Übungen Modul Grundbildung Lineare Algebra und analytische Geometrie

SoSe 10 J. Mylosz und H.-J. Samaga **Blatt 2**

A: Präsenzaufgaben und Verständnisfragen

7. Beweise oder widerlege: $(\mathbb{R}^*, \circ)$ mit $x \circ y := 2xy$ ist eine abelsche Gruppe.

8. Auf $\mathbb{R}^*$ seien die Abbildungen $f_1(x) := x,\ f_2(x) = \frac{1}{x},\ f_3(x) = -x,\ f_4(x) = -\frac{1}{x}$ definiert.
a) Wie sieht die Verknüpfungstafel von $(\mathbb{R}^*, \circ)$ aus? ($\circ$: Hintereinanderausführung)
b) Begründe: $(\{f_1, f_2, f_3, f_4\}, \circ)$ ist eine abelsche Gruppe.

9. Wahr oder falsch?

a) $(G, *)$ mit der Verknüpfungstafel

$$\begin{array}{c|ccc} * & x & y & z \\ \hline x & x & y & z \\ y & z & x & y \\ z & y & z & x \end{array}$$

ist eine nichtabelsche Gruppe.

b) In $(G, *)$ aus a) gilt die Kürzungsregel.

c) $(\mathbb{R}, \circ)$ mit $x \circ y := xy - 1$ ist eine Gruppe.

B: Übungsaufgaben

4. $(*)$ Beweisen Sie: $(\mathbb{R}\backslash\{2\}, \circ)$ mit $x \circ y := xy - 2x - 2y + 6$ ist eine abelsche Gruppe.

5. Auf $D := \mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$ seien folgende Funktionen $f_i : D \to D$ erklärt:
$f_1(x) := x,\ f_2(x) := 1 - x,\ f_3(x) := \frac{1}{x},\ f_4(x) := \frac{1}{1-x},\ f_5(x) := \frac{x-1}{x},\ f_6(x) := \frac{x}{x-1}.$
a) Gesucht ist die zugehörige Verknüpfungstafel bzgl. der Hintereinanderausführung $\circ$.
b) Beweisen Sie: $(\{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}, \circ)$ ist eine Gruppe.

6. Gegeben sei die unvollständigen Verknüpfungstafeln

$$\begin{array}{c|cccc} \circ & a & b & c & d \\ \hline a & & & & \\ b & & b & & \\ c & & & & \\ d & & & b & \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{c|cccc} \circ & a & b & c & d \\ \hline a & b & & & \\ b & & a & & \\ c & & & & \\ d & & & & \end{array}$$

Welche dieser Verknüpfungstafeln können zu einer Gruppe gehören? Begründen Sie Ihre Vorgehensweise! (Es werden keine Angaben zum Assoziativgesetz verlangt.)

Abgabe der Übungsaufgaben am 26.04. nach der Vorlesung bzw. in den Übungen. Bitte beachten Sie: Nicht–Bearbeitung von $(*)$–Aufgaben bedeutet Minuspunkte!