# Übungen Modul Grundbildung Lineare Algebra und analytische Geometrie

**SoSe 10** J. Mylosz und H.-J. Samaga **Blatt 5**

## A: Präsenzaufgaben und Verständnisfragen

**18.** Die skalare Multiplikation $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ erfüllt vier wichtige Bedingungen.

a) Wie lauten diese Bedingungen (ohne Blick in die Unterlagen)?

b) Beweise für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}^2$ $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$, jeder Schritt ist genau zu begründen.

**19.** Es geht um den Vektorraum $V = (\mathrm{Abb}\,([0,1], \mathbb{R}), +, \cdot)$.

a) Die Abbildung $f + g$ ist bekanntlich definiert durch $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$.
Beweise die Gültigkeit des Assoziativgesetzes $f + (g + h) = (f + g) + h$.

b) Warum ist die Abbildung $o$, definiert durch $o(x) = 0 \;\; \forall x \in [0,1]$ das neutrale Element?

**20.** Gesucht sind alle Untervektorräume des $\mathbb{R}^3$ (ohne Beweis).

**21.** Wahr oder falsch? ($o$ sei der Nullvektor):

a) In jedem reellen Vektorraum gibt es Vektoren $x, y$ mit $x + y = o$.

b) Im reellen Vektorraum $\mathbb{R}^n$ gibt es einen Vektor $x \neq o$ mit $x + x = o$.

c) $\mathbb{R}$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$.

d) Die bijektiven Abbildungen bilden einen Untervektorraum von $(\mathrm{Abb}\,([0,1], \mathbb{R}), +, \cdot)$.

## B: Übungsaufgaben

**13.** Zeige für den Vektorraum $(\mathrm{Abb}\,([0,1], \mathbb{R}, +, \cdot)$ die Gültigkeit der Axiome (1), (3) und (4) der Skalarmultiplikation. (Jeder Rechenschritt ist genau zu begründen!)

**14.** Für eine Gruppe $(G, *)$ mit mindestens zwei Elementen und neutralem Element $e$ sei eine Abbildung $\cdot : \mathbb{R} \times G \to G$ definiert durch $\alpha \cdot g := e$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und alle $g \in G$. Welche der Axiome (1) – (4) der Skalarmultiplikation sind erfüllt? (Mit Beweis, beachten Sie die korrekte Verwendung der jeweiligen Verknüpfungszeichen.)

**15.** $(*)$ Wenden Sie Satz 1.2 an: Welche der Teilmengen $U_i$ des $\mathbb{R}^n$ sind Untervektorräume?

a) $n = 1:$ $U_1 = \mathbb{Q}$

b) $n = 2:$ $U_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 - x_2 = 2x_1\}$

c) $n = 3:$ $U_3 = \{(x, x-1, x+1) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\}$

d) $n = 4:$ $U_4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = x_3 + x_4\}$

e) $n = 4:$ $U_5 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 \cdot x_2 = x_3 \cdot x_4\}$.

Abgabe der Übungsaufgaben am 17.5. nach der Vorlesung bzw. in den Übungen. Bitte beachten Sie: Nicht–Bearbeitung von $(*)$–Aufgaben bedeutet Minuspunkte!