

Übungen Modul Grundbildung Lineare Algebra und analytische Geometrie

SoSe 10

J. Mylosz und H.-J. Samaga

Blatt 3

A: Präsenzaufgaben und Verständnisfragen

10. In Gruppen $(G, *)$ kürzt man die k -fache Verknüpfung eines Elements g mit sich selbst häufig durch g^k oder $k \cdot g$ ab. Für welche Zahl k gilt in der Gruppe $(\mathbb{Z}_8, +_8)$ die Aussage $4+_8 7 = k \cdot 5$?
11. Zur Gruppe mit der Verknüpfungstafel rechts sind gesucht ein Erzeugendensystem mit möglichst wenigen Elementen, alle Untergruppen und der Untergruppenverband.
- | | | | | |
|---------|-----|-----|-----|-----|
| \circ | e | a | b | c |
| e | e | a | b | c |
| a | a | e | c | b |
| b | b | c | e | a |
| c | c | b | a | e |
12. D_4 ist bekanntlich die Gruppe aller Drehungen und Spiegelungen, die ein Quadrat auf sich abbilden. Welche Abbildungen gehören in diesem Sinn zu einem Rechteck, das kein Quadrat ist? Wie verhält es sich bei einem Parallelogramm oder bei einem Drachen? Gibt es weitere interessante Vierecke? Was hat diese Aufgabe mit Untergruppen zu tun?
13. Wahr oder falsch?
- Die Gruppe $(\mathbb{Z}_5, +_5)$ wird von jedem Element außer von 0 erzeugt.
 - Die Gruppe $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ wird von jedem Element außer von 0 erzeugt.
 - $(\mathbb{Z}_2, +_2)$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$.
 - In der Gruppe S_3 gilt in der Zykelschreibweise $(1, 2) \circ (1, 2, 3) = (2, 3) = (3, 2)$.

B: Übungsaufgaben

7. a) Gesucht ist ein Erzeugendensystem mit möglichst wenigen Elementen von $(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2, *)$ mit $(a_1, a_2) * (b_1, b_2) := (a_1 +_3 b_1, a_2 +_2 b_2)$
- b) Beweisen oder widerlegen Sie: $S = \{\delta_1, s_1\}$ ist ein minimales Erzeugendensystem (möglichst wenige Elemente) der Diedergruppe D_6 .
Zur Bezeichnung: Die Eckpunkte des Sechsecks seien $1, \dots, 6$, nummeriert entgegen dem Uhrzeigersinn. Für $i = 1, \dots, 5$ sei δ_i die Drehung um $i \cdot 60^\circ$. Für $i = 1, 2, 3$ sei s_i die Spiegelung an der Geraden durch die Eckpunkte i und $i + 3$; ferner sei (Zykelschreibweise) $s_4 = (1, 2)(3, 6)(4, 5)$, $s_5 = (1, 4)(2, 3)(5, 6)$ und $s_6 = (1, 6)(2, 5)(3, 4)$.
8. Welche Teilmengen sind bezüglich der Multiplikation Untergruppen von (\mathbb{C}^*, \cdot) ?
- $\{i^k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$
 - $\{k \cdot i \mid k \in \mathbb{Z}^*\}$
 - \mathbb{R}^*
 - $\{\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi \mid \varphi \in \mathbb{R}\}$
- (Hinweis: Was haben Sie im ersten Semester über komplexe Zahlen gelernt?)
9. Gesucht sind die Untergruppenverbände von $(\mathbb{Z}_{18}, +_{18})$ und von D_4 .

Abgabe der Übungsaufgaben am 3.5. nach der Vorlesung bzw. in den Übungen.