Inhaltsverzeichnis

Modul
Grundbildung Analysis WiSe 2010/11

Hinweis: Dieses Manuskript setzt das Skript aus dem letzten Semester fort. Es ist nur verständlich und von Nutzen für Personen, die gleichzeitig regelmäßig und aktiv die zugehörige Vorlesung besuchen (also nicht nur körperlich anwesend sind), und es wurde auch nur für diesen Hörerkreis geschrieben. Es erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit, Fehler sind zwar ärgerlich, aber leider nicht auszuschließen!

5 Analysis

In diesem Semester geht es zunächst um reelle Folgen und Reihen, anschließend werden wir Stetigkeit und Differenzierbarkeit bei reellen Funktionen untersuchen.

0 Ein einführendes Beispiel

Zur Zeit der Wiedervereinigung wohnten in der ehemaligen BRD circa 60 Millionen, in der ehemaligen DDR circa 15 Millionen Menschen. Nehmen wir einmal an, dass seitdem in jedem Jahr 3% der Bürger der alten in die neuen Bundesländer wechseln und umgekehrt circa 17% der Bewohner die neuen Länder verlassen, um sich in den alten Ländern niederzulassen. Wie ändern sich die Bevölkerungszahlen im Laufe der Zeit, falls außerdem die Gesamtbevölkerung konstant bleibt?

Lösungsansatz: 1) Die Einwohnerzahl der alten Länder in den ersten Jahren beträgt
60, 60.75, 61.35, 61.83, ... Millionen Menschen, dies folgt aus

2) Sei a_n die Einwohnerzahl der alten Länder am Ende des n–ten Jahres mit dem Startwert $a_0 = 60$. Dann gilt

$$a_{n+1} \;=\; a_n - \frac{3}{100}\cdot a_n + \frac{17}{100}\cdot(75 - a_n) \;=\; 12.75 + 0.8\cdot a_n$$

3) Die Einwohnerzahl in den alten Ländern nimmt ständig zu: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= 12.75 + 0.8\cdot(12.75 + 0.8\cdot a_{n-1}) \;=\; 12.75\cdot(1+0.8) + 0.8^2\cdot a_{n-1} \\
&= 12.75\cdot(1 + 0.8 + 0.8^2 + \ldots + 0.8^n) + 0.8^{n+1}\cdot a_0 \\
&= 12.75\cdot\sum_{k=0}^{n} 0.8^k + 0.8^{n+1}\cdot a_0 \\
&= 12.75\cdot\frac{1-0.8^{n+1}}{1-0.8} + 0.8^{n+1}\cdot a_0 \quad (\text{ Ausnutzung der geometrischen Summenformel}) \\
&= 12.75\cdot 5 + 0.8^{n+1}\cdot(a_0 - 12.75\cdot 5) \;=\; 63.75 - 0.8^{n+1}\cdot 3.75
\end{aligned}$$

Damit ist

$$a_{n+1} - a_n = (63.75 - 0.8^{n+1}\cdot 3.75) - (63.75 - 0.8^n\cdot 3.75) = 0.8^n\cdot 0.2\cdot 3.75 > 0\ ,$$

also wächst a_n in jedem Jahr.

4) Einerseits wird die Einwohnerzahl in den alten Ländern immer größer, andererseits gilt $a_n \leq 75$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Daher ist zu vermuten, dass sich die Einwohnerzahl in den alten Ländern einem „Grenzwert“ g annähert, d.h., für sehr große n ist näherungsweise $a_{n+1} = a_n = g$ zu erwarten. Damit folgt aus 2)

$$g = 12.75 + 0.8 \cdot g \qquad \Longrightarrow \qquad g = 63.75$$

Dieses Ergebnis wird durch folgende Feststellung untermauert: Wenn man 0.8^n für immer größere $n \in \mathbb{N}$ berechnet, nähert man sich immer stärker der Zahl 0 an, also bewegt sich $a_n = 63.75 - 0.8^n \cdot 3.75$ auf die Zahl 63.75 zu.

Wir versuchen einen allgemeinen Ansatz: Bei einer konstanten Gesamtbevölkerung G, einem Startwert a_0 (Einwohnerzahl alte Länder), festen Wanderungsquoten $0 \leq \alpha \leq 1$ (alt nach neu), $0 \leq \beta \leq 1$ (umgekehrt) und $\alpha + \beta \neq 0$ erhalten wir aus der Rechnung 3)

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= (G \cdot \beta) \cdot \frac{1 - (1-\alpha-\beta)^{n+1}}{1 - (1-\alpha-\beta)} + (1-\alpha-\beta)^{n+1} \cdot a_0 \\ &= (G \cdot \beta) \cdot \left(\frac{1}{\alpha+\beta} - \frac{(1-\alpha-\beta)^{n+1}}{\alpha+\beta)} \right) + (1-\alpha-\beta)^{n+1} \cdot a_0 \\ &= G \cdot \frac{\beta}{\alpha+\beta} - (1-\alpha-\beta)^{n+1} \cdot \left(\frac{G \cdot \beta}{\alpha+\beta} - a_0 \right) \end{aligned}$$

Für $|1-\alpha-\beta| < 1$ folgt hieraus analog der „Grenzwert“

$$g = G \cdot \frac{\beta}{\alpha+\beta}$$

Fragen: 1) Bedeutet die Voraussetzung $\alpha+\beta \neq 0$ eine wesentliche Einschränkung unserer Überlegungen?

2) Ist der ausgeschlossenen Fall $|1-\alpha-\beta| \geq 1$ überhaupt möglich?

1 Konvergenz, Grenzwert und Häufungspunkte

Bereits im ersten Semester haben Sie Folgen als Abbildungen von $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{N}_0$ in eine beliebige Menge M kennengelernt, in diesem Sinn handelt es sich bei den Bevölkerungszahlen $a_0, a_1, \ldots$ um eine Folge $a : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$. In den nächsten Abschnitten werden wir uns ausführlich mit unterschiedlichen Eigenschaften von reellen Folgen beschäftigen. Wir beginnen mit einem der wichtigsten Begriffe der Analysis:

Def 1.1 Eine reelle Folge (a_n) *konvergiert* gegen einen *Grenzwert* a, geschrieben

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \quad |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0$$

Eine Folge, die konvergiert, heißt auch *konvergent*. Besitzt eine Folge keinen Grenzwert, handelt es sich um eine *divergente* Folge, es liegt *Divergenz* vor.

Statt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ schreiben wir kürzer $\lim a_n = a$, andere Schreibweisen für diesen Sachverhalt sind $(a_n) \to a$ oder $a_n \to a$. Die natürliche Zahl n_0 aus der Definition 1.1 wird in der Regel von dem vorgegebenen ε abhängen[1], daher findet man in Definitionen an Stelle von n_0 auch oft die Bezeichnung $n_0(\varepsilon)$.

Mit $U_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \varepsilon\}$, genannt *die ε–Umgebung von a*, kann man Konvergenz auch folgendermaßen definieren:

Def 1.1' Eine reelle Folge (a_n) konvergiert gegen einen Grenzwert a $:\Longleftrightarrow$ In *jeder* ε–Umgebung von a liegen *fast alle* Folgenglieder.

Fast alle bedeutet hierbei *alle bis auf endlich viele Ausnahmen.* Dies ist etwas anderes als unendlich viele! Während bei „unendlich viele" beispielsweise jedes zweite Folgenglied (und damit ebenfalls unendlich viele) „irgendwo" liegen darf, sind im Fall „fast alle" ab einem bestimmten Folgenglied keine Ausreißer mehr erlaubt. Ganz wichtig ist, dass man *jede* (noch so kleine) Umgebung von a beachten muss. Die Gleichwertigkeit der beiden Definitionen 1.1 und 1.1' soll hier nicht explizit bewiesen werden.

Beispiele: 1) Jede konstante Folge $a_n := a$ hat a als Grenzwert, denn für jedes $\varepsilon > 0$ und für jede natürliche Zahl n gilt $|a_n - a| = 0 < \varepsilon$. In diesem Fall liegen sogar alle Glieder der Folge in jeder ε–Umgebung von a.

2) Für die Folge (a_n) mit $a_n = \frac{1}{n}$ vermuten wir den Grenzwert 0. Es ist $|a_n - 0| = \frac{1}{n}$. Zum Beweis, dass $a_n \to 0$ gilt, müssen wir also zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ finden, so dass $\frac{1}{n} < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Im ersten Semester haben Sie (hoffentlich) gelernt:[2]

$$\forall r \in \mathbb{R}^* \quad \exists n \in \mathbb{N} \ : \quad 0 < \frac{1}{n} < |r|$$

Auf unseren Fall übertragen bedeutet dies

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \ : \quad 0 < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

Dieses n_0 benutzen wir für den Konvergenznachweis: Für alle $n \geq n_0$ gilt

$$|a_n - 0| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon \ .$$

In diesem Beispiel sieht man deutlich die Abhängigkeit zwischen ε und n_0: Je kleiner die Umgebung U_ε ist, um so länger wird man auf einen Index n_0 warten müssen, ab dem alle Folgenglieder innerhalb der ε-Umgebung liegen.

Jede Folge, die den Grenzwert 0 besitzt, heißt *Nullfolge*.

3) Die Folge $a_n := (-1)^n$ ist nicht konvergent. Hätte diese Folge einen Grenzwert a, so müsste es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ geben mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Wir erhalten für $\varepsilon = 1$ folgenden Widerspruch:

$$2 = |a_{n+1} - a_n| = |(a_{n+1} - a) - (a_n - a)| \leq |a_{n+1} - a| + |a_n - a| < 1 + 1 = 2$$

(wo steckt der Widerspruch?)

[1] Je kleiner ε, um so größer der Index n_0. Wenn in diesem Semester der Buchstabe ε auftaucht, ist (wie in der Mathematik allgemein üblich) immer eine beliebig kleine positive reelle Zahl gemeint.

[2] Zur Erinnerung: Weil es keine größte natürliche Zahl gibt, findet man zu jeder positiven reellen Zahl eine größere natürliche Zahl n. Umgekehrt (man bilde die Kehrwerte) gibt es zu jeder positiven reellen Zahl r eine Zahl vom Typ $\frac{1}{n}$ mit $0 < \frac{1}{n} < r$, dies wurde bereits im ersten Semester (Skript Seite 26) erörtert.

4) $a_n := \frac{3n+4}{2n+2}$ hat den Grenzwert $\frac{3}{2}$. Um dies zu beweisen, müssen wir zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n_0 mit der verlangten Eigenschaft finden. Wir formen um:

$$|a_n - a| = \left|\frac{3n+4}{2n+2} - \frac{3}{2}\right| < \varepsilon \iff \frac{1}{2n+2} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{2\varepsilon} - 1 =: r$$

Jedes n_0 mit $n_0 > r$ erfüllt unsere Bedingung. (*Frage*: Welches n_0 kann für $\varepsilon = \frac{1}{100}$ gewählt werden?)

Wer will, kann Konvergenz auch mit Hilfe des Begriffs *Endstück* einer Folge (a_n) erklären, wobei ein Endstück aus allen Folgenglieder (in unveränderter Reihenfolge) ab einem fest gewählten Folgenglied besteht.[3]

Def 1.1" $a_n \to a :\iff$ In jeder ε– Umgebung von a liegt ein Endstück der Folge.

Wenn in Definition 1.1 $n_0(\varepsilon) = k$ gilt, stammen die endlich vielen Ausnahmen gemäß Definition 1.1' aus der Menge $\{a_1, \ldots, a_{k-1}\}$. Das Endstück aus Definition 1.1" beginnt mit dem Folgenglied a_k.

Folgen können keinen oder einen Grenzwert haben, nie aber mehrere:

Satz 1.1 Jede Folge besitzt höchstens einen Grenzwert.

Beweis: Angenommen, die Folge (a_n) hat zwei verschiedene Grenzwerte a und b. Wir argumentieren mit Hilfe der Definition 1.1', die besagt, dass in jeder ε–Umgebung von a und von b fast alle Folgenglieder liegen müssen. Dies ist aber für $\varepsilon := \frac{|b-a|}{2} > 0$ wegen $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \emptyset$ unmöglich!

Formal kann man auch mit Definition 1.1 arbeiten, um zu einem Widerspruch zu gelangen:

Zu $\varepsilon := \frac{|b-a|}{2} > 0$ gibt es dann $k_0, l_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_k - a| < \varepsilon$ für alle $k \geq k_0$ und $|a_l - b| < \varepsilon$ für alle $l \geq l_0$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ größer als k_0 und l_0 folgt der Widerspruch $2\varepsilon = |b-a| \leq |b - a_n| + |a_n - a| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$.

Ein Tipp am Rande: Merken Sie sich die Entwicklung der Skizze, mit der in der Vorlesung gearbeitet wurde. Diese Vorgehensweise ist typisch bei der Beantwortung ähnlicher Fragestellungen.

Im vorherigen Beispiel 3) gibt es unendlich viele Folgenglieder, die in jeder Umgebung von 1 liegen, trotzdem ist 1 kein Grenzwert dieser Folge.

Def 1.2 a heißt *Häufungspunkt* einer Folge (a_n) $:\iff$ In jeder Umgebung von a liegen unendlich viele Folgenglieder.

Beispiele: 1) 1 und -1 sind die Häufungspunkte der Folge $a_n := (-1)^n$.

2) Jede konvergente Folge besitzt den Grenzwert als Häufungspunkt.

3) Die Folge $(a_n) := n$ besitzt weder einen Grenzwert noch einen Häufungspunkt, da in jeder endlichen Umgebung jeder reellen Zahl nur endlich viele Folgenglieder liegen.

4) Die Folge $0, -1, 0, 1, -2, -1, 0, 1, 2, -3, \ldots, 3, -4, \ldots$ hat die abzählbar unendliche Menge $\mathbb{Z}$ als Menge der Häufungspunkte.

5) Was sind die Häufungspunkte der *Cantor–Folge*, mit der $\mathbb{Q}$ abgezählt wird?[4]

[3] Anders als bei der Wurst ist das Endstück bei Folgen unendlich lang!

[4] Einzelheiten siehe erstes Semester, Skript Seite 30.

Wir geben ein einfaches Kriterium für die Existenz von Häufungspunkten an.

Satz 1.2 Wenn in jeder Umgebung von a mindestens ein von a verschiedenes Folgenglied liegt, ist a Häufungspunkt der Folge.

Beweis: Zu zeigen ist, dass unter den gegebenen Voraussetzungen in jeder Umgebung von a unendlich viele Folgenglieder liegen.

Sei a_{n_1} ein Folgenglied mit $a_{n_1} \in U_\varepsilon(a),\ a_{n_1} \neq a$. Dann ist $\varepsilon_1 := |a_{n_1} - a| > 0$, nach Voraussetzung liegt auch in $U_{\varepsilon_1}(a)$ ein von a verschiedenes Folgenglied $a_{n_2} \neq a_{n_1}$. Auch in $U_{\varepsilon_2}(a)$ mit $\varepsilon_2 := |a_{n_2} - a| > 0$ liegt ein von a und a_{n_1}, a_{n_2} verschiedenes Folgenglied a_{n_3}, usw. In der (beliebig gewählten) Umgebung $U_\varepsilon(a)$ liegen somit die unendlich vielen Folgenglieder $a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots$, also ist a Häufungspunkt.

Satz 1.2 besagt nicht, dass a kein Häufungspunkt ist, falls die Voraussetzung nicht erfüllt ist, wie die Folge $(-1)^n$ zeigt. Ein Häufungspunkt (ebenso wie der Grenzwert) kann, muss aber nicht selbst Folgenglied sein.

Satz 1.3 Jede konvergente Folge besitzt genau einen Häufungspunkt.

Beweis: Da jeder Grenzwert auch Häufungspunkt ist, liegt mindestens ein Häufungspunkt a vor. Kein $b \in \mathbb{R}\backslash\{a\}$ kann ebenfalls Häufungspunkt sein, denn für $\varepsilon := \frac{|a-b|}{2} > 0$ liegen in $U_\varepsilon(b)$ nur endlich viele Folgenglieder.

Satz 1.3 besagt nicht, dass jede Folge mit genau einem Häufungspunkt konvergiert, wir geben hierzu weiter unten ein Beispiel an.

Manchmal findet man in der Literatur (leider) den Begriff der uneigentlichen Konvergenz:

Eine Folge (a_n) *konvergiert uneigentlich gegen* ∞ , falls es zu jeder reellen Zahl $r > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $a_n > r$ für alle $n \geq n_0$ gilt.

Analog sagt man: (a_n) *konvergiert uneigentlich gegen* $-\infty$, falls es zu jeder reellen Zahl $r < 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $a_n < r$ für alle $n \geq n_0$ gilt.

Wir schließen uns dieser Ausdrucksweise nicht an, sprechen statt dessen von *Divergenz gegen* $+\infty$ bzw. $-\infty$ und schreiben $a_n \to \infty$ oder $a_n \to -\infty$. Konvergenz bedeutet für uns immer die Existenz einer reellen Zahl als Grenzwert, und $\pm\infty$ sind keine reellen Zahlen.

Beispiele: 1) Für die Folge (a_n) mit $a_n = \sqrt{n}$ gilt $a_n \to \infty$. Denn: Es sei $r > 0$ eine beliebige reelle Zahl. Wir müssen ein $n_0 \in \mathbb{N}$ angeben, so dass $\sqrt{n} > r$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Wir wählen irgendeine natürliche Zahl $n_0 > r^2$. Für alle $n \geq n_0$ gilt dann $n > r^2$, woraus $a_n = \sqrt{n} > r$ folgt.

2) Die Folge $1, 2, 1, 3, 1, 4, 1, 5, 1, 6, 1, \ldots$ konvergiert weder eigentlich noch uneigentlich und besitzt genau einen Häufungspunkt.

2 Wie erkennt man konvergente Folgen? (1. Teil: Monotonie und Beschränktheit)

Bisher haben wir zum Nachweis der Konvergenz einen konkreten Grenzwert vermutet und diesen dann mit Hilfe der Definition überprüft. So eine Vorgehensweise ist in der Praxis nur selten möglich, da man häufig keinen Anhaltspunkt hat, welches der Grenzwert sein könnte, wie man an dem Beispiel $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ sieht. Wir können zwar vermuten – nachdem wir mühsam diverse Folgenglieder ausgerechnet haben – , dass die obige Folge (a_n) konvergent ist mit einem Grenzwert in der Nähe von 2.72, aber das hilft uns für den Nachweis der Konvergenz nicht weiter.[5]

Wir werden jetzt Methoden kennenlernen, mit deren Hilfe man in vielen Fällen entscheiden kann, ob eine Folge konvergent ist, ohne dass man den exakten Grenzwert erahnen muss.

