
 M_3 : Menge aller reellen Folgen, die genau einen Häufungspunkt haben,
 M_4 : Menge aller reellen Folgen, die unendlich viele Häufungspunkte haben.
b) In welchen der sich aus a) ergebenden Gebieten kann eine monoton fallende Folge liegen (mit Begründung)?
c) In welchen der in a) vorkommenden Gebieten liegt eine Folge, die alle rationalen Zahlen zwischen 0 und 1 abzählt (mit Begründung)?
6. Beweisen Sie: $(a_n) \rightarrow a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - a_m| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_0$.

Abgabe der Übungsaufgaben : Dienstag, 6. November 07, in den Übungen.