

Übungen Modul Grundlagen der Mathematik

WS 09/10

H. König und H.-J. Samaga

Blatt 10

A: Präsenzaufgaben und Verständnisfragen

- 35.** Im Skript findet man als Beispiel für eine Folge: $c_n := \frac{1}{2^n \sqrt{5}} \left((1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n \right)$.
Berechne die Folgenglieder c_1 und c_2 .
- 36.** Zwei Primzahlen p und q mit $q = p + 2$ heißen Primzahlzwillinge. Wenn p, q und r drei Primzahlen mit $q = p + 2$ und $r = q + 2$ sind, spricht man von Primzahltrillingen.
a) Gesucht sind Beispiele für Primzahlzwillinge und -trillinge.
b) Wieviele Primzahltrillinge gibt es (Beweis)?
- 37.** Gesucht sind ggT und kgV von 588 und 420 sowie die Primfaktorzerlegung von 2010.
- 38.** Wahr oder falsch ?
a) Für jedes $a \in \mathbb{Z}$ gilt $a \mid 0$.
b) Für jedes $a \in \mathbb{Z}$ gilt $0 \mid a$.
c) $n \in \mathbb{N}$ ist gerade $\Rightarrow n^2 + 1$ ist Primzahl.
d) $n^2 + 1$ ist Primzahl $\Rightarrow n \in \mathbb{N}$ ist gerade.
e) Wer in der Vorlesung aufgepasst hat, erkennt ohne Rechnung, ob $19 \cdot 23 \neq 13 \cdot 29$ gilt.

B: Übungsaufgaben

- 28.** Es geht um die Folge aus Aufgabe **A 35**.
a) Berechnen Sie die Folgenglieder c_3 und c_4 (ohne b) zu benutzen).
b) Zeigen Sie durch Nachrechnen (keine Induktion), dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $c_n + c_{n+1} = c_{n+2}$.
Hinweis: Diese Rechnung ist etwas umfangreich. Versuchen Sie, möglichst geschickt auszuklammern und beachten Sie $2(3 \pm \sqrt{5}) = (1 \pm \sqrt{5})^2$.
c) Begründen Sie mit wenigen Worten die *Behauptung*: $c_n \in \mathbb{N}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- 29.** a) Zeigen Sie, dass jede Primzahl zwischen 25 und 75 in der Form $4n - 1$ oder $4n + 1$ mit $n \in \mathbb{N}$ geschrieben werden kann (dies trifft sogar für jede Primzahl $p > 2$ zu).
b) Manche, aber nicht alle Primzahlen lassen sich als Summe zweier Quadrate schreiben (Beispiel: $13 = 2^2 + 3^2$). Überprüfen Sie, für welche der Primzahlen zwischen 25 und 75 dies zutrifft.
c) Beweisen Sie für Primzahlzwillinge $p, p + 2$: $6 \mid p + (p + 2) \iff p > 3$.
d) (Freiwillig, 2 Zusatzpunkte): Welcher Zusammenhang besteht zwischen a) und b)? Beweisen Sie eine Behauptung der Art: Wenn $p > 2$ die Summe zweier Quadrate ist, dann gilt ???
- 30.** Gesucht sind ggT (23 142, 100 485) und kgV (54 587, 75 582).

Abgabe der **B** – Aufgaben : Montag, 11. Januar 10