Def 2.1 1) Eine Folge (a_n) heißt *monoton wachsend*, falls $a_n \le a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

2) Eine Folge (a_n) heißt *monoton fallend*, falls $a_n \ge a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

3) Eine Folge heißt *monoton*, falls sie monoton wachsend oder monoton fallend ist.

Gilt in 1) bzw. 2) $<$ statt $\le$ bzw. $>$ statt $\ge$ spricht man von *strenger* Monotonie. An Stelle von monoton wachsend sagt man auch monoton steigend.

Beispiele: 1) $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist streng monoton wachsend und $(\frac{1}{n})$ streng monoton fallend.

2) Gibt es Folgen, die monoton wachsend und gleichzeitig monoton fallend sind?

3) $a_n = \frac{3n+4}{2n+2}$ ist monoton fallend: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_n - a_{n+1} = \frac{3n+4}{2n+2} - \frac{3(n+1)+4}{2(n+1)+2} = \frac{(3n+4)(n+2) - (3n+7)(n+1)}{2(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2(n+1)(n+2)} > 0$$

Für Folgen, deren Glieder alle positiv sind, kann man Monotonie auch auf eine zweite Weise feststellen: (a_n) ist monoton wachsend [fallend], falls $\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1$ $[\le 1]$ ist:

Beispiel: $a_n = \frac{4n+3}{3n+2}$ ist monoton fallend:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{4n+7}{3n+5}}{\frac{4n+3}{3n+2}} = \frac{(4n+7)(3n+2)}{(3n+5)(4n+3)} = \frac{12n^2+29n+14}{12n^2+29n+15} < 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Wir wissen aus früheren Beispielen, dass monotone Folgen konvergent sein können, aber nicht müssen.[6] Für monotone Folgen mit Häufungspunkt gilt allerdings

Satz 2.1 Monotone Folgen mit Häufungspunkt sind konvergent.

Beweis: Wir haben zu zeigen, dass ein Grenzwert existiert. Sei a ein Häufungspunkt der oBdA monoton fallenden Folge (a_n). Für ein beliebiges (und damit jedes) $\varepsilon > 0$ gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $a_m \in U_\varepsilon(a)$. Wegen der vorausgesetzten fallenden Monotonie folgt $a_k \le a_m$ für alle $k \ge m$.

Beh.: $a \le a_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

[5] Einige Werte von (a_n): $a_5 = 2.48832$, $a_{10} = 2.593742460$, $a_{100} = 2.704813815$, $a_{1000} = 2.716923842$, $a_{10000} = 2.718145918$, $a_{1000000} = 2.718281828$

[6] Sie sollten jederzeit je ein Beispiel für eine konvergente monotone Folge und für eine divergente monotone Folge parat haben!

Bew.: Gäbe es ein $l \in \mathbb{N}$ mit $a_l < a$, so wäre wegen der Monotonie $a_j \leq a_l$ für alle $j \geq l$; für $\varepsilon_1 := a - a_l > 0$ gilt dann $a_j \notin U_{\varepsilon_1}(a)$ für alle $j \geq l$, a wäre nach Definition 1.3 kein Häufungspunkt.

Insgesamt gilt also $a \leq a_k \leq a_m < a + \varepsilon$ für alle $k \geq m$. Damit liegt in jeder ε–Umgebung von a ein Endstück der Folge, wir haben a als Grenzwert nachgewiesen.

Zusammen mit Satz 1.3 haben wir damit bewiesen

Satz 2.2 Monotone Folgen haben höchstens einen Häufungspunkt.

Weil die Existenz von Häufungspunkten und Grenzwerten nicht von den Anfangsgliedern einer Folge abhängt, gelten obige Aussagen natürlich auch für Folgen, die erst ab einem bestimmten Folgenglied monoton sind.

Wir kommen zu einer weiteren wichtigen Eigenschaft von Folgen.

Def 2.2 Eine Folge (a_n) heißt *beschränkt*, falls die Menge der Folgenglieder $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt ist, d.h., falls untere und obere Schranken existieren.

Beispiele: 1) $(\frac{1}{n})$ ist beschränkt, denn für alle Folgenglieder gilt $0 \leq \frac{1}{n} \leq 1$.

2) Für die Folge der natürlichen Zahlen gilt zwar ebenfalls $0 \leq n$, trotzdem ist diese Folge nicht beschränkt, weil es keine obere Schranke gibt.

3) $a_n = \frac{3n+4}{2n+2}$ ist beschränkt: 0 oder jede negative Zahl ist eine untere Schranke, wegen $\frac{3n+4}{2n+2} \leq \frac{4n+4}{2n+2} = 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist beispielsweise 2 eine obere Schranke.

Satz 2.3 Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Beweis: Sei $(a_n) \to a$. Wegen der Konvergenz gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_n \in U_1(a)$ für alle $n \geq n_0$. Für $t := \min\{a_1, \ldots, a_{n_0-1}, a-1\}$ und $s := \max\{a_1, \ldots, a_{n_0-1}, a+1\}$ gilt dann $t \leq a_n \leq s$ für alle Folgenglieder, (a_n) ist somit beschränkt.

Satz 2.4 Jede monotone und beschränkte reelle Folge ist konvergent.

Beweis: Es sei (a_n) oBdA eine monoton wachsende beschränkte Folge. Da (a_n) beschränkt ist, besitzt die Menge M der Folgenglieder eine kleinste obere Schranke $a = \sup M$.[7] Zu jedem $\varepsilon > 0$ ist dann $a - \varepsilon$ keine obere Schranke von M, d.h., es gibt eine natürliche Zahl k mit $a - \varepsilon < a_k$ (a_k ist das k–te Folgenglied). Da (a_n) monoton wachsend ist, folgt $a_k \leq a_n$ für alle $n \geq k$. Ferner gilt $a_n \leq a$ (da $a = \sup M$). Fassen wir diese Ungleichungen zusammen, so erhalten wir $a - \varepsilon < a_k \leq a_n \leq a$ für alle $n \geq k$. Damit haben wir nachgewiesen, dass $|a_n - a| = a - a_n < \varepsilon$ für alle $n \geq k$ gilt und $(a_n) \to a$ gezeigt.

Mit Hilfe dieses letzten Satzes und der Bernoullischen Ungleichung[8] weisen wir die Konvergenz von $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ nach:

Wir zeigen 1. (a_n) ist monoton wachsend und 2. (a_n) ist beschränkt.

[7] Die Existenz dieser Schranke, auch Supremum genannt, folgt aus der Vollständigkeit des Körpers der reellen Zahlen, die im ersten Semester angesprochen wurde. Einzelheiten hierüber findet man im Skript in Kapitel II.2 mit dem Titel Einige ordnungstheoretische Begriffe.

[8] Zur Erinnerung: Für alle reellen Zahlen $b \geq -1$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $(1+b)^n \geq 1 + nb$, nachzulesen im Skript (Satz I.5.5) auf Seite 21.

Zu 1: Wir zeigen für $n \geq 2$ $\quad a_{n-1} < a_n$, also $(1+\frac{1}{n-1})^{n-1} < (1+\frac{1}{n})^n$:

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad &\iff \quad \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} < \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \\
&\iff \quad \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n} < \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} \\
&\iff \quad \left(\frac{n^2}{(n-1)(n+1)}\right)^{n} < \frac{n}{n-1} \\
&\iff \quad \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n} < \frac{n}{n-1} \\
&\iff \quad \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{n} > \frac{n-1}{n} \\
&\iff \quad \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n} > 1-\frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung folgt aus der Bernoullischen Ungleichung für $b = -\frac{1}{n^2}$.

Zu 2: Wir zeigen $a_n < 3$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Hierzu berechnen wir $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ nach dem binomischen Lehrsatz[9]:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \qquad (*)$$

Für $1 \leq k \leq n$ gilt:

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!\,n^k} = \frac{1}{k!}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{n-k+1}{n} \leq \frac{1}{k!} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k} \leq \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Wenn wir dies in $(*)$ einsetzen und die geometrische Summenformel benutzten, erhalten wir

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}} = 1+\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k = 1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 1+2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 3$$

Es gilt $a_n < 3$ für alle n. Da $a_1 = 2$ ist, folgt wegen der Monotonie $2 \leq a_n < 3$ für alle n. (a_n) ist monoton und beschränkt, also nach Satz 2.4 konvergent.

Den Grenzwert der Folge $(1+\frac{1}{n})^n$ ist die nach *L. Euler* (1707–1783) benannte *Eulersche Zahl* e. 1728 wurde e von Euler zur Bezeichnung der Basis des natürlichen Logarithmus verwendet. Man kann zeigen, dass e keine rationale Zahl ist. Die ersten Stellen der Dezimalbruchdarstellung von e lauten

$$e = 2.71828182845904\ldots$$

Wir fassen unser derzeitiges Wissen in einem Schema zusammen:

[9] Diesen Satz findet man im Skript als Satz II.6.3. auf Seite 45.

$$\begin{tikzcd}
\text{beschränkt?} \arrow[r, "\text{ja}"] \arrow[dr, "\text{nein}"] & \text{monoton?} \arrow[r, "\text{ja}"] \arrow[dr, "\text{nein}"] & \underline{\textit{konvergent}} \\
& \underline{\textit{divergent}} & \textit{???}
\end{tikzcd}$$

3 Wie erkennt man konvergente Folgen? (2. Teil: Grenzwertsätze)

Wir wollen weitere Methoden und Hilfsmittel kennenlernen, um Folgen erfolgreich auf Konvergenz untersuchen zu können. Zunächst beschäftigen wir uns mit Nullfolgen, die wir bereits in einem früheren Abschnitt kennengelernt haben. Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden wir statt $\lim\limits_{n\to\infty}\ldots$ häufig die kürzere Version $\lim\ldots$ verwenden.

Satz 3.1 Sei (a_n) eine beliebige Folge, $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt

1) $a_n \to a \iff a_n - a \to 0$
2) $a_n \to 0 \implies a \cdot a_n \to 0$
3) $a_n \to a \implies |a_n| \to |a|$

Beweisidee: 1) folgt unmittelbar aus der Definition der Konvergenz.

2) Sei $a \neq 0$ (sonst fertig). Wir geben uns ein beliebiges $\varepsilon > 0$ vor. Zu $\frac{\varepsilon}{|a|} > 0$ existiert wegen $a_n \to 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n| < \frac{\varepsilon}{|a|}$. Für alle $n \geq n_0$ gilt dann

$$|a \cdot a_n - 0| = |a \cdot a_n| = |a| \cdot |a_n| < |a| \cdot \frac{\varepsilon}{|a|} = \varepsilon$$

Also ist 0 der Grenzwert der Folge $a \cdot a_n$.

3) folgt direkt aus der Konvergenz und aus $||a_n| - |a|| \leq |a_n - a|$. [10]

Frage: Was ist mit „$\Leftarrow$“ in den Teilen 2) und 3) von Satz 3.1?

Satz 3.2 (Einschließungssatz):

Es seien $(a_n), (b_n), (c_n)$ Folgen mit $a_n \leq b_n \leq c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Folgen (a_n) und (c_n) seien konvergent mit gleichem Grenzwert $\lim a_n = \lim c_n = g$. Dann gilt auch $\lim b_n = g$.

Beweis: Wegen $\lim a_n = \lim c_n = g$ gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ Zahlen n_1, n_2, so dass $|a_n - g| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_1$ und $|c_n - g| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_2$ gilt. Wir vergleichen für alle $n \geq n_0 := \max\{n_1, n_2\}$ die Glieder der Folge b_n mit g. Für $b_n \geq g$ ist $|b_n - g| = b_n - g \leq c_n - g \leq |c_n - g| < \varepsilon$ und für $b_n < g$ gilt $|b_n - g| = g - b_n \leq g - a_n \leq |a_n - g| < \varepsilon$.

Beispiel: Sei $b_n := \frac{1}{n} \cdot \sin(n)$. Da $|\sin(x)| \leq 1$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt, können wir $a_n := \frac{-1}{n}$ und $c_n := \frac{1}{n}$ wählen. Diese Folgen konvergieren gegen Null, also auch (b_n).

Das letzte Beispiel ist ein Spezialfall von folgendem allgemeineren Sachverhalt:

[10] Einzelheiten zum Rechnen mit Beträgen findet man im Skript auf Seite 25.

Satz 3.3 Sei (a_n) eine Nullfolge und (b_n) beschränkt. Dann ist auch $(a_n \cdot b_n)$ eine Nullfolge.

Beweis: Sei $k > 0$ eine Schranke von (b_n) mit $-k \leq b_n \leq k$ für alle Folgenglieder von (b_n). Zu $\frac{\varepsilon}{k} > 0$ ($\varepsilon > 0$ ist beliebig) gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n| < \frac{\varepsilon}{k}$ für alle $n \geq n_0$. $\implies$ $|a_n \cdot b_n - 0| = |a_n \cdot b_n| = |a_n| \cdot |b_n| < \frac{\varepsilon}{k} \cdot k = \varepsilon$.

Beispiel: Die Folge (c_n) mit $c_n := \frac{n!}{n^n}$ ist eine Nullfolge: Wegen $c_n = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{2}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{n}\right)$ ist $c_n = a_n \cdot b_n$ mit $a_n = \frac{1}{n}$ und $b_n = \left(\frac{2}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{n}\right)$ (es sei $b_1 = 1$). Hierbei ist a_n eine Nullfolge und b_n wegen $|b_n| = |\frac{2}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{n}| \leq 1$ beschränkt.

Wenn sich Folgen durch Addition oder Multiplikation aus einfacheren Folgen zusammensetzen, kann man häufig Aussagen über Konvergenz oder Divergenz machen:

Satz 3.4 (Rechenregeln für konvergente Folgen; Grenzwertsätze):

Es gelte $(a_n) \to a$ und $(b_n) \to b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Dann folgt:

1) $(a_n + b_n) \to a + b$
2) $(a_n \cdot b_n) \to a \cdot b$
3) $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$, falls $b_n \neq 0$ für alle n und $b \neq 0$.
4) $a \leq b$, falls $a_n \leq b_n$ für alle n.

Beweis zu 1): Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wegen $(a_n) \to a$ und $(b_n) \to b$ gibt es ein n_1 mit $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n_1$ und ein n_2 mit $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n_2$. Es folgt für alle $n \geq \max\{n_1, n_2\}$: $|a_n + b_n - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Zu 2): $(a_n - a)$ und $(b_n - b)$ sind Nullfolgen (Satz 3.1), (b_n) ist beschränkt (Satz 2.3). Damit sind auch $((a_n - a)b_n)$ und $((b_n - b)a)$ Nullfolgen (Satz 3.3). Nach 1) ist dann $a_n b_n - ab = (a_n - a)b_n + (b_n - b)a$ ebenfalls eine Nullfolge und die Behauptung $a_n b_n \to ab$ folgt erneut aus Satz 3.1.

Zu 3): Aus Satz 3.1 folgt $|b_n| \to |b|$, ferner ist $|b - b_n| \geq |b| - |b_n|$. Zu $\varepsilon := \frac{|b|}{2} > 0$ existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|b_n| > |b| - \varepsilon = |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2}$ $\iff$ $\frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|b|}$. Wir untersuchen die Folge $\left(\frac{1}{b_n}\right)$:

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b - b_n}{b_n b}\right| = \frac{1}{|b_n||b|} \cdot |b - b_n| < \frac{2}{|b|^2} \cdot |b - b_n| \to 0$$

Die Folge $\left(\frac{1}{b_n}\right)$ konvergiert gegen $\frac{1}{b}$, wir erhalten die Behauptung mit Hilfe von 2):

$$\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n} \to a \cdot \frac{1}{b}$$

zu 4): Dieser Beweis ist einfach und wird eventuell als Übung behandelt.

Mit der Schreibweise $\lim a_n = a$ sehen die Grenzwertsätze so aus:

1) $\lim (a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$
2) $\lim (a_n \cdot b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n$
3) $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}$, falls $b_n \neq 0$ für alle n und $\lim b_n \neq 0$.
4) $\lim a_n \leq \lim b_n$, falls $a_n \leq b_n$ für alle n.

In 4) kann übrigens $\leq$ nicht durch $<$ ersetzt werden! Es lassen sich weitere Regeln angeben, die $(b_n) \to \infty$ oder $(b_n) \to -\infty$ behandeln, zum Beispiel

5) Gilt $a_n \to a$ für $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ und $b_n \to \infty$, so folgt $\lim (a_n b_n) = \begin{cases} \infty, & \text{falls} \quad a > 0 \\ -\infty, & \text{falls} \quad a < 0 \end{cases}$

6) Ist a_n beschränkt und $b_n \to \infty$ oder $b_n \to -\infty$, so folgt $\lim \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = 0$.

Beispiele: 1) Gesucht ist $\lim \frac{2n-1}{3n^2+n-2}$. Anwendung von Regel 3) hilft zunächst nicht weiter, da Zähler und Nenner gegen ∞ streben. Klammert man in Zähler und Nenner n aus (höchste gemeinsam vorhandene Potenz von n), so erhält man

$$\frac{2n-1}{3n^2+n-2} = \frac{n(2-\frac{1}{n})}{n(3n+1-\frac{2}{n})} = \frac{2-\frac{1}{n}}{3n+1-\frac{2}{n}}$$

Anwendung der Regeln 1), 2), 5) und 6) ergibt den Grenzwert 0.

2) $\lim \left(\frac{2n^3+n-4}{-3n^2+1}\right) = \lim \left(\frac{n^2}{n^2} \cdot \frac{2n+\frac{1}{n}-\frac{4}{n^2}}{-3+\frac{1}{n^2}}\right) = -\infty$ (Regeln 1), 2), 5))

3) $\lim \left(\frac{2n^3+n-4}{3n^3-5}\right) = \lim \frac{2+\frac{1}{n^2}-\frac{4}{n^3}}{3-\frac{5}{n^3}} = \frac{2}{3}$. (Regeln 1), 2), 3))

Allgemein gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_k n^k + \alpha_{k-1} n^{k-1} + \ldots + \alpha_1 n + \alpha_0}{\beta_l n^l + \beta_{l-1} n^{l-1} + \ldots + \beta_0} = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad k < l \\ \frac{\alpha_k}{\beta_l} & \text{falls} \quad k = l \\ +\infty \text{ oder } -\infty & \text{falls} \quad k > l, \end{cases}$$

wobei das Vorzeichen von ∞ mit dem von $\frac{\alpha_k}{\beta_l}$ übereinstimmt[11]. Ein eigentlicher Grenzwert existiert genau dann, wenn der höchste Grad des Zählerpolynoms nicht größer als der des Nennerpolynoms ist.

