

Übungen Modul Grundbildung Lineare Algebra und analytische Geometrie

SoSe 10

J. Mylosz und H.-J. Samaga

Blatt 4

A: Präsenzaufgaben und Verständnisfragen

14. Falls die Gruppen $(\mathbb{Z}, +)$ und $(2\mathbb{Z}, +)$ isomorph sind, muss es eine bijektive und strukturerhaltende Abbildung $f: \mathbb{Z} \rightarrow 2\mathbb{Z}$ geben.
- a) Welche Elemente gehören zu $2\mathbb{Z}$? Was bedeutet strukturerhaltend?
b) Warum kann die Isomorphie mit der Abbildung $f(x) := -2x$ gezeigt werden?
15. Beweise mit Hilfe von $f(x) := x - 2$ die Behauptung $(\mathbb{Q}, +) \simeq (\mathbb{Q}, *)$, es ist $x * y := x + y + 2$.
16. Welche der folgenden Gruppen sind isomorph?
a) $S_3, (\mathbb{Z}_6, +_6), (\mathbb{Z}_7^*, \cdot_7)$ b) $(\mathbb{Q}, +), (\mathbb{Q}^*, \cdot), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{R}^*, \cdot)$
17. Wahr oder falsch?
a) Es gibt nichtisomorphe Gruppen gleicher Ordnung.
b) Es gibt isomorphe Gruppen gleicher Ordnung.
c) Es gibt isomorphe Gruppen verschiedener Ordnung.
d) Es gibt nichtisomorphe Gruppen verschiedener Ordnung.

B: Übungsaufgaben

10. Bestimmen Sie alle Automorphismen des „Schere–Stein–Papier“— Gruppoids:

\star	Schere	Stein	Papier
Schere	Schere	Stein	Schere
Stein	Stein	Stein	Papier
Papier	Schere	Papier	Papier

11. Sei (G, \circ) eine beliebige Gruppe. Für ein festes (beliebiges) $g \in G$ ist die Abbildung $f_g: G \rightarrow G$ durch $f_g(x) := gxg^{-1}$ definiert. (Beispiel für (\mathbb{R}^*, \cdot) : $f_3(4) = 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} = 4$). Beweisen oder widerlegen Sie:
- a) f_g ist bei jeder Gruppe G und jedem Element $g \in G$ eine bijektive Abbildung.
b) f_g ist bei jeder Gruppe G und jedem Element $g \in G$ eine strukturerhaltende Abbildung.
c) f_g ist bei jeder Gruppe G und jedem Element $g \in G$ die identische Abbildung.
12. (*) Beweisen Sie: $(\mathbb{Q} \setminus \{1\}, *) \simeq (\mathbb{Q} \setminus \{2\}, \circ)$ für die Verknüpfungen $x * y := xy - x - y + 2$ und $x \circ y := xy - 2x - 2y + 6$.

Abgabe der Übungsaufgaben am 10.5. nach der Vorlesung bzw. in den Übungen. Bitte beachten Sie: Nicht-Bearbeitung von (*)-Aufgaben bedeutet Minuspunkte!