Übungen Modul Grundbildung Lineare Algebra und analytische Geometrie

SoSe 10 J. Mylosz und H.-J. Samaga **Blatt 9**

A: Präsenzaufgaben und Verständnisfragen

34. Man finde

a) die Matrix A zur linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x + 2y$.

b) die Matrix B zur linearen Abbildung $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ x \mapsto (x, 3x, 2x)$.

c) (Wiederholung) Welche der Eigenschaften injektiv, surjektiv, bijektiv erfüllen f und g?

35. Seien $F = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Gesucht ist GFG. Um welche lineare Abbildung handelt es sich?

b) Im Skript (Seite 89) steht $FGF = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Um welche lineare Abbildung handelt es sich?

36. a) Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Berechne – wenn möglich –

$A \circ B,\ B \circ A,\ A \circ A,\ B \circ B,\ A^{-1}$ und B^{-1}.

b) Löse mit Hilfe der inversen Matrix B^{-1} das Gleichungssystem $Bx = \binom{3}{1}$.

37. Wahr oder falsch?

a) Die Spiegelung an der Geraden $y = 1$ im $\mathbb{R}^2$ ist keine lineare Abbildung.

b) Die lineare Abbildung f mit $e_1 \mapsto e_2,\ e_2 \mapsto e_3,\ e_3 \mapsto e_1$ im $\mathbb{R}^3$ ist eine Drehung um 120°.

c) $A, B \in M(k \times k)$ regulär $\Rightarrow$ $AB \in M(k \times k)$ regulär.

B – Aufgaben auf der nächsten Seite

B: Übungsaufgaben

25. Von einer Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ sei nur $f((1,0,1)) = (1,0)$, $f((1,1,1)) = (1,1)$ und $f((1,3,1)) = (1,r)$ mit $r \in \mathbb{R}$ bekannt. Beweisen oder widerlegen Sie für diese Abbildung folgende Behauptungen:

a) f kann für jedes $r \in \mathbb{R}$ linear sein.

b) f kann nur für genau ein $r \in \mathbb{R}$ linear sein.

c) Für $r = 3$ gibt es mehrere solche lineare Abbildungen f.

Hinweis: Überprüfe zunächst $((1,0,1),(1,1,1),(1,3,1))$ auf lineare (Un)abhängigkeit.

25.° Alternative Aufgabe (nur zu lösen, falls Sie mit **25.** nicht klar kommen, hierfür gibt es aber nur maximal 3 Punkte):

Lösen Sie mit Hilfe der Matrizenrechnung das Gleichungssystem $-6x+7y = 9, \quad -4x+5y = 4$.

26. Wir haben festgestellt, dass linear unabhängige Vektoren bei linearen Abbildungen $f : V \to W$ nicht immer auf linear unabhängige Vektoren abgebildet werden. Jetzt geht es um linear abhängige Vektoren. Beweisen Sie: Linear abhängige Vektoren werden bei linearen Abbildungen stets auf linear abhängige Vektoren abgebildet.

(Hinweise: Wie lautet die exakte Behauptung? Was heißt linear abhängig? Was passiert mit dem Nullvektors unter linearen Abbildungen? Welche Eigenschaften haben lineare Abbildungen?)

27. $(*)$ Berechnen Sie alle möglichen Produkte $X \circ Y$ mit $X, Y \in \{A, B, C, D, F\}$ für

$$A = (1 \quad -2), \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = (3).$$

Abgabe der Übungsaufgaben am 21.6. nach der Vorlesung bzw. in den Übungen. Bitte beachten Sie: Nicht–Bearbeitung von $(*)$–Aufgaben bedeutet Minuspunkte!