Frage: Sei $a_n \to a$ und $b_n \to b$. Was weiß man über Folgen (c_n) und (d_n), falls der Zusammenhang $a_n = b_n + c_n + d_n$ besteht?

Der nächste Satz hat direkt nichts mit Folgen zu tun. Er gehört zur Abteilung „nützliche Ungleichungen" und ist auch für sich alleine betrachtet interessant.

Satz 3.5 (Geometrisches Mittel $\leq$ Arithmetisches Mittel)

Für positive reelle Zahlen a, b gilt $\sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2}$

Beweis:

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \iff ab \leq \frac{(a+b)^2}{4} \iff 4ab \leq a^2 + 2ab + b^2 \iff 0 \leq (a-b)^2$$

Beispiel: $8 = \sqrt{4 \cdot 16} < \frac{4+16}{2} = 10$.

[11] unter der stillschweigenden Voraussetzung $\alpha_k \neq 0 \neq \beta_l$

Frage: Wann gilt in Satz 3.5 die Gleichheit?

Wir wollen unser Wissen auf die rekursiv definierte Folge $a_{n+1} := \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$ mit $a_1 := 2$ anwenden:

1. Durch Induktion ist klar, dass $a_n > 0$ für alle Folgenglieder gilt.

2. Nach Satz 3.5 ist $\sqrt{2} = \sqrt{a_k \frac{2}{a_k}} \leq \frac{1}{2}\left(a_k + \frac{2}{a_k}\right) = a_{k+1}$. Unabhängig von a_1 gilt somit für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$

$$a_n \geq \sqrt{2} \implies a_n^2 \geq 2 \implies a_n \geq \frac{2}{a_n}, \text{ also } a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) \leq \frac{1}{2}\left(a_n + a_n\right) = a_n$$

3. Da die Folge beschränkt ($0 < a_n \leq \max\{a_1, a_2\}$) und monoton fallend ist (zumindest ab dem zweiten Folgenglied), ist sie nach Satz 2.4 konvergent. Den Grenzwert g können wir mit Hilfe der Grenzwertsätze ausrechnen, denn die Folgen (a_{n+1}) und (a_n) haben natürlich den gleichen Grenzwert:

$g = \frac{1}{2}\left(g + \frac{2}{g}\right) \implies g = \sqrt{2}.$

Es gilt allgemein, dass jede Folge (a_n), definiert durch ein beliebiges $a_1 > 0$ und $a_{n+1} := \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right)$ für $a \geq 0$ gegen $\sqrt{a}$ konvergiert. Mit Hilfe dieser Folge kann man Quadratwurzeln näherungsweise berechnen. Liegt der Startwert a_1 in der Nähe der gesuchten Wurzel, klappt das Verfahren schnell und gut.

Beispiel: Beginnt man zur Bestimmung von $\sqrt{2}$ mit $a_1 = 1.5$, so stimmt a_3 auf drei und a_4 bereits auf acht Stellen hinter dem Dezimalpunkt mit dem wahren Wert überein.

Auch in dem einführenden Beispiel im Kapitel 0 hatten wir einen Grenzwert vermutet, jetzt können wir unsere Vermutung belegen. Da die Folge der Einwohnerzahlen beschränkt und monoton wachsend ist, muss ein Grenzwert existieren, den wir mit Hilfe der Grenzwertsätze wie angegeben bestimmen können. Unsere Rechnung ist allerdings nur bei Vorliegen eines Grenzwertes sinnvoll.

4 Teilfolgen und der Satz von Bolzano–Weierstraß

Auch ohne eine strenge mathematische Definition hat man vermutlich eine richtige Vorstellung von Teilfolgen. Endstücke sind spezielle Teilfolgen. Wir wollen an dieser Stelle den Begriff Teilfolge „mathematisch sauber“ einführen.

Def 4.1 Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge. Ist $(n_1, n_2, n_3, \ldots)$ eine streng monoton wachsende Folge von natürlichen Zahlen, so heißt $(a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots)$ eine *Teilfolge* von (a_n).

Um eine Teilfolge zu erhalten, darf man Glieder aus einer Folge entfernen. Es müssen nur unendlich viele Glieder in unveränderter Reihenfolge übrigbleiben.

Beispiele: 1) $(2n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Teilfolge der Folge der natürlichen Zahlen.

2) Welches sind *alle* Teilfolgen von $(1, 2, 1, 1, 1, \ldots)$?

Im Gegensatz zum letzten Beispiel hat eine Folge normalerweise unendlich viele verschiedene Teilfolgen. Es gilt sogar

Satz 4.1 Eine Folge mit paarweise verschiedenen Gliedern besitzt überabzählbar viele Teilfolgen.

Beweis:[12] OBdA sei $\mathbb{N}$ die Menge der Folgenglieder. Jede Teilfolge entspricht dann bijektiv einer unendlichen Teilmenge von $\mathbb{N}$. Sei U die Menge dieser unendlichen Teilmengen. Wenn wir die Menge der endlichen nicht leeren Teilmengen von $\mathbb{N}$ mit E bezeichnen, gilt $\operatorname{Pot}\mathbb{N} = U \cup E \cup \{\emptyset\}$.

Beh.: E ist abzählbar.

Bew.: Es ist $E = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ mit $A_n := \{M \subseteq \mathbb{N} \mid |M| = n\}$. Für jedes n ist eine surjektive Abbildung $g_n : \mathbb{N}^n \to \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ durch $g_n((x_1, x_2, \ldots, x_n)) := \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ definiert. Daher können wir A_n als Teilmenge des kartesischen Produktes $\mathbb{N}^n$ auffassen. Da $\mathbb{N}^n$ abzählbar ist, ist auch jede der Mengen A_n abzählbar. Für jede natürliche Zahl n gibt es also eine Bijektion $f_n : \mathbb{N} \to A_n$. Als letzte Abbildung betrachten wir jetzt

$$f : \begin{cases} \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \to & E \\ (n, m) & \mapsto & f_m(n) \end{cases}$$

Nach Konstruktion ist f surjektiv, also ist E abzählbar.

$\operatorname{Pot}\mathbb{N}$ ist überabzählbar, also muss U nach dem soeben Bewiesenen ebenfalls überabzählbar sein.

Jetzt wollen wir uns mit Eigenschaften von Teilfolgen beschäftigen.

Satz 4.2 Sei (a_n) eine konvergente Folge. Dann konvergiert auch jede Teilfolge (gegen den gleichen Grenzwert).

Beweisidee: Es handelt sich um eine direkte Folgerung aus der Konvergenzdefinition. Die genaue Formulierung ist eine einfache Übungsaufgabe.

Satz 4.3 a ist ein Häufungspunkt einer Folge (a_n) $\iff$ Es gibt eine Teilfolge von (a_n), die gegen a konvergiert.

Beweis: „$\Rightarrow$“: Es sind zwei Fälle möglich:

1. Fall: a tritt unendlich oft als Folgenglied auf. Dann ist $b_n := a$ die gesuchte Teilfolge.

2. Fall: a tritt höchstens endlich oft als Folgenglied auf. Da in jeder Umgebung des Häufungspunktes a unendlich viele Folgenglieder liegen müssen, gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein Folgenglied $a_{n_1} \neq a$ mit $a_{n_1} \in U_\varepsilon(a)$. Wir setzen $b_1 := a_{n_1}$. Auch in $U_{\varepsilon_1}(a)$ mit $\varepsilon_1 := |a - a_{n_1}|$ gibt es unendlich viele von a verschiedene Folgenglieder: Sei $b_2 := a_{n_2} \in U_{\varepsilon_1}(a)$ mit $n_2 > n_1$. Dieses Verfahren setzen wir fort und erhalten so eine Teilfolge (b_n), die nach Konstruktion gegen a konvergiert.

„$\Leftarrow$“: Weil in jeder ε–Umgebung von a fast alle Glieder einer Teilfolge liegen, ist natürlich auch die Häufungspunkt–Bedingung (für die Gesamtfolge) erfüllt.

Dass jede Teilfolge einer beschränkten Folge ebenfalls beschränkt und jede Teilfolge einer monotonen Folge ebenfalls monoton ist, ist unmittelbar einsichtig. Nicht auf der Hand liegend ist dagegen die Aussage des nächsten Satzes, zu dessen Beweis wir noch einen neuen Begriff benötigen.

Def 4.2 Sei (a_n) eine beliebige Folge. Ein Folgenglied a_k heißt *Hochpunkt* [*Tiefpunkt*] von (a_n) $:\iff$ $a_k > a_n$ $[a_k < a_n]$ $\forall n > k$.

[12] Dieser Beweis für mathematische Feinschmecker wird in der Vorlesung nicht durchgeführt und ist nicht prüfungsrelevant. Einzelheiten zum Thema Abzählbarkeit findet man beispielsweise im Skript im Abschnitt II.3 Folgen und (Über)abzählbarkeit ab Seite 28.

Man beachte, dass die Eigenschaft, Hoch– oder Tiefpunkt zu sein, ausschließlich von den Folgengliedern mit höheren Indizes abhängt.

Beispiele: Jedes Folgenglied der Folge $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ ist Hochpunkt; konstante Folgen besitzen keine Hoch– und auch keine Tiefpunkte. Ob die Folge $a_n := \sin(n)$ Hoch– oder Tiefpunkte besitzt, ist auf den ersten Blick nicht feststellbar.

Satz 4.4 Jede Folge besitzt eine monotone Teilfolge.

Beweis: Jede Folge besitzt entweder unendlich viele oder nur endlich viele Hochpunkte.

1. Fall: Es gibt unendlich viele Hochpunkte. Dann bildet die Folge dieser Hochpunkte eine (streng) monoton fallende Teilfolge.

2. Fall: Es gibt nur endlich viele Hochpunkte $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_k}$. Sei $k := \max\{n_1, \ldots, n_k\}$; falls die Folge überhaupt keinen Hochpunkt besitzt, setzen wir $k := 0$. Dann ist $b_1 := a_{k+1}$ kein Hochpunkt, also gibt es eine natürliche Zahl $k' > k + 1$ mit $a_{k'} \geq a_{k+1}$. Auch $b_2 := a_{k'}$ ist kein Hochpunkt, denn es gibt ein $k'' > k'$ mit $a_{k''} \geq a_{k'}$. Wir setzen $b_3 := a_{k''}$, usw..

Die so konstruierte Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine monoton wachsende Teilfolge.

Der Beweis des letzten Satzes ist ein reiner Existenzbeweis. So wissen wir jetzt, dass beispielsweise die beschränkte Folge $(\sin(n))$ eine monotone Teilfolge besitzen muss, explizit angeben können wir sie aber nicht!

Eine wichtige Konsequenz aus Satz 4.4 ist der nächste Satz, der nach dem „Vater der Epsilontik“ *Karl Weierstraß* (1815–1897) und nach *Bernhard Bolzano* (1781–1848) benannt wurde.

Satz 4.5 (Satz von Bolzano – Weierstraß)

Jede beschränkte reelle Folge besitzt mindestens einen Häufungspunkt.

Beweis: Nach Satz 4.4 besitzt jede Folge eine monotone Teilfolge, die wegen der Beschränktheit der Ausgangsfolge ebenfalls beschränkt sein muss. Nach Satz 2.4 ist jede monotone und beschränkte reelle Folge konvergent. Nach Satz 4.3 ist der Grenzwert (dieser Teilfolge) Häufungspunkt der Ausgangsfolge, was zu zeigen war.

Der Satz von Bolzano – Weierstraß kann auch ganz anders bewiesen werden:

Alternativer Beweis: Sei (a_n) eine beschränkte Folge mit unterer Schranke u_1 und oberer Schranke o_1; alle Folgenglieder liegen also im Intervall $[u_1, o_1]$.[13] Sei $t := \frac{u_1+o_1}{2}$. In mindestens einem Intervall $[u_1, t]$ oder $[t, o_1]$ müssen unendlich viele Folgenglieder liegen, sei oBdA $[u_1, t]$ dieses Intervall. Wir definieren $u_2 := u_1$ und $o_2 := t$ und führen die gleichen Überlegungen wie oben für das Intervall $[u_2, o_2]$ durch.

Wir erhalten auf diese Weise eine Folge von Intervallen $[u_n, o_n]$ mit den Eigenschaften:

1) Jedes Intervall enthält unendlich viele Folgenglieder.

2) (u_n) ist eine monoton wachsende, (o_n) eine monoton fallende Folge.

3) Wegen $u_1 \leq u_n < o_n \leq o_1$ sind die Folgen (u_n) und (o_n) beschränkt.

[13] Wir behandeln hier nur den interessanten Fall $u_1 < o_1$. (Warum ist $u_1 = o_1$ uninteressant?)

Nach den bekannten Sätzen sind die Folgen (u_n) und (o_n) konvergent, es sei $u_n \to u$ und $o_n \to o$.

Wir betrachten jetzt die Folge $d_n := o_n - u_n = \frac{1}{2}(o_{n-1} - u_{n-1}) = \frac{1}{2^{n-1}}(o_1 - u_1)$, die auf Grund der Grenzwertsätze ebenfalls konvergent sein muss. Wie man entweder sofort sieht oder aus den Übungen weiß, gilt $d_n \to 0$. Dies ist nur möglich, wenn die Grenzwerte der Folgen (u_n) und (o_n) übereinstimmen, es gilt also $u = o =: h$.

In einem letzten Schritt zeigen wir jetzt, dass dieser gemeinsame Grenzwert h der „Schrankenfolgen" ein gesuchter Häufungspunkt der Ausgangsfolge (a_n) ist. Sei hierzu $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben. Nach Definition des Grenzwertes gibt es $n_1, n_2 \in \mathbb{N}: \ u_{n_1}, o_{n_2} \in U_\varepsilon(h)$. Für $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$ gilt dann $[u_{n_0}, o_{n_0}] \subset U_\varepsilon(h)$. Da in diesem Intervall unendlich viele Folgenglieder von (a_n) liegen, ist h ein Häufungspunkt von (a_n).

Frage: Wie hätte man u_2 und o_2 definieren müssen, wenn man zu Beginn des alternativen Beweises angenommen hätte, dass unendlich viele Folgenglieder im Intervall $[t, o_1]$ stecken?

Manchmal wird der Satz von Bolzano – Weierstraß auch folgendermaßen formuliert:

Satz 4.5' Jede beschränkte reelle Folge enthält eine konvergente Teilfolge.

Beweis: Satz 4.5 und Satz 4.3

5 Das Cauchysche Konvergenzprinzip

Leider ist nicht jede beschränkte Folge monoton, so dass unser Schema vom Ende des zweiten Abschnitts nicht immer zu einer Entscheidung zum Konvergenzverhalten führen kann.

Beispiel: Sei $a_n := \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$. Diese Folge ist beschränkt, denn für alle Folgenglieder gilt $\frac{1}{2} \leq a_n \leq 1$, sie ist aber nicht monoton. Ist sie konvergent?

Wir werden jetzt ein von der Monotonie unabhängiges Kriterium kennenlernen, das in der Welt der reellen Zahlen stets entscheidet, ob eine Folge konvergent oder divergent ist. Es ist nach *Augustin Louis Cauchy* (1789 – 1857) benannt.

Def 5.1 Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *Cauchyfolge* $:\Longleftrightarrow$

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}: \quad |a_n - a_m| < \varepsilon \quad \forall n, m \in \mathbb{N},\ n, m \geq n_0$$

Man vergleiche diese Definition mit der Definition der Konvergenz (Def. 1.1)!

Satz 5.1 Jede konvergente Folge ist eine Cauchyfolge.

Beweis: Sei a der Grenzwert der zu untersuchenden Folge (a_n), sei $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben. Dann gibt es auch zu $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n_0$. Für $n, m \geq n_0$ gilt dann

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Also ist jede konvergente Folge auch eine Cauchyfolge.

Für Konvergenzuntersuchungen interessanter ist die umgekehrte Richtung.

Satz 5.2 (Cauchysches Konvergenzkriterium)

In $\mathbb{R}$ konvergiert eine Folge genau dann, wenn sie eine Cauchyfolge ist.

Beweis: Die einfach zu beweisende Richtung „$\Longrightarrow$“, die übrigens auch gilt, falls ausschließlich mit rationalen Zahlen gearbeitet wird, haben wir bereits mit Satz 5.1 erledigt.

„$\Longleftarrow$ “: Wir zeigen zuerst, dass jede Cauchyfolge beschränkt sein muss.

Zu $\varepsilon = 1$ gibt es ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a_m| < 1$ für alle $n, m \geq n_1$, also insbesondere

$$|a_n| = |a_n - a_{n_1} + a_{n_1}| \leq |a_n - a_{n_1}| + |a_{n_1}| < 1 + |a_{n_1}| \qquad \text{für alle } n \geq n_1.$$

Mit $s := \max\{|a_i|, 1 + |a_{n_1}| \mid i < n_1\}$ gilt dann $-s \leq a_n \leq s$ für alle Folgenglieder, daher ist jede Cauchyfolge beschränkt.

Als nächstes benutzen wir den Satz von Bolzano – Weierstraß in der Version von Satz 4.5’, der besagt, dass innerhalb der reellen Zahlen jede beschränkte Folge eine konvergente Teilfolge besitzt, wir bezeichnen deren Grenzwert mit a.

Beh.: a ist Grenzwert der Cauchyfolge (a_n).

Bew.: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben. Da (a_n) eine Cauchyfolge ist, gibt es zu $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n, m \geq n_0$. Zu diesem n_0 existiert ein $n_2 \in \mathbb{N}$ mit $|a_{n_2} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ und $n_2 > n_0$. (Dies folgt direkt aus der Konvergenz der Teilfolge.)

Für jedes $n > n_0$ gilt nun

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{n_2}| + |a_{n_2} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Somit ist $a_n \to a$ nachgewiesen.

Das Cauchysche Konvergenzkriterium ist *notwendig und hinreichend*, da es stets zu einer Entscheidung führt. Man kann dieses Kriterium anwenden, auch wenn man keine Ahnung hat, welchen konkreten Wert der vermutete Grenzwert besitzt. Leider liefert das Kriterium nicht diesen konkreten Wert und erfordert häufig umfangreiche und komplizierte Rechnungen.

