Übungen Modul Grundbildung Lineare Algebra und analytische Geometrie

SoSe 10 J. Mylosz und H.-J. Samaga **Blatt 7**

A: Präsenzaufgaben und Verständnisfragen

26. a) Beweise oder widerlege: (2) ist eine Basis des reellen Vektorraums $V = \mathbb{R}^1$.

b) Wir setzen an Stelle des Körpers der reellen Zahlen den Körper der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ und untersuchen den *rationalen* Vektorraum $V = \mathbb{R}^1$. Was bedeutet das für die skalare Multiplikation? Welcher Untervektorraum von $\mathbb{R}$ ist die lineare Hülle $L(1)$? Beweise oder widerlege: $2 \in L(\sqrt{2})$. Wer wagt eine Vermutung über die Dimension dieses Vektorraums?

27. Beweise oder widerlege: $(9, 10, 11) \in L((1, 2, 3), (3, 2, 1))$.

28. Im $\mathbb{R}^2$ definieren wir $v_i := (i, i+1)$ und untersuchen, auf welche Weise der Nullvektor $o = (0, 0)$ in $L(v_1, v_2, v_3)$ dargestellt werden kann.

Beweise: $\left\{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \sum_{i=1}^{3} \alpha_i v_i = o\right\} = L((1, -2, 1))$.

29. Wahr oder falsch?

a) Neun Vektoren des $\mathbb{R}^8$ sind stets linear abhängig.

b) Acht Vektoren des $\mathbb{R}^9$ sind stets linear unabhängig.

c) $\dim(U_1 + U_2 + U_3) = \dim U_1 + \dim U_2 + \dim U_3 - \dim(U_1 \cap U_2 \cap U_3)$.

B: Übungsaufgaben

19. Für beliebige Untervektorräume $U_1, U_2 \subset V$ sei $U_1 - U_2 := \{u - v \mid u \in U_1, v \in U_2\}$.
Beweisen oder widerlegen Sie

a) $U_1 - U_1 = \{o\}$ b) $U_2 - U_2 = U_2$ c) $U_1 - U_2 = U_1 + U_2$

20. Im Anschauungsraum $\mathbb{R}^3$ seien $U_1 := L((2, 1, 4), (0, 1, 2))$ und $U_2 := L((1, 1, 1), (2, 1, 3))$.

a) Welche geometrische Gestalt haben U_1 und U_2?

b) Jede lineare Hülle ist ein Untervektorraum. Geben Sie $\dim U_1$ und $\dim U_2$ an!

c) Welche Dimension haben die Unterräume $U_1 + U_2$ und $U_1 \cap U_2$?

d) Gesucht ist ein Basisvektor von $U_1 \cap U_2$.

21. Mit der Bezeichnung aus Aufgabe **A 28.**:

a) Gesucht sind mindestens drei verschieden Quadrupel $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ mit $o = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i v_i$.

b) Gesucht sind $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^4$ mit $\left\{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in \mathbb{R}^4 \mid \sum_{i=1}^{4} \alpha_i v_i = o\right\} = L(u_1, u_2)$.

Abgabe der Übungsaufgaben am 7.6. nach der Vorlesung bzw. in den Übungen.