

# Übungen zu Mathematik III (Lehramt GM/So)

WiSe 07/08

H. König und H.-J. Samaga

Blatt 10

## A: Präsenzaufgaben und Verständnisfragen

40. Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $f(x) := \begin{cases} 2x + 1 & \text{für } x < 1 \\ 1 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$ . Untersuche  $f$  auf Stetigkeit an den Stellen  $x_0 = -1$  und  $x_1 = 1$
- mit Hilfe der Definition 10.1
  - mit Hilfe von Satz 10.3.
41. Seien  $f$  und  $g$  gegeben durch  $f(x) := x + 1$  und  $g(x) := \begin{cases} x + 1 & \text{für } x \leq 0 \\ x - 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$ . Was weiß man über die Stetigkeit der Funktionen  $f \circ f$ ,  $f \circ g$  und  $g \circ f$ ?
42. Welche Eigenschaft einer reellen Funktion wird hier beschrieben?

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad : \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{falls} \quad |x - x_0| < \delta$$

## B: Übungsaufgaben

28. Sei die reelle Funktion  $f$  gegeben durch  $f(x) := \begin{cases} \frac{1}{2}x + 3 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x = 0 \\ x + \frac{1}{2} & \text{für } x > 0 \end{cases}$ .
- Gesucht ist das größte  $\delta$ , das der  $\varepsilon$ - $\delta$ -Bedingung (Satz 10.3) an der Stelle  $x_0 = -1$  für  $\varepsilon = \frac{1}{20}$  genügt (mit Beweis, Sie dürfen sich auf  $x < 0$  beschränken).
  - Warum kann man die Unstetigkeit an der Stelle  $x_0 = 0$  nicht mit  $\varepsilon = 2$ , aber mit  $\varepsilon = 1$  nachweisen (mit Begründung)?
29. Sei  $f : ] - 1, 1 [ \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $f(x) := 1 + |x|$  für  $x \notin \mathbb{Q}$  und  $f(x) := 1 - x$  für  $x \in \mathbb{Q}$ . Wo ist diese Funktion (un)stetig? (Mit Beweis)
30. a) Skizzieren Sie für  $g$  aus Aufgabe 41 den Graph der Funktion  $g \circ g$ . An welchen Stellen ist  $g \circ g$  unstetig? (Mit Beweis)
- b) Zeigen Sie am Beispiel der Dirichletfunktion  $f_1$  und der Funktion  $f_2$ , definiert durch  $f_2(x) := x \cdot f_1(x)$ , dass die Verkettung zweier Funktionen je nach Reihenfolge stetig oder unstetig sein kann. (Die Stetigkeit bzw. Unstetigkeit der verketteten Funktion muss nicht nachgewiesen werden.)

Abgabe der Übungsaufgaben : Dienstag, 15. Januar 08, in den Übungen