Wie verschiedene andere Sätze auch, gilt das Cauchysche Konvergenzprinzip nicht im Bereich der rationalen Zahlen, da die Vollständigkeit der reellen Zahlen eine wichtige Rolle spielt. Innerhalb $\mathbb{Q}$ gibt es Cauchyfolgen, die keinen rationalen Grenzwert besitzen, Beispiele hierfür sind bereits bei früherer Gelegenheit (*wo*?) gegeben worden.

Wir wollen jetzt mit Hilfe des Cauchyschen Konvergenzkriteriums überprüfen, ob die zu Beginn dieses Kapitels erwähnte Folge $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$ konvergent ist. Zu zeigen ist:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \quad |a_n - a_m| < \varepsilon \quad \forall n, m \in \mathbb{N},\ n, m \geq n_0$$

Wir gehen oBdA von $m > n$ aus und setzen $m = n + l$. Dann gilt

$$\begin{aligned} a_{n+l} - a_n &= \sum_{k=1}^{n+l} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} \;=\; \sum_{k=n+1}^{n+l} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} \\ &= (-1)^{n+2} \frac{1}{n+1} + (-1)^{n+3} \frac{1}{n+2} + \cdots + (-1)^{n+l+1} \frac{1}{n+l} \\ &= (-1)^n \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + - \cdots + (-1)^{l+1} \frac{1}{n+l} \right) \;=\; (-1)^n \cdot A \end{aligned}$$

Der Ausdruck A kann auf zwei Arten berechnet werden:

$$\begin{array}{rcll} A & = & \left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}\right)+\cdots & > \ 0 \\ A & = & \frac{1}{n+1}-\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)-\cdots & \leq \ \frac{1}{n+1} \end{array}$$

Damit ist $|a_{n+l}-a_n| = |A| \leq \frac{1}{n+1}$. Zu einem beliebig vorgegebenen $\varepsilon > 0$ genügt jedes $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ der Cauchyschen Konvergenzbedingung: Für alle $n \geq n_0$ und $m = n+l \geq n_0$ ist $|a_m - a_n| \leq \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$ erfüllt.

Diese Folge ist somit als konvergent nachgewiesen. Um den exakten Grenzwert zu bestimmen, ist allerdings weiteres mathematisches Wissen nötig. Wir merken uns ohne Beweis: $\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{1}{k} \to \ln 2$.

6 Drei Beispiele

I. Wir wollen uns ein wenig mit (Zinses)zinsrechnung beschäftigen. Wenn ein gewisses Kapital K mit p Prozent verzinst wird, erhält man bei jährlicher Verzinsung am Ende des ersten Jahres

$$Z_1 = \frac{K \cdot p}{100}$$

Zinsen. Mit $x := \frac{p}{100}$ besitzt man nach einem Jahr ein Kapital

$$K_1 = K + Z_1 = K(1+x)\ .$$

Beispiel: 1000 Euro ergeben bei 10 Prozent Zinsen nach einem Jahr $K_1 = 1000\left(1+\frac{1}{10}\right) = 1100$ Euro.

Frage: Wie groß ist K_1 bei halbjährlicher Verzinsung, wenn der Zinssatz pro Jahr p Prozent beträgt?

Antwort: Nach einem halben Jahr erfolgt eine Zinszahlung von $Z_{\frac{1}{2}} = K \cdot \frac{x}{2}$, dieser Betrag wird am Ende des Jahres erneut verzinst:

$$K_1 = K + Z_{\frac{1}{2}} + Z_1 = K + K\cdot\frac{x}{2} + \left(K + K\cdot\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{x}{2} = \ \ldots \ = K\left(1+\frac{x}{2}\right)^2$$

Beispiel: Im Gegensatz zur jährlichen Verzinsung besitzen wir bei ansonsten gleichem Anfangskapital und Zinssatz wie im ersten Beispiel am Ende des ersten Jahres $K_1 = 1000\left(1+\frac{1}{20}\right)^2 = 1102.50$ Euro.

Wir werden in der Vorlesung monatliche, tägliche und ständige Verzinsung behandeln. (*Frage*: Sprengt ständige Verzinsung die Bank?) Um die Ergebnisse *gemeinsam* erarbeiten zu können, werden sie im Skript nicht vorweggenommen.

II. Eine aktuelle *Frage*: Wie wirken sich Investitionen auf die Volkswirtschaft aus?[14]

Ein Unternehmen hat den Vorteil von Investitionen erkannt und steckt K Euro (beispielsweise zur Erneuerung von Maschinen) in die Firma, d.h., K Euro wandern in die Geldtaschen von Maschinenbauern, Transporteuren, Installateuren, usw.. Durch die Investition hat sich das Volkseinkommen zunächst um K Euro erhöht.

[14] Weitere Angaben zu diesem Beispiel findet man in dem *Lehrbuch der Analysis I* von *H. Heuser.*

Unter der Annahme, dass alle produzierenden und konsumierenden Mitglieder einer Volkswirtschaft einen festen Bruchteil $q \in]0,1[$ ihres Einkommens für Verbrauchsgüter benutzen, werden jetzt von den Empfängern der K Euro ihrerseits insgesamt $q \cdot K$ Euro zusätzlich ausgegeben. Die Empfänger dieses Betrages erhöhen ihre Ausgaben ebenfalls, und zwar um $q^2 \cdot K$ Euro, usw..

Nachdem der n–te Empfänger zusätzlich $q^n \cdot K$ Euro in die (Volks)wirtschaft gesteckt hat, sind auf Grund der ursprünglichen Investition von K Euro insgesamt

$$K + q \cdot K + \ldots + q^n \cdot K = K \cdot \sum_{\nu=0}^{n} q^\nu = K \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad \text{Euro}$$

bewegt worden, um diesen Betrag hat sich das Volkseinkommen erhöht.

Frage: Was haben Zinseszins und das Volkseinkommen mit Folgen zu tun?

III. Wir wollen Folgen untersuchen, deren Verhalten nicht nur von einem Startwert a_1, sondern auch noch von einem festen *Parameter* α abhängen. Wir betrachten als *Beispiel* die Folge

$$a_{n+1} := \alpha \cdot a_n \cdot (1 - a_n) \qquad \text{mit } \alpha, a_1 \in \mathbb{R} \text{ fest vorgegeben}$$

und untersuchen zuerst einige Spezialfälle:

1) Für $a_1 = 0$ (bei beliebigem α) oder für $\alpha = 0$ (bei beliebigem a_1) handelt es sich um die konstante Nullfolge (zumindest ab a_2).

2) *Frage*: Was passiert bei $a_1 = 1$?

3) Für $\alpha = -1$ erhalten wir mit dem Startwert $a_1 = 2$ die konstante Folge 2,2,2,... .

4) *Frage*: Was passiert bei $\alpha = -1$, wenn wir mit $a_1 = -1$ oder $a_1 = 3$ beginnen?

Wir werden uns jetzt auf $\alpha \in]0,4[$ und $a_1 \in]0,1[$ beschränken.

Beh. 1: Für $\alpha \in]0,4[$ und $a_1 \in]0,1[$ ist stets $0 < a_n < 1$.

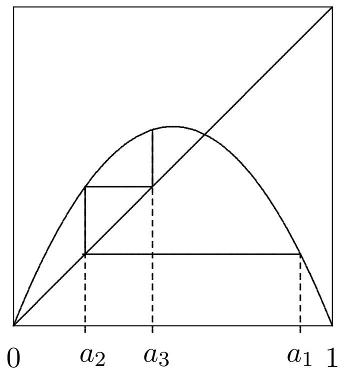
Bew.: Vollständige Induktion (Kurzform). Für $n = 1$ gilt $0 < a_1 < 1$ nach Voraussetzung.
$n \mapsto n+1$: Sei $0 < a_n < 1$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $a_n = \frac{1}{2} + x$ mit $|x| < \frac{1}{2}$, es folgt $0 < 1 - a_n < \frac{1}{2} - x$.

$$\Longrightarrow \; 0 < a_n(1 - a_n) = \left(\tfrac{1}{2} + x\right)\left(\tfrac{1}{2} - x\right) = \tfrac{1}{4} - x^2 \leq \tfrac{1}{4} \;\Longrightarrow\; 0 < a_{n+1} = \alpha\, a_n(1 - a_n) \leq \tfrac{\alpha}{4} < 1$$

Bei einem Startwert zwischen 0 und 1 liegt für $\alpha \in]0,4[$ eine beschränkte Folge vor, die nach Bolzano–Weierstraß mindestens einen Häufungspunkt haben muss.

Beh. 2: Für $\alpha \in]0,1]$ und $a_1 \in]0,1[$ ist (a_n) eine Nullfolge.

Bew.: Wir berechnen $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha a_n(1-a_n)}{a_n} = \alpha(1 - a_n) < 1$. Da nach Beh. 1 alle Folgenglieder positiv sind, liegt eine monoton fallende Folge vor, die nach Satz 2.4 konvergent ist. Für den Grenzwert g muss nach den Grenzwertsätzen gelten $g = \alpha \cdot g \cdot (1 - g)$. Außer für $g = 0$ ist diese Gleichung für $g = 1 - \frac{1}{\alpha} \leq 0$ erfüllt. Da aber alle Folgenglieder *positiv* sind, kann der Grenzwert nicht negativ sein. Somit kommt als Grenzwert nur 0 in Frage.



Für $\alpha > 1$ ist das Verhalten der Folge (a_n) nicht so einfach zu bestimmen, beispielsweise ist die Folge für $\alpha = \frac{5}{4}$ und Startwert $a_1 = \frac{9}{10}$ wegen $a_1 > a_2 < a_3$ (Rechnung!) nicht monoton. Bei der Kurve in der Zeichnung handelt es sich um den Graph der Funktion $f : [0,1] \to [0,1],\ f(x) := \alpha \cdot x \cdot (1-x)$ mit $\alpha = 2.5$. Wegen $a_1 > a_2 = f(a_1) < a_3 = f(a_2)$ ist die Folge (a_n) auch für dieses α nicht monoton.
Aus der Zeichnung kann man am Vorhandensein des Schnittpunktes der Kurve mit der Geraden $y = x$ auch die Gültigkeit der nächsten Behauptung ablesen:

Beh. 3: $\forall\, \alpha \in]1,4[\quad \exists\, a_1 \in]0,1[: \quad (a_n)$ ist konstant.

Bew.: Durch einfache Rechnung erhält man die Behauptung für $a_1 = 1 - \frac{1}{\alpha}$.

Beh. 4: Sei $\alpha = 2$. Dann gilt für jedes $a_1 \in]0,1[\quad a_n \to \frac{1}{2}$.

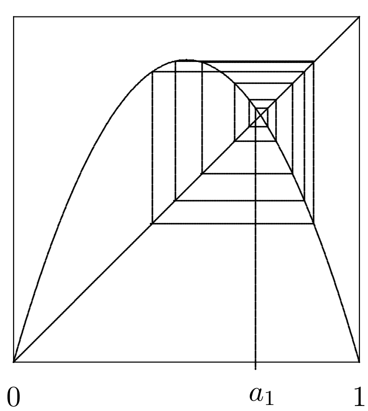
Bew.: Sei $a_1 = \frac{1}{2} + x$ mit $|x| < \frac{1}{2}$. Durch vollständige Induktion kann man

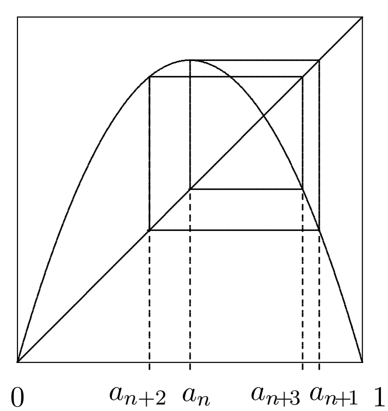
$$a_{n+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(2x)^{2^n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

zeigen.[15] Aus $|2x| < 1$ folgt dann $\lim\limits_{n\to\infty} (2x)^{2^n} = 0$, mit den Grenzwertsätzen erhalten wir die Behauptung $a_n \to \frac{1}{2}$.

Mit anderen Methoden kann man sogar für jedes $\alpha \in [1,3[$ die Konvergenz der a_n–Folge gegen $1 - \frac{1}{\alpha}$ für jedes $a_1 \in]0,1[$ beweisen. Ist $\alpha > 3$, gilt dies nicht mehr, wie man an den nächsten Bildern erkennen kann.

Verhalten der a_n–Folge für $\alpha = 3.5$ und $a_1 = 0.7$:



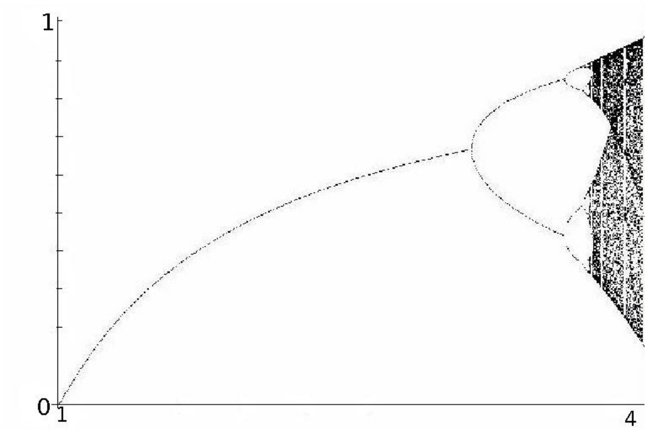


Im linken Bild wurden die Folgenglieder $a_2, \ldots, a_{12}$ berechnet, im rechten analog die vierzig Folgenglieder ab $n = 80$. Die aus der Zeichnung zu vermutende Existenz von vier Häufungspunkten lässt sich mathematisch exakt beweisen.

Man kann die Folge $a_{n+1} = \alpha \cdot a_n \cdot (1 - a_n)$ als Modell eines Insektenbiotops auffassen, wobei a_n die Population zum Zeitpunkt n bedeutet und α ein Umweltparameter ist. Es zeigt sich, dass in allen Biotopen

[15] Dies wird entweder in den Übungen oder in der Vorlesung erledigt.

mit α zwischen 1 und 3 eine stabile Insektenbevölkerung zu erwarten ist. Ist der Parameter zu klein, stirbt die Population aus. Ist er zu groß, kann die Insektenzahl von Jahr zu Jahr schwanken. Es kann sogar passieren, daß keine verlässliche Vorhersage mehr möglich ist. Die Abhängigkeit von α wird in dem letzten Bild verdeutlicht, in dem das Verhalten der Folge für unterschiedliche $\alpha \in [1,4]$ dargestellt wird.



Sogenannter „Feigenbaum“: Für verschiedene α (waagerecht von $\alpha = 1$ bis $\alpha = 4$) werden jeweils senkrecht die zugehörigen Folgenglieder a_n mit $100 < n < 200$ gezeichnet.

Jeder Startwert $a_1 \in]0,1[$ liefert ein ähnliches Bild, wenn ab einem hinreichend großen n_1 genügend viele Folgenglieder gezeichnet werden.

7 Reihen

In vorherigen Abschnitten haben wir manchmal reelle Folgen von spezieller Gestalt vorgefunden, die wir jetzt näher untersuchen wollen. Aus jeder gegebenen Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ lässt sich eine neue Folge $s_1, s_2, s_3, \ldots$ bilden, indem man jeweils die ersten Glieder der Folge (a_i) addiert:

$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2, \quad s_3 = a_1 + a_2 + a_3, \quad s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4, \quad \ldots$

Beispiel: Zur Folge (Z_i) der Zinsen im i–ten Zeitabschnitt gehört die Folge (S_i) der gesamten Zinseinnahmen nach i Zeiteinheiten, es ist $S_i = \sum\limits_{\nu=1}^{i} Z_\nu$.

Def 7.1 Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge. Dann heißt $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $s_n := \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ *(unendliche) Reihe* .

Beispiele: 1) Sei $a_n := 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die zugehörige Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ ist nichts anderes als die Folge der natürlichen Zahlen $1, 2, 3, \ldots$.

2) Sei $a_n := n$ mit $n \in \mathbb{N}$. Die zugehörige Reihe $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ ist die Folge $1,\ 1+2=3,\ 1+2+3=6, \ldots$ bzw. es gilt $s_n := \sum\limits_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

Eine Reihe $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die aus der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ entstanden ist, bezeichnet man meistens mit dem Symbol $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$. Die Folgenglieder $a_1, a_2, \ldots$ (Summanden der Reihe) werden auch als *Glieder* der Reihe bezeichnet. $s_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ heißt *n–te Partialsumme der Reihe.* Die Glieder einer Reihe können natürlich auch mit dem Index 0 oder einem anderen Index beginnen, ferner kann statt i jeder andere Buchstabe – beispielsweise k – gewählt werden.

Jede Reihe kann somit als Folge ihrer Partialsummen aufgefasst werden. Durch $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ wird keineswegs eine „unendliche Summe“ dargestellt, es handelt sich vielmehr um die übliche Bezeichnung für eine Reihe.

Wie jede Folge kann eine Reihe konvergent oder divergent sein. Konvergenz bei Reihen können wir uns folgendermaßen merken:

Def 7.2 Eine Reihe $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ heißt *konvergent*, wenn die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen konvergiert, d.h., wenn $(s_n) \to s$ für ein $s \in \mathbb{R}$ gilt. Hierfür schreibt man dann

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = s$$

Eine Reihe, die nicht konvergiert, heißt *divergent*.

Beispiele: Die Reihen $\sum\limits_{i=1}^{\infty} 1$ und $\sum\limits_{i=1}^{\infty} i$ (Beispiele 1)und 2) von oben) sind divergent. Die Konvergenz von $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^i$ wird in Kürze bewiesen.

Bitte unbedingt beachten: Das Zeichen $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ wird in zwei unterschiedlichen Bedeutungen verwendet: Einerseits steht $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ für eine Reihe, andererseits bezeichnet $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ den Grenzwert dieser Reihe — falls er existiert. Wenn verschiedene Reihen $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ und $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$ den gleichen Grenzwert besitzen, werden wir dies durch $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i = \sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$ ausdrücken, die Gleichheit zweier Reihen (also Übereinstimmung in *allen* Gliedern) wird in der Literatur häufig durch $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i \equiv \sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$ dargestellt.

Ein einfaches notwendiges Kriterium für Konvergenz von Reihen liefert der folgende Satz. Zur übersichtlicheren Schreibweise vereinbaren wir: Wenn eine Aussage nicht vom ersten Index abhängt, schreiben wir kurz $\sum a_i$.

