

Übungen Modul Grundbildung Lineare Algebra und analytische Geometrie

SoSe 10

J. Mylosz und H.-J. Samaga

Blatt 4

A: Präsenzaufgaben und Verständnisfragen

14. Falls die Gruppen $(\mathbb{Z}, +)$ und $(2\mathbb{Z}, +)$ isomorph sind, muss es eine bijektive und strukturerhaltende Abbildung $f : \mathbb{Z} \rightarrow 2\mathbb{Z}$ geben.
- Welche Elemente gehören zu $2\mathbb{Z}$? Was bedeutet strukturerhaltend?
 - Warum kann die Isomorphie mit der Abbildung $f(x) := -2x$ gezeigt werden?
15. Beweise mit Hilfe von $f(x) := x - 2$ die Behauptung $(\mathbb{Q}, +) \simeq (\mathbb{Q}, *)$, es ist $x * y := x + y + 2$.
16. Welche der folgenden Gruppen sind isomorph?
- $S_3, (\mathbb{Z}_6, +_6), (\mathbb{Z}_7^*, \cdot_7)$
 - $(\mathbb{Q}, +), (\mathbb{Q}^*, \cdot), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{R}^*, \cdot)$
17. Wahr oder falsch?
- Es gibt nichtisomorphe Gruppen gleicher Ordnung.
 - Es gibt isomorphe Gruppen gleicher Ordnung.
 - Es gibt isomorphe Gruppen verschiedener Ordnung.
 - Es gibt nichtisomorphe Gruppen verschiedener Ordnung.

B: Übungsaufgaben

10. Bestimmen Sie alle Automorphismen des „Schere–Stein–Papier“— Gruppoids:

★	Schere	Stein	Papier
Schere	Schere	Stein	Schere
Stein	Stein	Stein	Papier
Papier	Schere	Papier	Papier

11. Sei (G, \circ) eine beliebige Gruppe. Für ein festes (beliebiges) $g \in G$ ist die Abbildung $f_g : G \rightarrow G$ durch $f_g(x) := gxg^{-1}$ definiert. (Beispiel für (\mathbb{R}^*, \cdot) : $f_3(4) = 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} = 4$). Beweisen oder widerlegen Sie:
- f_g ist bei jeder Gruppe G und jedem Element $g \in G$ eine bijektive Abbildung.
 - f_g ist bei jeder Gruppe G und jedem Element $g \in G$ eine strukturerhaltende Abbildung.
 - f_g ist bei jeder Gruppe G und jedem Element $g \in G$ die identische Abbildung.
12. (*) Beweisen Sie: $(\mathbb{Q} \setminus \{1\}, *) \simeq (\mathbb{Q} \setminus \{2\}, \circ)$ für die Verknüpfungen $x * y := xy - x - y + 2$ und $x \circ y := xy - 2x - 2y + 6$.

Abgabe der Übungsaufgaben am 10.5. nach der Vorlesung bzw. in den Übungen. Bitte beachten Sie: Nicht-Bearbeitung von (*)-Aufgaben bedeutet Minuspunkte!