Übungen Modul Grundbildung Lineare Algebra und analytische Geometrie

SoSe 10 J. Mylosz und H.-J. Samaga **Blatt 8**

A: Präsenzaufgaben und Verständnisfragen

30. Überprüfe auf Linearität und gib — wenn möglich — Bild und Kern an:
a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2$ b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x_1, x_2) \mapsto (x_1, 0)$

31. Was weiß man über n und m, wenn eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ existiert mit $\dim \text{Bild}\, f = 4$ und $\text{Kern}\, f = L(e_1, e_3, e_4)$?

32. Gesucht sind alle Fixpunkte von linearen Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:
a) $f((x, y)) = (y, -x)$ b) $g(x, y)) = (-y, -x)$.

33. Wahr oder falsch?
a) Sei $f : V \to W$ eine Abbildung zwischen Vektorräumen.
(i) $f(o_V) \neq o_W \;\Rightarrow\; f \notin \text{Hom}\,(V, W)$ (ii) $f(o_V) = o_W \;\Rightarrow\; f \in \text{Hom}\,(V, W)$
b) Für lineare Abbildungen f ist stets $\dim \text{Kern}\, f \leq \dim \text{Bild}\, f$.
c) Der Kern der identischen Abbildung besitzt keine Basis.
d) Linear unabhängige Vektoren werden bei linearen Abbildungen stets auf linear unabhängige Vektoren abgebildet.

B: Übungsaufgaben

22. a) Gesucht ist ein Beispiel für $f \in \text{Hom}\,(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, f bijektiv, mit genau einem Fixpunkt.
b) Gesucht ist ein Beispiel für $f \in \text{Hom}\,(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, $f \neq \text{id}$, mit mehr als einem Fixpunkt.
c) Existiert $f \in \text{Hom}\,(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ ohne Fixpunkt?
d) Existiert $f \in \text{Hom}\,(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ mit genau zwei Fixpunkten?
(Bei a) und b) jeweils mit Begründung, bei c) und d) jeweils Beispiel oder Beweis, dass so eine Abbildung nicht existieren kann.)

23. $(*)$ Geben Sie für die linearen Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y) \mapsto (2x, x - y, x + y)$ und $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (x + y - z, x + y + z, 3z)$ jeweils die Dimension von Kern f, Bild f, Kern g, Bild g und Bild $(g \circ f)$ an.

24. Zeichnen Sie das Bild eines Hauses mit Ecken $(0, 0), (2, 0), 2, 2), (0, 2)$ und Dachspitze $(1, 3)$
a) (i) bei der linearen Abbildung f, gegeben durch $f(e_1) = e_1 + e_2$ und $f(e_2) = e_1 - e_2$
(ii) bei der linearen Abbildung g, gegeben durch $g(e_1) = e_1$ und $g(e_2) = e_1 + e_2$.
b) Bei welcher der Abbildungen von a) verändert sich der Flächeninhalt des Hauses? (Kurze Begründung)

Abgabe der Übungsaufgaben am 14.6. nach der Vorlesung bzw. in den Übungen. Bitte beachten Sie: Nicht–Bearbeitung von $(*)$–Aufgaben bedeutet Minuspunkte!