Satz 7.1 $\sum a_i$ konvergent $\quad\Rightarrow\quad$ (a_n) Nullfolge

Beweis: Für jedes $n > 1$ gilt $a_n = s_n - s_{n-1}$. Aus der vorausgesetzten Konvergenz der Folge der Partialsummen $(s_n \to s)$ und den Grenzwertsätzen für Folgen erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0$$

Wichtig für Anwendungen ist die Umkehrung der Aussage dieses Satzes: Wenn (a_n) *keine* Nullfolge ist, kann die zugehörige Reihe *nicht* konvergent sein.

Beispiele: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2k+3}{7k+100}$ ist wegen $\frac{2k+3}{7k+100} \to \frac{2}{7} \neq 0$ garantiert divergent. Ob $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ konvergent oder divergent ist, können wir aus Satz 7.1 nicht erkennen.

Als nächstes sollen einige wichtige Reihen vorgestellt und untersucht werden.

Def 7.3 Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ heißt *harmonische Reihe.*

Die Glieder der harmonischen Reihe sind $a_1 = 1,\ a_2 = \frac{1}{2},\ a_3 = \frac{1}{3}, \ldots a_n = \frac{1}{n}, \ldots$, ihre Partialsummen $s_1 = 1,\ s_2 = 1 + \frac{1}{2},\ \ldots,\ s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \ldots$.

Satz 7.2 Die harmonische Reihe ist divergent.

Beweis: Wir fassen ihre Glieder wie folgt zusammen:
$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 + a_4 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$
$a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, \quad a_9 + \ldots + a_{16} > 8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2}.$
Wir stellen fest: Die Glieder der harmonischen Reihe lassen sich so bündeln, dass hinreichend viele aufeinander folgende Glieder addiert mindestens $\frac{1}{2}$ ergeben.
Wir schreiben diese Erkenntnis mathematisch exakt auf:

$$\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{1\} : \qquad \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} a_k \ > \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} \frac{1}{2^n} \ = \ 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n} \ = \ \frac{1}{2}.$$

Für die 2^n–te Partialsumme s_{2^n} erhalten wir damit

$$s_{2^n} = a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + \ldots + a_8) + \ldots + (a_{2^{n-1}+1} + \ldots + a_{2^n}) > 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2}}_{n\text{–mal}} = 1 + \frac{n}{2}$$

Aus $1 + \frac{n}{2} \to \infty$ folgt die Divergenz der Partialsummen, also ist die harmonische Reihe divergent.[16]

Die am Ende des Abschnittes über Cauchyfolgen als Beispiel untersuchte sogenannte *alternierende harmonische Reihe* $\sum (-1)^{i+1} \frac{1}{i}$ ist im Gegensatz zur harmonischen Reihe konvergent. Eine überraschende Konsequenz aus der Divergenz der harmonischen Reihe wird sich in den Übungen ergeben. Zunächst halten wir fest: Es gibt eine konvergente Reihe $\sum a_i$, deren Betragsreihe $\sum |a_i|$ divergent ist.

Die nächste Reihe beginnt mit dem Index $i = 0$:

Def 7.4 Sei $q \in \mathbb{R}$ gegeben. Dann heißt die Reihe $\sum\limits_{i=0}^{\infty} q^i$ *geometrische Reihe.*

Die geometrische Reihe ist uns ansatzweise bereits im vorherigen Kapitel begegnet. Sie ist eine der wichtigsten Reihen der Analysis, bereits die alten Griechen haben sich unbewusst mit ihr auseinandergesetzt, wie das Paradoxum vom Wettlauf zwischen Achill und einer Schildkröte zeigt (mehr dazu in der Vorlesung). Es sei versichert: Grundwissen über diese Reihe ist unabdingbar zum Bestehen späterer Prüfungen!

Satz 7.3 Die geometrische Reihe divergiert für $|q| \geq 1$ und konvergiert für $|q| < 1$, es gilt

$$\sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q} \qquad \text{für} \qquad |q| < 1.$$

Beweis: Für $|q| < 1$ folgt die Behauptung aus $s_n = \sum\limits_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ mit Hilfe der Grenzwertsätze wegen $|q|^{n+1} \to 0$. [17]

---

[16] Die harmonische Reihe strebt sehr langsam gegen ∞. Es ist beispielsweise $\sum\limits_{i=1}^{10000} \frac{1}{i} < 10$.

[17] Es handelt sich um eine Anwendung der geometrischen Summenformel, siehe Skript Seite 20 (Satz I.5.2).

Für $|q| \geq 1$ ist q^i keine Nullfolge, also liegt nach Satz 7.1 Divergenz vor.

Beispiele: $\sum\limits_{i=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^i = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$, $\quad \sum\limits_{i=0}^{\infty}(-\frac{1}{2})^i = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$, $\quad \sum\limits_{i=0}^{\infty}(\frac{4}{9})^i = \frac{1}{1-\frac{4}{9}} = \frac{9}{5}$, $\quad \sum\limits_{i=0}^{\infty}(\frac{3}{2})^i = \infty$,

$\sum\limits_{i=1}^{\infty}(\frac{2}{3})^i = \sum\limits_{i=0}^{\infty}(\frac{2}{3})^i - (\frac{2}{3})^0 = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} - 1 = 2$

Im Gegensatz zur harmonischen Reihe halten wir fest: Es gibt eine konvergente Reihe $\sum a_i$, deren Betragsreihe $\sum |a_i|$ ebenfalls konvergiert.

Def 7.5 Eine Reihe $\sum a_i$ heißt *absolut konvergent* $:\Longleftrightarrow$ $\sum |a_i|$ ist konvergent.

Beispiel: Die geometrische Reihe ist für $|q| < 1$ absolut konvergent.

Nicht jede konvergente Reihe ist absolut konvergent, aber die Umkehrung stimmt immer:

Satz 7.4 $\sum a_i$ absolut konvergent $\Rightarrow$ $\sum a_i$ konvergent

Beweis: Wir benutzen die verallgemeinerte Dreiecksungleichung[18]: Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n < m$ gilt

$$\left|\sum_{i=n+1}^{m} a_i\right| \leq \sum_{i=n+1}^{m} |a_i| = \left|\sum_{i=n+1}^{m} |a_i|\right|$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Da $\sum |a_i|$ nach Voraussetzung konvergiert, gilt für ein geeignetes $n_0 \in \mathbb{N}$ nach dem Cauchykriterium (siehe Satz 5.2)

$$\left|\sum_{i=1}^{n} |a_i| - \sum_{i=1}^{m} |a_i|\right| < \varepsilon \qquad \forall n, m \geq n_0$$

Insgesamt folgt (sei oBdA $n < m$)

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{m} a_i\right| = \left|\sum_{i=n+1}^{m} a_i\right| \leq \left|\sum_{i=n+1}^{m} |a_i|\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} |a_i| - \sum_{i=1}^{m} |a_i|\right| < \varepsilon$$

Satz 7.5 Die Reihe $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$ ist konvergent.

Beweis: Wir benutzen den Satz über monotone und beschränkte Folgen, wir haben also zu zeigen, dass die Partialsummen $s_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}$ eine monotone und beschränkte Folge bilden.

Beh. 1: $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend. *Bew*: Klar, da alle Summanden $\frac{1}{i^2}$ positiv sind.

Beh. 2: $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt. *Bew*: Für jedes $i > 2$ ist $\frac{1}{i^2} < \frac{1}{i(i-1)} = \frac{1}{i-1} - \frac{1}{i}$. Damit gilt

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} < 1 + \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{1}{i-1} - \frac{1}{i}\right) = 1 + 1 - \frac{1}{n} < 2\,.$$

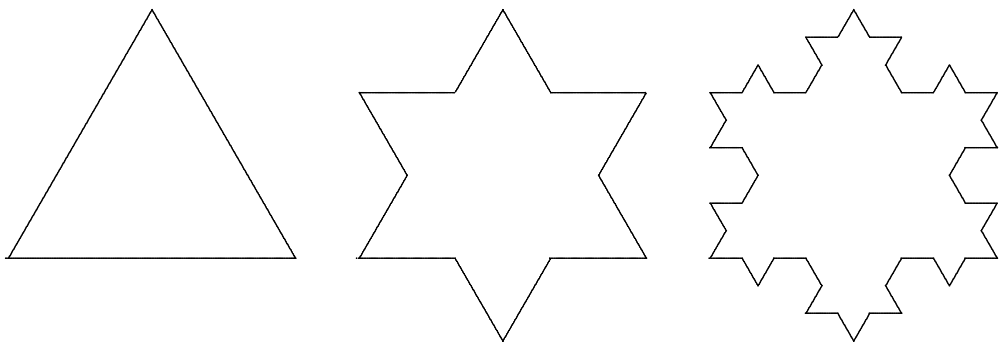
[18]Findet man im Skript als Satz II.1.6 auf Seite 26.

Die Folge (s_n) ist nach unten durch 0 und nach oben durch 2 beschränkt. Insgesamt folgt, dass die Reihe $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$ konvergiert. Den exakten Grenzwert können wir mit den uns zur Verfügung stehenden Mitteln allerdings nicht bestimmen.[19]

Wir beenden diesen Abschnitt mit einem Beispiel aus der Geometrie. Ausgangspunkt ist ein gleichseitiges Dreieck der Seitenlänge s. Wir konstruieren eine „Schneeflocke" nach folgender Iterationsvorschrift:

1) Drittel die vorhandenen Seiten
2) Errichte auf den mittleren Abschnitten gleichseitige Dreiecke mit der Spitze nach außen
3) Fahre fort mit 1)

Ausgangsdreieck und die ersten zwei Iterationen:



Frage: Wie groß werden Umfang und Flächeninhalt nach n Iterationen, wie steht es mit Konvergenz?

Zum Umfang: Der Umfang des Ausgangsdreiecks ist $U_0 = 3s$. Nach Vorschrift kommt bei jedem Schritt zu jeder Seite ein Drittel ihre Länge hinzu, also gilt $U_1 = 3 \cdot \frac{4}{3}s$ und allgemein

$$U_n = \frac{4}{3} \cdot U_{n-1} = \left(\frac{4}{3}\right)^n \cdot U_0$$

Wegen $\left(\frac{4}{3}\right)^n \to \infty$ folgt, dass der Umfang beliebig groß wird.

Zur Fläche: Der Flächeninhalt des Ausgangsdreiecks ist $F_0 = \frac{1}{2} \cdot s \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}s = \frac{\sqrt{3}}{4}s^2$. Bei der i–ten Iteration wird auf jeder existierenden Randstrecke ein neues gleichseitiges Dreiecke der Seitenlänge $\left(\frac{1}{3}\right)^i s = \frac{s}{3^i}$ und vom Flächeninhalt $D_i = \left(\frac{1}{9}\right)^i F_0$ errichtet. Jedes dieser Dreiecke macht aus einer alten Begrenzungsstrecke vier jeweils um den Faktor $\frac{1}{3}$ kürzere neue.

Wir zählen die bei jeder Iteration hinzukommenden Dreiecke:

Iteration	Anzahl neue Dreiecke
1.	3
2.	$4 \cdot 3$
3.	$4 \cdot (4 \cdot 3)$
$\vdots$	$\vdots$
$n.$	$4 \cdot (4^{n-2} \cdot 3) = 4^{n-1} \cdot 3$

[19]Der Grenzwert ist $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Nach n Schritten folgt für die Gesamtfläche F_n

$$F_n = F_0 + \sum_{i=1}^{n} 4^{i-1} \cdot 3 \cdot D_i = F_0 + 3 \sum_{i=1}^{n} 4^{i-1} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^i \cdot F_0 = F_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{3} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{4}{9}\right)^i\right)$$

Aus $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^i = \frac{9}{5}$ folgt $F_n \to F_0 \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{5}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{5} s^2$.

Diese sogenannte *von Koch – Schneeflocke* besitzt eine endliche Fläche mit einer unendlich langen Umrandung. Man kann außerdem durch elementargeometrische Überlegungen zeigen, dass sie vollständig in einem regelmäßigen Sechseck der Seitenlänge $\frac{\sqrt{3}}{3} s$ liegt.

Frage: Wieviel Prozent der Fläche dieses Sechsecks wird von der Schneeflocke eingenommen?

8 Einige Konvergenzkriterien für Reihen

Wir wollen einige Kriterien kennenlernen, mit denen man häufig die Konvergenz bzw. Divergenz von Reihen feststellen kann. Aus Gründen der Übersichtlichkeit bleiben wir bei der kurzen Schreibweise $\sum a_i$.

Selbstverständlich können die bekannten Konvergenzkriterien für Folgen ebenfalls für Reihen benutzt werden. Direkt aus den Grenzwertsätzen folgt beispielsweise

Satz 8.1 Es seien $\sum a_i$ und $\sum b_i$ konvergente Reihen; es sei $c \in \mathbb{R}$. Dann sind auch die Reihen $\sum ca_i$ und $\sum(a_i + b_i)$ konvergent, es gilt $\sum ca_i = c \sum a_i$ und $\sum(a_i + b_i) = \sum a_i + \sum b_i$.

Der folgende Satz wurde bereits im letzten Abschnitt als Satz 7.1 vorgestellt und bewiesen, lediglich aus Gründen der Vollständigkeit geben wir ihn an dieser Stelle noch einmal mit etwas anderen Worten an:

Satz 8.2 Konvergiert die Reihe $\sum a_i$, so gilt $\lim\limits_{i \to \infty} a_i = 0$.

Wie bereits erwähnt, handelt es sich um ein *notwendiges Kriterium* für die Konvergenz einer Reihe: Die Folge der Glieder einer konvergenten Reihe *muss* eine Nullfolge sein. Umgekehrt ist diese Bedingung aber keineswegs *hinreichend* für die Konvergenz, wie das Beispiel der harmonischen Reihe gezeigt hat.

Satz 8.3 (Majorantenkriterium)

Es sei $\sum b_i$ eine konvergente Reihe mit $b_i \geq 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Ist dann $\sum a_i$ eine Reihe mit $|a_i| \leq b_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$, so konvergiert auch die Reihe $\sum a_i$.

Beweis: $\sum |a_i|$ ist monoton wachsend und durch den Grenzwert von $\sum b_i$ nach oben beschränkt, also konvergent. Damit ist $\sum a_i$ nach Definition 7.5 absolut konvergent, aus Satz 7.4 folgt die Behauptung.

Die Reihe $\sum b_i$ heißt *konvergente Majorante* von $\sum a_i$.

Der Satz bleibt richtig, wenn die Voraussetzung $|a_i| \leq b_i$ nur für *fast alle* $i \in \mathbb{N}$ gefordert wird. [20]

[20] Zur Erinnerung: Fast alle bedeutet, dass nur endlich viele Ausnahmen zugelassen sind.

Mit Hilfe der Idee, die dem letzten Satz zu Grunde liegt, kann man manchmal auch die Divergenz von Reihen nachweisen:

Korollar (Minorantenkriterium)

Es sei $\sum c_i$ eine divergente Reihe mit $c_i \geq 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Ist dann $\sum a_i$ eine Reihe mit $a_i \geq c_i$ für fast alle $i \in \mathbb{N}$, so ist auch die Reihe $\sum a_i$ divergent.

Beweis: Sonst wäre $\sum a_i$ nach Satz 8.3 eine konvergente Majorante zur divergenten Reihe $\sum c_i$, ein Widerspruch.

Als *Beispiele* werden wir in der Vorlesung oder in den Übungen die Reihen $\sum \frac{2}{n}$, $\sum \frac{\sin(i)}{i^2}$, $\sum \frac{3}{5^k}$ auf Konvergenz oder Divergenz untersuchen.

Häufig kann Konvergenz oder Divergenz einer Reihe mit dem sogenannten *Quotientenkriterium* nachgewiesen werden. Hierbei wird die zu untersuchende Reihe mit der geometrischen Reihe verglichen.

Satz 8.4 (Quotientenkriterium)

Gegeben sei die Reihe $\sum a_i$ mit $a_i \neq 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

a) Die Reihe konvergiert, falls es ein $i_0 \in \mathbb{N}$ und ein $q \in \mathbb{R}$ gibt, so dass gilt

$$\left|\frac{a_{i+1}}{a_i}\right| \leq q < 1 \text{ für alle } i \geq i_0.$$

b) Die Reihe divergiert, falls es ein $i_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass gilt

$$\left|\frac{a_{i+1}}{a_i}\right| \geq 1 \text{ für alle } i \geq i_0.$$

Beweis: Zu a) Wir setzen $M = |a_{i_0}|$. Aus $|\frac{a_{i+1}}{a_i}| \leq q \iff |a_{i+1}| \leq |a_i|q$ folgt

$$|a_{i_0+1}| \leq |a_{i_0}|\, q = Mq, \quad |a_{i_0+2}| \leq |a_{i_0+1}|\, q \leq Mq^2, \quad |a_{i_0+3}| \leq |a_{i_0+2}|\, q \leq Mq^3, \quad \text{usw.}$$

Insgesamt gilt $|a_{i_0+j}| \leq Mq^j$ für jedes $j \in \mathbb{N}$. Jetzt kommt die geometrische Reihe in das Spiel: Die Reihe $\sum Mq^j = M \sum q^j$ ist wegen $|q| < 1$ eine konvergente Majorante der Reihe $\sum |a_{i_0+j}|$, d.h., die Reihe $\sum |a_{i_0+j}|$ ist konvergent. Da sich diese Reihe von $\sum |a_i|$ nur um endlich viele Glieder unterscheidet, ist $\sum |a_i|$ und damit nach dem Majorantenkriterium oder nach Satz 7.4 auch $\sum a_i$ konvergent.

Zu b) Aus $|\frac{a_{i+1}}{a_i}| \geq 1$ folgt $|a_{i+1}| \geq |a_i|$ (für alle $i \geq i_0$). Also gilt

$$0 < |a_{i_0}| \leq |a_{i_0+1}| \leq |a_{i_0+2}| \leq \cdots,$$

d.h., die a_i bilden keine Nullfolge. Damit ist $\sum a_i$ nach Satz 8.2 nicht konvergent.

