Übungen Modul Grundbildung Lineare Algebra und analytische Geometrie

SoSe 10 J. Mylosz und H.-J. Samaga **Blatt 1**

A: Präsenzaufgaben und Verständnisfragen

1. Bei welchen der folgenden Mengen mit den zugehörigen Operationen handelt es sich um Gruppoide?

Menge	$\mathbb{N}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\mathbb{Q}^+$	$\{1, -1, i, -i\}$
Operation	$*$	$\cdot$	$+$	$\star$	$\cdot$

Hierbei bedeutet $n * m := \max\{4n + 3m, 315\}$, $\quad r \star s := \sqrt{r \cdot s}$.

2. Gesucht sind die Verknüpfungstafeln von $(\{1, -1\}, \cdot)$, $\quad (\mathbb{Z}_4, +_4)$, $\quad (\mathbb{Z}_5^*, \cdot_5)$

3. Ergänze folgende Verknüpfungstafel

	a	b	c	d
a				
b				
c			c	
d		c		

a soll neutrales Element sein; zu b soll es kein Linksinverses, aber zwei Rechtsinverse geben; d besitze drei Links– und zwei Rechtsinverse. Wieviele unterschiedliche Ergänzungen sind möglich?

4. Wo liegen im Venn–Diagramm mit $\mathcal{H}$ Menge der Halbgruppen, $\mathcal{N}$ Menge der Gruppoide mit neutralem Element, $\mathcal{K}$ Menge der kommutativen Gruppoide (siehe Skript) die Gruppen und wo liegen die Gruppoide $(\mathbb{C}, \cdot)$, $\;(\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \circ)$, $\;(\mathbb{R}, -)$, $\;(2\mathbb{Z}, \cdot)$?

5. Ergänze folgenden Beweis:

Behauptung: Sei $(G, \cdot)$ Gruppe mit $a, b \in G$. Dann ist $ya = b$ eindeutig lösbar.

Beweis: Sei a^{-1} ________ zu $a \in G$. Wir zeigen: $y := ba^{-1}$ ist das eindeutig gesuchte Element mit $ya = b$.

1. Nachweis der ____________ : Wegen $ya = (\ \_\_\_\ )a = b(\ \_\_\_\ ) = be = \_\_\_$ löst ____ die gegebene Gleichung.

2. Nachweis der ____________ : Angenommen, $w \in G$ erfüllt ebenfalls $wa = b$. Dann gilt
$y = ba^{-1} = (\ \_\_\_\ )a^{-1} = \_\_\_\_\_\_ = we = \_\_\_$.

6. Wahr oder falsch?

a) Es sei $(\mathbb{N}, \circ)$ ein Gruppoid mit $n \circ m := n$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$.
  (i) $\circ$ ist kommutativ.
  (ii) $\circ$ ist assoziativ.
  (iii) $(\mathbb{N}, \circ)$ besitzt ein neutrales Element.

b) In Gruppen gibt es genau ein inverses Element.

c) Für jede Menge M besitzt das Gruppoid $(\mathrm{Pot}\,(M), \cap)$ das neutrale Element M.

d) Das Gruppoid $(\mathbb{N}, \mathrm{ggT})$ besitzt kein neutrales Element.

B: Übungsaufgaben

1. Gesucht sind die Verknüpfungstafeln von

a) $(\mathbb{Z}_n^*, \cdot_n)$ für $n = 7$ und $n = 8$.

b) dem kleinsten Gruppoid $(G, \cdot)$, zu dem die imaginäre Einheit $i \in \mathbb{C}$ gehört.

2. Sei $M := \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 2\} = [0, 2[$. Für $r, s \in M$ sei

$$r \circ s := \begin{cases} r + s & \text{falls } r + s < 2 \\ r + s - 2 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweisen oder widerlegen Sie:

a) $(M, \circ)$ ist ein Gruppoid.

b) $(M, \circ)$ besitzt ein neutrales Element.

c) Jedes Element aus M besitzt ein inverses Element.

3. $(*)$ Wo liegen im Venn–Diagramm aus Aufgabe **A.4** folgende Gruppoide (mit Begründung):

1) $(\mathbb{Z}, +)$ 2) $(\mathbb{N}, +)$ 3) $(\mathbb{Z}, -)$

4)

$*$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	a
b	b	a	a

5)

$*$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	b
b	b	a	a

6)

$*$	x	y	z
x	z	y	x
y	y	z	x
z	x	x	z

7) $(\mathrm{Abb}(\{a, b\}, \{a, b\}), \circ)$ 8) $(\{f \in \mathrm{Abb}(\{a, b\}, \{a, b\}) \mid f \text{ nicht bijektiv }\}, \circ)$

Abgabe der Übungsaufgaben am 19.04. nach der Vorlesung bzw. in den Übungen. Bitte beachten Sie: Nicht–Bearbeitung von $(*)$–Aufgaben bedeutet Minuspunkte!