Übungen Modul Grundlagen der Mathematik

WS 09/10 H. König und H.-J. Samaga **Blatt 2**

A: Präsenzaufgaben und Verständnisfragen

6. Es sei $M_1 := \{n \in \mathbb{N} \mid 3n^2 < 50\}$, $M_2 := \{z \in \mathbb{Z} \mid 5z^2 < 30\}$,
$M_3 := \{z \in \mathbb{Z} \mid 10 < z^3 < 20\}$.
a) Gesucht sind alle Elemente von $M_1,\ M_2,\ M_3,\ M_2 \backslash M_1,\ M_1 \oplus M_2$.
b) Wieviele Elemente haben $M_1 \times M_1,\ M_1 \times M_2,\ M_1 \times M_3$?

7. Überprüfe mit Hilfe von Venn–Diagrammen, ob gilt
a) $A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$, b) $A \backslash (B \backslash C) = (A \backslash B) \backslash C$.

8. Beweise analog zur Vorlesung die zweite Regel von de Morgan $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

9. Wahr oder falsch? a) $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{N} = \mathbb{N} \oplus \mathbb{Z}$ b) $\mathbb{N} \oplus \mathbb{Z} = \mathbb{Z} \backslash \mathbb{N}$ c) $A \oplus B = (B \cup A) \backslash (B \cap A)$

d) Die Zuordnung $f : \begin{cases} \mathbb{Z} & \rightarrow & \mathbb{N} \\ z & \mapsto & z^2 \end{cases}$

- ordnet jeder ganzen Zahl mehrere natürliche Zahlen zu.
- ordnet verschiedenen ganzen Zahlen verschiedene natürliche Zahlen zu.
- kann benutzt werden, um die Gleichmächtigkeit von $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{N}$ zu beweisen.

B: Übungsaufgaben

4. $(*)$ Beweisen Sie: Die Anzahl der geraden natürlichen Zahlen $\mathbb{G} = \{2, 4, 6, \ldots\}$ stimmt mit der Anzahl der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ überein. (Benutzen Sie eine Zuordnung, die jeder geraden natürlichen Zahl genau eine ganze Zahl zuordnet, vgl. Skript Seite 2.)

5. Beweisen Sie ausschließlich mit Hilfe von Satz 1.1 (jeder einzelne Schritt muss mit Teilaussagen dieses Satzes belegt werden): Für beliebige Mengen $A, B \subseteq M$ gilt

$$\overline{\big((A \cap B) \cap \overline{B}\big) \cup \big((\overline{A} \cap \overline{B}) \cup B\big)} = \ ?? \ ,$$

wobei ?? einer der folgenden Ausdrücke ist:

$A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{A} \cup B$, $\overline{A} \cap B$, $A \cup \overline{B}$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A} \cap \overline{B}$.

6. Beweisen Sie für beliebige Mengen A, B, C, D:
a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
b) $(A \times C) \cup (B \times D) \subseteq (A \cup B) \times (C \cup D)$
c) Gilt in b) auch die Gleichheit? (Beweis oder Gegenbeispiel)

Abgabe der **B** – Aufgaben : Montag, 2. November 09