Beispiele: 1) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{k!}$ ist konvergent:

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{\frac{3^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{3^k}{k!}}\right| = 3 \cdot \frac{1}{k+1} \leq \frac{3}{4} < 1 \qquad \forall k \geq 3 = k_0$$

2) Die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{k^5}{2^k}$ ist konvergent: Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{\frac{(k+1)^5}{2^{k+1}}}{\frac{k^5}{2^k}}\right| = \left|\frac{(k+1)^5 \cdot 2^k}{2^{k+1} \cdot k^5}\right| = \left|\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{k+1}{k}\right)^5\right| = \frac{1}{2} \cdot b_k \quad \text{mit } b_k = \left(\frac{k+1}{k}\right)^5$$

Da die Folge b_k gegen 1 konvergiert (Grenzwertsätze (!)), konvergiert $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$ gegen $\frac{1}{2}$. Damit findet man zu jedem $q \in]0.5\,,\,1[$ ein k_0, so dass die Voraussetzungen des Quotientenkriteriums erfüllt sind.

Wie wir gerade gesehen haben, kann man das Quotientenkriterium manchmal auch so anwenden:

Falls für eine Reihe $\sum a_i$ gilt

$$\lim_{i\to\infty} \left|\frac{a_{i+1}}{a_i}\right| < 1, \qquad \text{so konvergiert die Reihe,}$$

$$\lim_{i\to\infty} \left|\frac{a_{i+1}}{a_i}\right| > 1, \qquad \text{so divergiert die Reihe.}$$

Frage: Konvergiert oder divergiert die Reihe $\sum \frac{2^k}{k^7}$?

Leider führt das Quotientenkriterium nicht immer zum Ziel ($\lim \left|\frac{a_{i+1}}{a_i}\right| = 1 \Rightarrow$???). Obwohl für die harmonische Reihe alle Quotienten $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1$ sind, ist diese Reihe divergent. (Es gibt *kein* q mit den verlangten Eigenschaften); auch für die Reihe $\sum \frac{1}{i^2}$ werden wir vergeblich nach einem q suchen, trotz der bekannten Konvergenz!

Eng verwandt mit dem Quotientenkiterium ist das *Wurzelkriterium*, das wir ohne Beweis angeben:

Satz 8.5 (Wurzelkriterium)

a) Die Reihe $\sum a_i$ konvergiert, falls es ein $i_0 \in \mathbb{N}$ und ein $q \in \mathbb{R}$ gibt, so dass gilt

$$\sqrt[i]{|a_i|} \leq q < 1 \;\text{ für alle }\; i \geq i_0.$$

b) Die Reihe divergiert, falls es ein $i_0 \geq 0$ gibt, so dass gilt

$$\sqrt[i]{|a_i|} \geq 1 \;\text{ für alle }\; i \geq i_0.$$

Aus dem Wurzelkriterium lassen sich analoge Folgerungen wie aus dem Quotientenkriterium ziehen. Das Wurzelkriterium ist „besser“ als das Quotientenkriterium: Jeder „erfolgreiche“ Konvergenznachweis mit Hilfe des Quotientenkriteriums hätte auch mit dem Wurzelkriterium durchgeführt werden können, die umgekehrte Richtung gilt nicht:

Beispiel: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^k}{2^{k-1}}$ ist nach dem Wurzelkriterium wegen

$$\sqrt[k]{\frac{2+(-1)^k}{2^{k-1}}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt[k]{2(2+(-1)^k)} \leq \frac{1}{2}\sqrt[k]{6} \to \frac{1}{2} < 1$$

konvergent; mit dem Quotientenkriterium hätten wir keine Entscheidung treffen könnnen.

Satz 8.6 (Leibnizsches Kriterium, *G.W. Leibniz* (1646–1716))
Eine Reihe $\sum(-1)^i a_i$ ist konvergent, wenn (a_i) eine monotone Nullfolge ist.

Beweis: Sei oBdA $a_i \geq 0$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$ (ausnahmsweise fangen wir mit a_0 und s_0 an). Wir betrachten zunächst nur jede zweite Partialsumme $s_1 = a_0 - a_1$, s_3, $s_5, \ldots$, allgemein:

$$s_{2n+1} = (a_0 - a_1) + (a_2 - a_3) + (a_4 - a_5) + \ldots + (a_{2n} - a_{2n+1}).$$

Wegen $(a_i - a_{i+1}) \geq 0$ ist die Folge $s_1, s_3, s_5, \ldots$ monoton wachsend. Sie ist auch beschränkt; um dies einzusehen, klammern wir die Summe s_{2n+1} anders:

$$s_{2n+1} = a_0 - (a_1 - a_2) - (a_3 - a_4) - \ldots - (a_{2n-1} - a_{2n}) - a_{2n+1} \leq a_0.$$

Also ist $s_1, s_3, s_5, \ldots$ konvergent mit einem Grenzwert s. Wir müssen jetzt nur noch zeigen, dass die Folge der Partialsummen $s_0, s_2, s_4, \ldots$ gegen denselben Grenzwert s strebt: Es gilt $s_{2n+2} = s_{2n+1} + a_{2n+2}$. Mit Hilfe der Grenzwertsätze erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n+2} = \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} + \lim_{n\to\infty} a_{2n+2} = s + 0 = s.$$

Beispiele: $\sum(-1)^{i+1}\frac{1}{i}$ und $\sum(-1)^i\frac{1}{i}$ sind konvergent.

Reihen mit ständigem Vorzeichenwechsel heißen *alternierende Reihen.* Die Monotonie in den Voraussetzungen von Satz 8.6 darf nicht vernachlässigt werden, es gibt Reihen, die bis auf die Monotonie alle Voraussetzungen des Leibnizschen Kriteriums erfüllen, aber nicht konvergent sind.

Satz 8.7 Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ konvergent $\iff$ $x \in [-1, 1[$.

Beweis: Mit Hilfe des Quotientenkriteriums

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1} \cdot n}{(n+1) \cdot x^n}\right| = \frac{n}{n+1} \cdot |x| \to |x|$$

folgt die Konvergenz für $x \in]-1, 1[$ und die Divergenz für $|x| > 1$. Für $x = -1$ folgt die Konvergenz aus dem Leibnizkriterium, für $x = 1$ liegt die divergente harmonische Reihe vor.

Reihen der Gestalt $\sum a_i x^i$ heißen *Potenzreihen*, leider können wir aus Zeitgründen nicht näher auf sie eingehen. Die wichtigste Potenzreihe soll allerdings nicht unerwähnt bleiben:

Def 8.1 und **Satz 8.8** Die *Exponentialreihe* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ konvergiert für jede reelle Zahl x.

Beweis: Aus dem Quotientenkriterium folgt

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot x^n}\right| = \frac{1}{n+1} \cdot |x| \to 0$$

Wir geben ohne Beweis den Grenzwert der Exponentialreihe an:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x \qquad\qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Damit haben die Folge $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ und die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ den gleichen Grenzwert, es gilt allgemeiner

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \to e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\ ,$$

wobei die Exponentialreihe wesentlich schneller konvergiert als die entsprechende Folge.

Frage: Gibt es einen Zusammenhang zwischen Exponentialreihe und e–Funktion?

Reihen, deren Konvergenz aus dem Quotienten– oder Wurzelkriterium folgt, sind stets absolut konvergent. Konvergente Reihen, die nicht absolut konvergent sind (sogenannte bedingt konvergente Reihen), besitzen folgende erstaunliche Eigenschaft:

Satz 8.9 (Riemannscher Umordnungssatz, *B. Riemann* (1826–1866))

Sei a eine beliebige reelle Zahl. Dann gibt es zu jeder bedingt konvergenten Reihe eine Umordnung, die a als Grenzwert besitzt.

Einen (konstruktiven) Beweis findet man in dem lesenswerten *Lehrbuch der Analysis I* von *H. Heuser.* Für absolut konvergente Reihen gilt nahezu das Gegenteil: Egal, wie sehr man die Folgenglieder solcher Reihen „durcheinanderschüttelt“, stets erhält man den gleichen Grenzwert!

9 Grenzwerte von Funktionen

Den Begriff der *Funktion* oder *Abbildung* kennen wir bereits aus dem ersten Semester. Ab jetzt wollen wir *reelle* Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ mit Definitionsbereich $D = D(f) \subseteq \mathbb{R}$ näher untersuchen. $D(f)$ wird häufig ein Intervall sein, daher soll dieser Begriff zunächst „offiziell“ eingeführt werden.

Def 9.1 Es seien $a, b \in \mathbb{R}$. Die Mengen

$$\begin{array}{lcllcl} [a,b] & := & \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}, &]a,b[& := & \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}, \\ [a,b[& := & \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}, &]a,b] & := & \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\} \end{array}$$

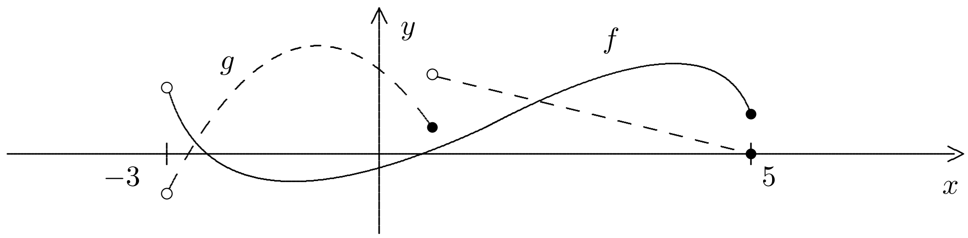
heißen *endliche Intervalle*; $[a,b]$ heißt *abgeschlossenes Intervall*, $]a,b[$ heißt *offenes Intervall*, $[a,b[$ und $]a,b]$ heißen *halboffene Intervalle.*

Lässt man für a oder b auch $-\infty$ oder ∞ zu, erhält man *unendliche* Intervalle, so ist beispielsweise $]-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le b\}$.

Frage: Wie kann man $\mathbb{R}$ als Intervall schreiben?

Zeichnerisch werden wir den *Graph* einer reellen Funktion wie üblich in einem rechtwinkligen Koordinatensystem mit x–Achse und y–Achse darstellen.

Beispiel: In der folgenden Skizze ist der Graph zweier Funktionen $f, g : \;]-3, 5] \to \mathbb{R}$ aufgemalt, die Bedeutung der schwarzen und weißen Kringel wird in der Vorlesung geklärt.



Nicht immer lassen sich Funktionen so einfach skizzieren.

Frage: Wie sieht der Graph der *Dirichletschen Funktion*, benannt nach *P.–G. Dirichlet, 1805–1859*, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := 1$ für rationales x und $f(x) = 0$ für $x \notin \mathbb{Q}$ aus?

Bisher haben wir uns um Grenzwerte von reellen Folgen und Reihen gekümmert, d.h., wir haben Grenzwerte der Art $\lim_{n\to\infty} a_n$ betrachtet. Jetzt wollen wir den Grenzwertbegriff auf Funktionen erweitern.

Def 9.2 Eine reelle Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ *hat an an der Stelle* $x_0 \in \mathbb{R}$ *den Grenzwert* $a \in \mathbb{R}$, geschrieben $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ oder $f(x) \to a$ für $x \to x_0$, $:\Longleftrightarrow$

(1) Es gibt eine Folge $(x_n) \to x_0$ mit $x_n \in D\backslash\{x_0\}$

(2) Für jede Folge aus (1) gilt $f(x_n) \to a$

Ob eine Funktion f an einer Stelle x_0 einen Grenzwert besitzt, hängt – siehe Bedingung (1) – nicht davon ab, ob und gegebenenfalls wie $f(x_0)$ definiert ist. Es muss lediglich in jeder ε–Umgebung von x_0 mindestens ein von x_0 verschiedenes Element des Definitionsbereichs der Funktion liegen; man sagt auch mathematisch vornehmer: x_0 muss ein Häufungspunkt von D sein. (Bitte nicht mit Häufungspunkt einer Folge verwechseln!)

Beispiele: 1) Die konstante Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die jede reelle Zahl auf 1 abbildet, hat an jeder Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ den Grenzwert 1:
Wegen $f(x_n) = 1 \;\forall x_n \in \mathbb{R}$ folgt für jede Folge $x_n \to x_0$ auch $f(x_n) = 1 \to 1$, und dies ist (zufällig) auch der Wert der Funktion an der Stelle x_0.

2) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$, also erneut $D(f) = \mathbb{R}$. f hat an jeder Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ den Grenzwert x_0^2; denn es gilt für jede Folge (x_n) mit $x_n \in D(f),\; x_n \neq x_0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n^2 = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} x_n = x_0^2, \;\text{ also } \lim_{x\to x_0} f(x) = x_0^2\,.$$

Zufälligerweise gilt auch hier $f(x_0) = x_0^2$, an jeder Stelle stimmen $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ und $f(x_0)$ überein. Dies ist nicht immer so, wie die nächsten Beispiele zeigen.

3) Sei $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } \; x = 0 \\ 1 & \text{für } \; x > 0 \end{cases}$$

Frage: Hat f an der Stelle $x_0 = 0$ einen Grenzwert?

Antwort: Sei (x_n) eine beliebige Nullfolge mit $x_n > 0$.[21] Es folgt $f(x_n) \to 1$, da (wegen $x_n \neq 0$) stets $f(x_n) = 1$ gilt. Also hat f an der Stelle $x_0 = 0$ den Grenzwert 1, obwohl $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1 \neq f(0)$ gilt!

4) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x > 0 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \\ -1 & \text{für} \quad x < 0 \end{cases}$$

Frage: Hat f an der Stelle $x_0 = 0$ einen Grenzwert?

Antwort: Wir betrachten die Folge (x_n) mit $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Es gilt $x_n \in D(f), \;\; x_n \neq 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Für die zugehörige Folge $(f(x_n))$ der Funktionswerte gilt

$$f(x_n) = \begin{cases} -1, & \text{falls} \quad n \text{ ungerade} \\ 1, & \text{falls} \quad n \text{ gerade} \end{cases}$$

Damit existiert $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ nicht, f hat an der Stelle $x_0 = 0$ keinen Grenzwert, obwohl $f(x_0)$ definiert ist.

5) Sei $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{x}$. Wir untersuchen, an welchen Stellen f einen Grenzwert hat.

1. Fall: $x_0 \neq 0$. Es sei (x_n) eine Folge mit $x_n \in D(f)$ (d.h. $x_n \neq 0$), und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Dann gilt nach alten Sätzen:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{x_0}, \text{ also } \lim_{x\to x_0} f(x) = \frac{1}{x_0}\ , \text{ der Grenzwert existiert.}$$

2. Fall: $x_0 = 0$. Wir vermuten (zum Beispiel durch Betrachten des zugehörigen Graphen), dass an dieser Stelle kein Grenzwert existiert. Dies beweisen wir, indem wir eine Folge gemäß (1) aus Definition 9.2 angeben, die *nicht* die Eigenschaft (2) dieser Definition erfüllt. Es sei $x_n := \frac{(-1)^n}{n}$. Da diese Folge gegen 0 konvergiert, aber die Folge $(f(x_n))$ nicht konvergiert (warum nicht?), hat die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ an der Stelle $x_0 = 0$ in der Tat keinen Grenzwert.

6) Zur Zeichnung auf Seite 142: Die Funktion f hat an jeder Stelle $x_0 \in [-3, 5]$ einen Grenzwert, während g an genau einer Stelle des abgeschlossenen Intervalls $[-3, 5]$ keinen Grenzwert besitzt (wo?).

Man kann Definition 9.2 auf uneigentliche Konvergenz/Divergenz ausdehnen, hierzu weitere *Beispiele*:

7) Sei $f :]0, 1[\to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) := \frac{1}{x}$. Dann gilt für $x \to 0 : \quad f(x) \to \infty$.

8) Sei $f : \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) := \frac{x+1}{x-1}$. Dann gilt für $x \to \infty : \quad f(x) \to 1$.

Frage: Was ist mit $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$?

Mit den folgenden Funktionen werden wir uns eventuell in den Übungen beschäftigen:

1) Wie verhält sich $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \left|\frac{1}{x}\right|$ an $x_0 = 0$?

2) Sei $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) := \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Existiert der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$?

3) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x \in \mathbb{Q} \\ x & \text{für} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$. An welchen Stellen hat f einen Grenzwert?

[21] Die Forderung $x_n > 0$ folgt aus der Vorgabe $x_n \in D\setminus\{0\}$.

4) Keine Funktion $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ hat an irgendeiner Stelle einen Grenzwert (warum ?).

Noch einmal zur Erinnerung: Für die Existenz eines Grenzwertes einer Funktion ist es völlig unerheblich, ob die betroffene Stelle zum Definitionsbereich der Funktion gehört oder nicht. Dies wird im nächsten Abschnitt über Stetigkeit anders sein. Dort werden wir feststellen: Die Frage, ob eine Funktion an einer Stelle stetig ist oder nicht, stellt sich ausschließlich für Werte des Definitionsbereichs.

10 Stetigkeit: Definition und Beispiele

Kehren wir für einen Augenblick zur Grenzwertdefinition 9.2 zurück. Zur Untersuchung, ob eine Funktion an einer Stelle x_0 einen Grenzwert besitzt, durften nur Werte $f(x_n)$ mit $x_n \neq x_0$ herangezogen werden. Die kann zu der ärgerlichen Konsequenz führen, dass ein existierender Grenzwert $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ nicht mit dem Funktionswert $f(x_0)$ übereinstimmt. Ab jetzt werden wir auf die Einschränkung $x_n \in D\backslash\{x_0\}$ verzichten und für x_n jeden Wert aus dem Definitionsbereich zulassen. Außerdem beschäftigen wir uns ab sofort nur noch mit Grenzwerten von reellen Funktionen *an Stellen des Definitionsbereiches.*

Def 10.1 Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion, $x_0 \in D(f)$. f heißt *stetig an der Stelle* x_0 $:\iff$ Für jede Folge (x_n) mit $x_n \in D(f)$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

f heißt *stetig auf* X (für $X \subseteq D(f)$), falls f an jeder Stelle $x_0 \in X$ stetig ist.

Statt *stetig an der Stelle* x_0 sagt man auch kürzer *stetig in* x_0. Ist eine Funktion f in $x_0 \in D(f)$ nicht stetig, nennt man f *unstetig* an der Stelle x_0 und x_0 eine *Unstetigkeitsstelle* von f. Dies bedeutet, dass es mindestens eine Folge (x_n) mit $x_n \in D(f)$ und $x_n \to x_0$ gibt, für die die zugehörige Folge der Funktionswerte $(f(x_n))$ entweder überhaupt nicht oder gegen einen Wert verschieden von $f(x_0)$ konvergiert.

In der Schule haben Sie eventuell gelernt, dass eine reelle Funktion genau dann stetig ist, wenn man ihren Graph ohne Unterbrechung zeichnen kann. Dies mag für alle Fälle, die dort behandelt werden, zutreffen, mathematisch exakt ist es aber nicht! Wir werden später Beispiele kennenlernen, die diese Problematik deutlich machen.

Beispiele: 1) Die konstante Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, d.h., $f(x) = c$ für alle $x \in \mathbb{R}$, ist für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ stetig; denn für jede Folge (x_n) mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} c = c = f(x_0)\ .$$

2) Die identische Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := x$ ist stetig auf $\mathbb{R}$, da für jede Folge (x_n) mit $x_n \to x_0$ gilt:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} x = x_0 = f(x_0)\ .$$

Die nächsten beiden Beispiele sind bereits im 9. Abschnitt behandelt worden:

3) Die Funktion $f(x) = x^2$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.

4) Die Funktion $f : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x = 0 \\ 1 & \text{für} \quad x > 0 \end{cases}$ ist an der Stelle $x_0 = 0$ unstetig. Um dies nachzuweisen, müssen wir eine Folge $x_n \to 0$ angeben, deren Bildfolge $f(x_n)$ nicht gegen $f(0) = 0$ konvergiert. Ein brauchbarer Kandidat für unsere Zwecke ist die Folge $x_n := \frac{1}{n}$, da zwar $\frac{1}{n} \to 0$ gilt, aber $f\left(\frac{1}{n}\right) \equiv 1$ nicht den Grenzwert 0 besitzt.

5) Da die Funktion $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ an der Stelle $x_0 = 0$ nicht definiert ist, ist sie an dieser Stelle weder stetig noch unstetig.

Frage: Ist die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) := \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}$ an der Stelle $x_0 = 0$ stetig?

6) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x \in \mathbb{Q} \\ x & \text{für} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ hat nur an der Stelle $x_0 = 1$ einen Grenzwert. An dieser Stelle ist sie auch stetig, da $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ und $f(1)$ übereinstimmen.

Wir stellen fest: Es gibt auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktionen, die nur in genau einem Punkt stetig sind.

Frage: Gibt es reelle Funktionen, die an genau zwei $(3, 4, \ldots n$, abzählbar vielen) Stellen stetig sind?

Wir vergleichen ein letztes Mal die Definitionen 9.2 (Grenzwert einer Funktion) und 10.1 (Stetigkeit) und stellen fest: Im Gegensatz zum Grenzwert
– ist Stetigkeit oder Unstetigkeit ausschließlich an Stellen des Definitionsbereichs möglich
– müssen bei Untersuchungen zur Stetigkeit auch Folgen $(x_n) \to x_0$ mit Folgengliedern $x_n = x_0$ berücksichtigt werden.

Diese Unterschiede führen zu folgendem merkwürdigen Verhalten:

Beispiele: 7) Jede Funktion $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ ist überall stetig (denn nur konstante Folgen erfüllen die Voraussetzung $x_n \to x_0$), hat aber an keiner Stelle einen Grenzwert (da es keine Folge $(x_n) \to x_0$ mit $x_n \neq x_0$ gibt).

8) Die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(0) := 0$ und $g(x) = 1$ sonst hat an der Stelle 0 den Grenzwert 1, ist dort wegen $f(0) = 0$ aber nicht stetig.

Zum Glück werden wir uns im Folgenden nicht weiter mit solchen patologischen Fällen auseinandersetzen. Keine Probleme dieser Art gibt es bei Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: Hier merken wir uns:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ ist an der Stelle } x_0 \text{ stetig} \iff \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)\ .$$

Sind f und g reelle Funktionen mit den Definitionsbereichen $D(f)$ und $D(g)$, so versteht man unter $f + g$ die Funktion mit Definitionsbereich $D(f) \cap D(g)$, definiert durch

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x)$$

Analog definiert man $f - g,\ f \cdot g,\ \frac{f}{g}$ mit $D(\frac{f}{g}) = D(f) \cap \{x \in D(g) \mid g(x) \neq 0\}$.

Satz 10.1 f und g seien stetig an der Stelle x_0. Dann gilt:

(a) $f + g,\ f - g,\ f \cdot g$ sind stetig an der Stelle x_0.

(b) $\frac{f}{g}$ ist stetig an der Stelle x_0, falls $g(x_0) \neq 0$ gilt.

Beweis: Es sei (x_n) eine Folge mit $x_n \in D(f) \cap D(g)$ und $x_n \to x_0$.[22] Wegen der Stetigkeit von f und g folgt $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ und $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$. Aus den Rechenregeln für Grenzwerte erhalten wir

$$\lim_{x \to x_0} (f+g)(x) = \lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) = f(x_0) + g(x_0) = (f+g)(x_0) .$$

Also ist $f+g$ an der Stelle x_0 stetig. Analog zeigt man die übrigen Behauptungen des Satzes (Beweis als Übungsaufgabe empfohlen).

Def 10.2 a) Ein *Polynom p vom Grad n* ist eine Funktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \quad \text{mit} \quad a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \text{ und } a_n \neq 0.$$

b) Eine Funktion r heißt *rationale Funktion* $:\Longleftrightarrow$ $r(x) := \frac{p(x)}{q(x)}$ mit Polynomen p und q.

Der Definitionsbereich einer rationalen Funktion r ist in der Regel $D(r) = \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) \neq 0\}$. Als eine unmittelbare Folgerung aus Satz 10.1 und den ersten Beispielen erhält man:

Satz 10.2 a) Polynome sind auf $\mathbb{R}$ stetig.

b) Rationale Funktionen sind auf ihrem Definitionsbereich stetig.

Beispiel: $f : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}$, gegeben durch $f(x) := \frac{x+1}{x-1}$, ist im ganzen Definitionsbereich stetig.

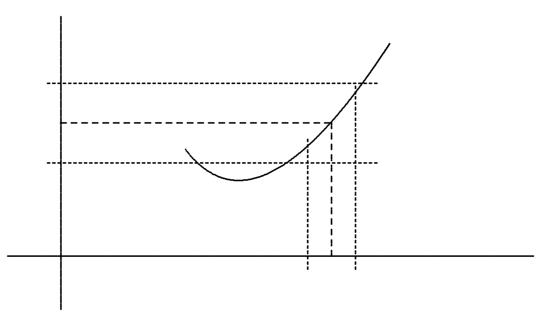
Will man untersuchen, ob f an einer Stelle x_0 stetig ist, muss man nicht ihren gesamten Definitionsbereich $D(f)$ im Auge haben. Wichtig ist nur, wie sich f in einem beliebig kleinen offenen Intervall I mit $x_0 \in I$ verhält. Man sagt daher auch, dass Stetigkeit eine *lokale Eigenschaft* einer Funktion ist. Mit anderen Worten: Ob f in x_0 stetig ist, hängt nicht von f insgesamt, sondern nur vom Verhalten von f in der unmittelbaren Nähe von x_0 ab.

Stetigkeit in einem Punkt kann man daher auch folgendermaßen ausdrücken:

Satz 10.3 Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist in $x_0 \in D$ stetig $\Longleftrightarrow$

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \delta \text{ gilt } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Hierzu wird die folgende Skizze in der Vorlesung beschriftet:



Bevor wir diesen Satz beweisen, formulieren wir die Aussage noch einmal (nahezu) ohne mathematische Zeichen: Stetigkeit an der Stelle x_0 bedeutet, dass man zu jeder (ε–)Umgebung um $f(x_0)$ eine

[22] Beachten Sie: Die Aussage „Es sei (x_n) eine Folge mit ...“ bedeutet, dass *alle* Folgen im Sinne der Stetigkeitsdefinition untersucht werden.

(δ–)Umgebung um x_0 angeben kann, so dass die Bilder aller Zahlen aus der Umgebung um x_0 innerhalb der Umgebung von $f(x_0)$ liegen.

Beweis: „$\Leftarrow$“: Zu zeigen ist: $x \to x_0 \;\Rightarrow\; f(x) \to f(x_0)$:

Gegeben sei eine beliebige Folge $(x_n) \to x_0$ und ein beliebiges $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt: $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Zu diesem δ wiederum gibt es wegen der Konvergenz von (x_n) ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x_0| < \delta$ für alle $n \geq n_0$.

$$\Rightarrow \;\; |f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon \qquad \forall\, n \geq n_0$$

Also konvergiert $f(x_n)$ gegen $f(x_0)$.

„$\Rightarrow$“: Zu zeigen ist: $\forall \varepsilon > 0 \ldots$, vorausgesetzt ist die Stetigkeit von f in x_0.

Wir gehen indirekt vor und nehmen an, die Behauptung ist falsch. Das bedeutet:

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \delta, \text{ aber } |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

Mit anderen Worten: Es gibt mindestens eine Folge $x_n \to x_0$ (denn: $\forall \delta > 0 \; \exists x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$), deren Bildfolge $f(x_n)$ *nicht* gegen $f(x_0)$ konvergiert (denn: $\exists \varepsilon > 0 \; \ldots \; |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$). Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung der Stetigkeit in x_0, damit ist der Satz bereits bewiesen.

Mit Hilfe von Satz 10.3 können wir Stetigkeit an einer Stelle x_0 auf eine zweite Art nachweisen. Wir wollen dies an einigen Beispielen üben, wobei der Definitionsbereich in allen Fällen $\mathbb{R}$ ist.

Beispiele: 1) Jede konstante reelle Funktion f ist in jedem $x_0 \in \mathbb{R}$ stetig: Wegen $|f(x) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$ genügt jedes $\delta > 0$ der Bedingung von Satz 10.3.

2) $f(x) = 2x$ ist ebenfalls überall stetig: Für jedes $\varepsilon > 0$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt

$$|f(x) - f(x_0)| = 2|x - x_0| < \varepsilon \iff |x - x_0| < \frac{\varepsilon}{2} =: \delta$$

Das gesuchte δ hängt in diesem Beispiel von ε, nicht aber von x_0 ab.

3) $f(x) = x^2$ ist in $x_0 = 0$ stetig: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben. Wegen

$$|f(x) - f(0)| = |x^2| < \varepsilon \iff |x| < \sqrt{\varepsilon}$$

erfüllt $\delta := \sqrt{\varepsilon}$ die Stetigkeitsbedingung, denn für alle $x \in D(f)$ mit $|x - 0| < \delta = \sqrt{\varepsilon}$ ist $|f(x) - f(0)| < \varepsilon$.

Für den Nachweis der Stetigkeit in $x_0 = 3$ reicht $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ nicht aus. Für jedes $0 < \varepsilon < 1$ und $x = 3 + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}$ ist zwar $|x - 3| = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} < \sqrt{\varepsilon}$, aber $|f(x) - f(3)| = 3 \cdot \sqrt{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{4} > 3 \cdot \sqrt{\varepsilon} > \varepsilon$. Trotzdem ist f auch in $x_0 = 3$ stetig. Zum Nachweis benötigt man ein „besseres“ δ, beispielsweise $\delta = \min\{1, \sqrt{9 + \varepsilon} - 3\}$. Wir verzichten auf die explizite Durchführung und merken uns nur, dass im Allgemeinen das gesuchte δ von ε *und* der zu untersuchenden Stelle x_0 abhängt.

4) $f(x) = 0$ für $x < 0$ und $f(x) = 1$ für $x \geq 0$ ist an der Stelle $x_0 = 0$ nicht stetig: Zu $\varepsilon = \frac{1}{2}$ gibt es wegen $|f(x) - f(0)| = |0 - 1| = 1 > \varepsilon$ für alle $x < 0$ garantiert kein δ mit der geforderten Eigenschaft.

Wir merken uns: Stetigkeit in x bedeutet, dass man zu jeder Umgebung V um $f(x)$ immer eine Umgebung U um x findet mit $f(U) \subset V$.

Unstetigkeit in x bedeutet demnach: Es gibt eine Umgebung V um $f(x)$, zu der keine Umgebung U um x mit $f(U) \subset V$ existiert. Mit anderen Worten: In jeder noch so kleinen Umgebung von x finden wir ein schwarzes Schaf, dessen Funktionswert nicht in V liegt.

In vielen Büchern wird Stetigkeit mit Hilfe von Satz 10.3 *definiert* und unsere Definition 10.1 als dazu äquivalente Aussage bewiesen.

Wir beenden diesen Paragraphen mit zwei Problemen, deren Lösungen nicht unmittelbar einsichtig sind.

1) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \notin \mathbb{Q} \ \text{ und für } x = 0 \\ \frac{1}{q} & \text{für} \quad x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}\backslash\{0\} \quad \text{ mit } p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \text{ teilerfremd} \end{cases}$$

Frage: An welchen Stellen ist f stetig?

Antwort: f ist unstetig für $x_0 \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$, denn in jeder δ – Umgebung von x_0 liegen irrationale Zahlen mit $f(x) = 0$. Somit ist die $\varepsilon - \delta$ – Bedingung für kein ε mit $0 < \varepsilon < f(x_0)$ erfüllt.

Hingegen ist f stetig für $x_0 \notin \mathbb{Q}$ und für $x_0 = 0$: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $0 < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Da es nur endlich viele $x \in [x_0 - 1, x_0 + 1]$ gibt mit $f(x) \geq \frac{1}{n_0}$, existiert $\alpha := \min\{|x - x_0| \mid f(x) \geq \frac{1}{n_0}\} > 0$. Wir können dieses α als δ im Sinne von Satz 10.3 benutzen: Zu jedem $\varepsilon > 0$ haben wir ein $\delta (= \alpha) > 0$ gefunden, so dass für alle x mit $|x - x_0| < \delta$ gilt: $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

2) In der Anschauungsebene $\mathbb{R}^2$ sei das Dreieck ABC mit $A = (-1, 0)$, $B = (1, 0)$ und $C = (0, 1)$ und ein fester Punkt $P = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ mit $p_2 \neq 0$ gegeben. Wir definieren eine Funktion $l_P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folgendermaßen:

Bestimme zu $x \in \mathbb{R}$ die Gerade durch P und $X = (x, 0)$. Der Funktionswert $l_P(x)$ ist dann die Länge des Teils dieser Geraden innerhalb des Dreiecks ABC.

Frage: Hängt es von dem gewählten Punkt P ab, ob l_P stetig oder unstetig ist?

11 Einfache Eigenschaften stetiger Funktionen

In diesem Abschnitt sollen einige interessante Eigenschaften stetiger Funktionen angegeben werden.

Satz 11.1 Sei $f : D \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in D$ stetig mit $f(x_0) > 0$. Dann gibt es eine Umgebung $U(x_0)$ mit $f(x) > 0 \quad \forall x \in D \cap U$.

Beweis: Auf Grund der Stetigkeit von f in x_0 gibt es nach Satz 10.3 zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \qquad \forall\, x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \delta,$$

also auch zu $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2} > 0$. Für dieses δ zeigen wir, dass die Umgebung $U(x_0) := \ ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ die verlangte Eigenschaft besitzt.

Beh: Für jedes Element $x \in U(x_0) = \ ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\;$ gilt $f(x) > 0$.

Bew: Angenommen, die Behauptung ist falsch. Dann muss es wegen der Stetigkeit von f in x_0 ein $z \in U(x_0)$ geben mit $f(z) \leq 0$ und $|f(z) - f(x_0)| < \varepsilon$. Insgesamt folgt für dieses z

$$\frac{f(x_0)}{2} = \varepsilon > |f(z) - f(x_0)| = f(x_0) - f(z) > f(x_0)$$

Dies ist aber nicht möglich, da sich sonst (beachte $f(x_0) > 0$) der Widerspruch $\frac{1}{2} > 1$ ergibt.

Unmathematisch ausgedrückt besagt der Satz: Wenn eine stetige Funktion an einer Stelle positiv ist, dann auch „direkt daneben".

Eine analoge Aussage ist auch für $f(x_0) < 0$ möglich. In diesem Fall gilt: $\exists U(x_0)$ mit $f(x) < 0\ \forall x \in D \cap U$.

Die Voraussetzung *stetig in* x_0 ist in Satz 11.1 notwendig, wie uns das einfache Beispiel der in $x_0 = 0$ unstetigen Funktion $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{für} \quad x \leq 0 \\ 1 & \text{für} \quad x > 0 \end{cases}$ zeigt.

Frage: Kann man einen ähnlichen Satz für $f(x_0) = 0$ formulieren?

Ein (auch in der Schule) häufig gestelltes Problem beschäftigt sich mit der Existenz und dem Auffinden von Nullstellen von Funktionen. Für eine auf einem Intervall $[a, b]$ mit $a < b$ stetige Funktion kennt man folgende Aussage über die Existenz von Nullstellen:

Satz 11.2 (*Nullstellensatz von Bolzano*)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) < 0 < f(b)$ (oder umgekehrt $f(a) > 0 > f(b)$). Dann besitzt f mindestens eine Nullstelle, d.h., $\exists x_0 \in\ ]a, b[$ mit $f(x_0) = 0$.

Beweis: Wir argumentieren wie im alternativen Beweis des Satzes von Bolzano–Weierstraß, indem wir $u_1 = a, o_1 = b$ und $t := \frac{u_1+o_1}{2}$ setzen. Im Fall $f(t) = 0$ haben wir die gesuchte Nullstelle $x_0 = t$ gefunden, für $f(t) < 0$ setzen wir $u_2 = t$ und $o_2 = o_1$, für $f(t) > 0$ sei $u_2 = u_1$ und $o_2 = t$. Auf diese Weise erhalten wir eine monoton wachsende Folge (u_n) und eine monoton fallende Folge (o_n) mit gleichem Grenzwert x_0. Wegen der vorausgesetzten Stetigkeit folgt $f(u_n) \to f(x_0)$, $f(o_n) \to f(x_0)$ mit $f(u_n) < 0$, $f(o_n) > 0\ \forall n \in \mathbb{N}$. Nach Satz 11.1 muss $f(x_0) = 0$ sein: $f(x_0) > 0$ steht im Widerspruch zu $f(u_n) \to f(x_0)$, denn es gibt eine Umgebung von x_0, in der alle Funktionswerte positiv sind, $f(x_0) < 0$ geht nicht wegen $f(o_n) \to f(x_0)$.

Wie beim Satz von Bolzano–Weierstraß kann man auch hier einen völlig anderen Beweis führen:

Alternativer Beweis: Sei $A := \{x \in [a, b] \mid f(x) \leq 0\}$. Wegen $a \in A$ ist $A \neq \emptyset$, ferner ist A auf Grund der Definition beschränkt. Da wir uns im Bereich der reellen Zahlen bewegen, muss die Menge A ein Supremum besitzen, sei $x_0 = \sup A$ mit $x_0 \in [a, b]$.

Beh: x_0 besitzt die Eigenschaft $f(x_0) = 0$.

Bew: Sei (x_n) eine Folge mit $x_n \in A$ und $x_n \to x_0$. Wegen der Stetigkeit gilt $f(x_n) \to f(x_0)$ mit $f(x_0) \leq 0$. Wir schließen den Fall $f(x_0) < 0$ aus: Sonst gibt es (erneut wegen Satz 11.1) ein $\delta > 0$ mit $f\left(x_0 + \frac{\delta}{2}\right) < 0$, ein Widerspruch zu $x_0 = \sup A$.

Der Nullstellensatzes gilt nicht, falls die Voraussetzungen (abgeschlossenes Intervall, Stetigkeit) nicht beide erfüllt sind:

1) Eine stetige Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $f(a) < 0, f(b) > 0$ für $a, b \in D$ muss keine Nullstelle haben, wenn D kein Intervall ist, ein Gegenbeispiel ist $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := -1$ für $x < 0$ und $f(x) := +1$ für $x > 0$. (Beachte: Wegen $0 \notin D$ ist f überall stetig!)

2) Verzichtet man auf die Voraussetzung der Stetigkeit, gibt es ebenfalls leicht zu findende Gegenbeispiele (welche?).

Eine unmittelbare Folgerung aus dem Nullstellensatz ist der sogenannte *allgemeine Fixpunktsatz*

Satz 11.3 Sei $f : [a,b] \to [a,b]$ eine stetige Funktion

$$\Longrightarrow \quad \exists\, x_0 \in [a,b] : \; f(x_0) = x_0$$

Beweis: Wir können von $a < f(a)$ und $f(b) < b$ ausgehen – andernfalls hätten wir ja bereits einen Fixpunkt gefunden. An Stelle von f betrachten wir die Funktion

$$g : \begin{cases} [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) - x \end{cases}$$

g ist nach Satz 10.1 stetig mit $g(a) > 0$ und $g(b) < 0$, wir können auf g den Nullstellensatz anwenden und erhalten $x_0 \in [a,b]$ mit $g(x_0) = f(x_0) - x_0 = 0 \iff f(x_0) = x_0$.

Fragen: Gilt der Satz auch für nichtstetige Funktionen? Gilt der Satz für stetige Funktionen, wenn der Definitionsbereich kein Intervall ist?

Mit den letzten Sätzen haben wir Aussagen über *ein* Element des Bildbereiches gemacht. Allgemeiner gilt:

Satz 11.4 (*Zwischenwertsatz*)

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann nimmt f jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.

Beweis: Sei oBdA $f(a) < f(b)$, zu zeigen ist

$$\forall y \in [f(a), f(b)] \quad \exists\, x \in [a,b] \; : \; f(x) = y$$

Sei $y \in [f(a), f(b)]$. Für die ebenfalls stetige Funktion $g : \begin{cases} [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) - y \end{cases}$ folgt aus dem Nullstellensatz

$$\exists x \in [a,b] : \; 0 = g(x) = f(x) - y \iff f(x) = y$$

Auch dieser Satz wird falsch, wenn man auf eine der Voraussetzungen verzichtet. Dies heißt natürlich nicht, dass unstetige Funktionen sich nie bijektiv auf Intervallen verhalten können:

Beispiel: Sei $f : \begin{cases} [0,1] & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & \begin{cases} x & \text{für} & x \in \mathbb{Q} \\ 1-x & \text{für} & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \end{cases}$

Obwohl f nur an einer Stelle (welcher?) stetig ist, kommt jeder Wert zwischen $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$ genau einmal als Funktionswert vor:

Für $y \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ gilt $f(y) = y$, für $y \in [0,1] \cap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ gilt $f(1-y) = 1 - (1-y) = y$.

In den Übungen werden wir eventuell überlegen, ob es auch *überall* unstetige Funktionen $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ geben kann, die trotzdem der Aussage des Zwischenwertsatzes genügen.

Laut Zwischenwertsatz wird für stetige Funktionen, die auf einem Intervall $[a, b]$ definiert sind, jeder Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ als Bild angenommen. Es gilt sogar

Satz 11.5 (*Prinzip vom Maximum und Minimum*)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $f([a, b]) := \{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ ein beschränktes und abgeschlossenes Intervall, insbesondere existieren $\min f([a, b])$ und $\max f([a, b])$.

Beweis:[23] 1) Wir zeigen $f([a, b])$ ist nach oben beschränkt.

Angenommen, die Behauptung 1) ist falsch. Dann existiert eine Folge (x_n) mit $x_n \in [a, b]$ und

$$f(x_n) \geq n \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad (*)$$

Da (x_n) beschränkt ist, existiert nach dem Satz von Bolzano–Weierstraß eine konvergente Teilfolge (x'_n) mit Grenzwert x. Wegen der Abgeschlossenheit von $[a, b]$ muss auch $x \in [a, b]$ gelten (sonst kann keine Konvergenz vorliegen), also besitzt x ein Bild $f(x) \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \ f(x) < n_0 \qquad \text{(Zu jeder reellen Zahl gibt es eine größere natürliche Zahl.)}$$

Damit kann $f(x)$ wegen $(*)$ kein Grenzwert der Folge $(f(x_n))$ sein, was im Widerspruch zur Stetigkeit der Funktion f steht.

$f([a, b])$ ist demnach beschränkt, wegen der Vollständigkeit der reellen Zahlen existiert $s = \sup f([a, b])$.

2) Wir zeigen $s \in f([a, b])$, also $s = \max f([a, b])$:

Es sei (y_n) eine Folge aus $f([a, b])$ mit $y_n \to s$. Die beschränkte Folge (x_n) der Urbilder von y_n besitzt nach Bolzano–Weierstraß eine konvergente Teilfolge (x'_n) mit Grenzwert $v \in [a, b]$. Wegen der Stetigkeit von f und wegen der Eindeutigkeit des Grenzwertes müssen $f(v)$ und s übereinstimmen, dies ist äquivalent zur Behauptung $s = \max f([a, b])$.

3) Die Existenz von $\min f([a, b])$ zeigt man analog.

4) $f([a, b])$ ist als beschränkte und abgeschlossene Menge nachgewiesen. Dass es sich um ein Intervall handelt, folgt unmittelbar aus dem Zwischenwertsatz.

Beispiel: Für die Sinusfunktion mit eingeschränktem Definitionsbereich $[a, b] = [0, \pi]$ gilt $f([a, b]) = [0, 1]$, wobei das Maximum 1 an der Stelle $\frac{\pi}{2}$ und das Minimum 0 an den Stellen 0 und π erreicht werden.

Das stetige Bild eines abgeschlossenen Intervalls ist nach Satz 11.5 wieder ein abgeschlossenes Intervall. Für (halb)offene Intervalle ist der Satz falsch, wie uns die Funktion $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array} \right.$ zeigt.

Abgeschlossene (endliche) Intervalle sind ein Spezialfall von sogenannten *kompakten* Mengen[24]. Aus Zeitgründen können wir nicht auf interessante Zusammenhänge zwischen Kompaktheit und Stetigkeit eingehen, für Interessenten sei auch an dieser Stelle auf das bereits mehrfach erwähnte Buch von Heuser hingewiesen.

[23] Dieser Beweis wird in der Vorlesung wahrscheinlich nicht behandelt, seine Kenntnis ist zum Bestehen des Examens nicht lebensnotwendig. Wegen der intensiven Verwendung von früher gelernten Tatsachen sei er den Studierenden, die Freude an der Mathematik haben, aber nicht vorenthalten.

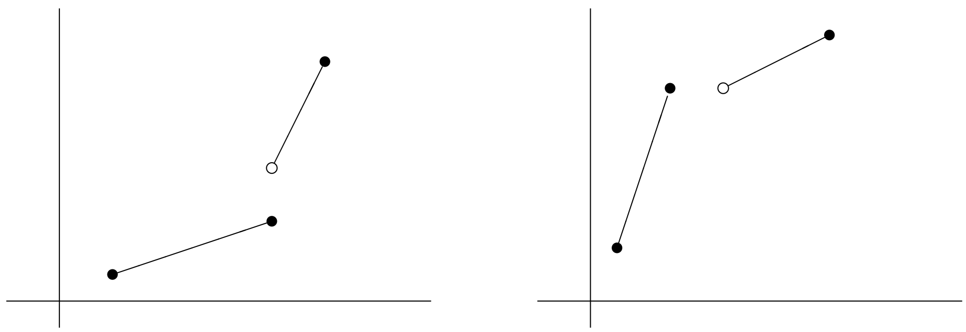
[24] Eine Teilmenge $K \subset \mathbb{R}$ ist kompakt, wenn sie beschränkt ist und für jede konvergente Folge (x_n) mit $x_n \in K$ auch ihr Grenzwert in K liegt.

Wir beenden dieses Kapitel mit einem Satz, in dem die Begriffe streng monoton, bijektiv (in Form von Umkehrfunktion) und stetig vorkommen:

Satz 11.6 (*Umkehrsatz für streng monotone Funktionen*)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend. Dann existiert auf der Bildmenge $f(I)$ die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$, die außerdem stetig und ebenfalls streng monoton wachsend ist.

Wir werden diesen Satz nicht beweisen. In der Vorlesung soll allerdings die folgende Skizze so beschriftet werden, dass man in ihr die Aussage des Umkehrsatzes erkennen kann.



Im Umkehrsatz ist nicht vorausgesetzt, dass f stetig ist. Falls f stetig ist, ist auch $f(I)$ ein Intervall. Der Satz gilt analog für streng monoton fallende Funktionen.

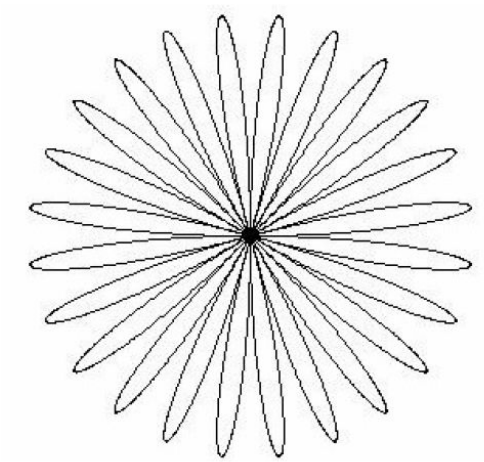
12 Über Abbildungen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

In diesem „Erholungsabschnitt“ ohne neuen Satz werden einige elementare Eigenschaften höherdimensionaler reeller Funktionen angegeben.

Der Gestalt von Graphen reeller Funktionen sind enge Grenzen gesetzt, beispielsweise kann kein Kreis als Bild vorkommen, da keinem $x \in \mathbb{R}$ zwei Funktionswerte zugeordnet sein dürfen. Für einen Kreis mit Mittelpunkt $(0, 0)$ und Radius r benötigt man zwei Funktionen

$$f_i : \begin{cases} [-r, r] & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad (-1)^i \sqrt{r^2 - x^2} \end{cases} \qquad \text{mit } i = 1, 2 \quad ,$$

für den oberen bzw. unteren Halbkreis.



Bei komplizierteren Kurven wie bei der nebenstehenden Rosette ist eine Angabe von geeigneten Funktionen nahezu unmöglich. Mit einer kleinen Begriffserweiterung bekommen wir diese Dinge allerdings recht einfach in den Griff.

Def 12.1 Seien $f_i : [a, b] \to \mathbb{R}$ für $i = 1, 2$ beliebige Funktionen. Dann heißt

$$f : \begin{cases} [a, b] & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (f_1(t),\ f_2(t)) \end{cases}$$

Parameterdarstellung (einer ebenen Kurve).

Manchmal wird die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ selbst ebene Kurve genannt. Jede reelle Funktion f ist der Spezialfall einer ebenen Kurve mit $f_1 = \mathrm{id}$ und $f_2 = f$.

Man kann Definition 12.1 auf räumliche Parameterkurven $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ übertragen, für $t \in \mathbb{R}$ ist dann $f(t) := (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$.

Beispiele: 1) Für $r \in \mathbb{R}^+$ ist

$$f : \begin{cases} [0, 2\pi[& \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (r\cos t, r\sin t) \end{cases}$$

die Darstellung eines Kreises mit Mittelpunkt $(0, 0)$ und Radius $r > 0$. Der Kreis „beginnt“ im Punkt $f(0) = (r \cdot \cos 0,\ r \cdot \sin 0) = (r, 0)$ und „wandert“ entgegen dem Uhrzeigersinn über $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, r),\ f(\pi) = (-r, 0),\ f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = (0, -r)$ wieder zurück nach $(r, 0)$.

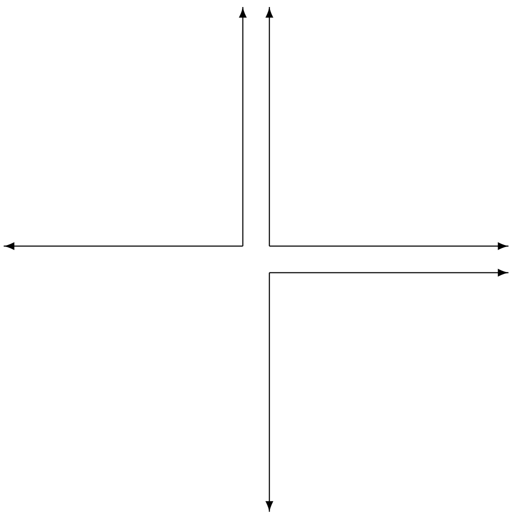
2) Die Rosette von oben stammt von der Funktion

$$f : \begin{cases} [0, 2\pi[& \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (\sin(12t) \cdot \cos t,\ \sin(12t) \cdot \sin t) \end{cases}$$

3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ f(t) = (t, 2t, 3t)$ ist die Gerade des Anschauungsraumes durch $(0, 0, 0)$ und $(1, 2, 3)$.

4) *Frage*: Was ist das Bild von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ f(t) = (\sin t,\ \cos t,\ t)$?

Wir wollen eine Hilfskonstruktion zum Zeichnen von ebenen Parameterkurven $f(t)$ angeben.



1) Zeichne links den Graphen von $f_1(t)$ und unten den von $f_2(t)$ unter Beachtung der Pfeilrichtungen

2) „Konstruiere“ die Parameterkurve aus $f_1(t)$ und $f_2(t)$.

(Zeichnung wird in der Vorlesung an Hand eines einfachen Beispiels ergänzt)

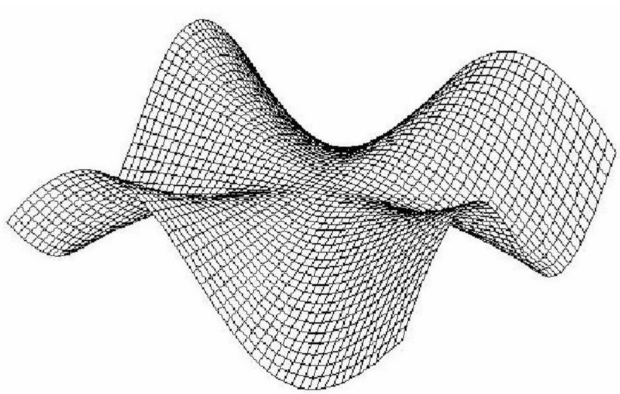
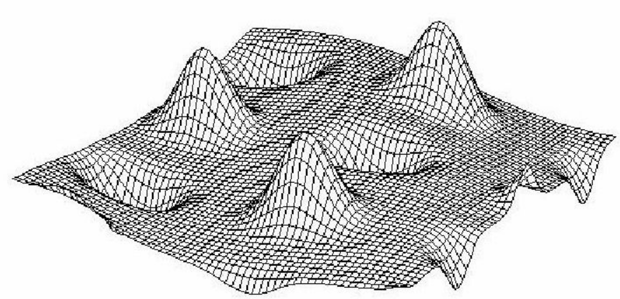
An den *Beispielen* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f_1(t) = 2$, $f_2(t) = t$ und $g\,(t) = (t^2, t^2)$ für $t \in [0,1]$ erkennen wir, dass man ohne weitere Informationen aus der Gestalt einer Parameterkurve nicht auf die beteiligten Funktionen $f_i(t)$ schließen kann. Eine Parameterkurve kann sogar „stetig aussehen“, obwohl beide Funktionen f_i an einigen Stellen nicht stetig sind.

Jetzt beschäftigen wir uns mit Funktion $f : D \to \mathbb{R}^m$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^2$ und $m = 1$ oder 3.

Wenn wir bei Abbildungen $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f((x,y)) \end{cases}$ die reelle Zahl $f((x,y))$ mit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ als „Höhe“ des „Funktionsgebirges“ an der Stelle (x,y) auffassen, bekommen wir eine Vorstellung des zugehörigen Graphen.

Beispiele: 1) $f : \begin{cases} [-4,4] \times [-4,4] & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} -\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{für} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für} & (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{cases}$ (linkes Bild)

2) $f : \begin{cases} [1.5,\ 22] \times [1.5,\ 22] & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & 5\left(\sin \frac{x}{3} \cos \frac{y}{2}\right)^5 + \cos\left(\frac{x}{4} + \frac{y}{5}\right) \end{cases}$ (rechtes Bild)

3) Wie sieht der Graph der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f((x,y)) := x^2 + y^2$ aus?

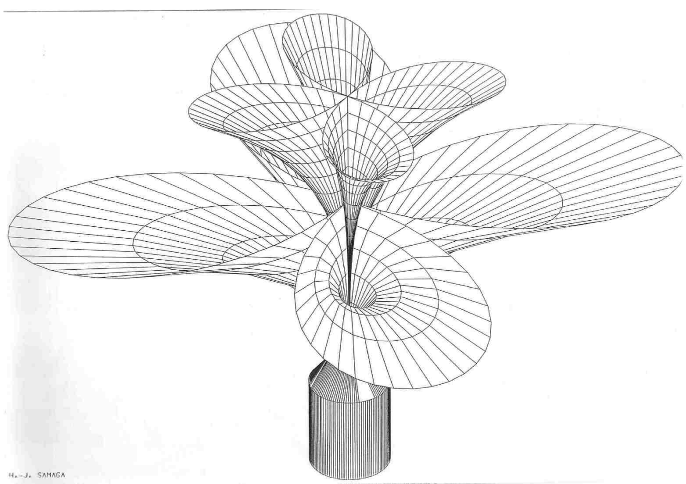
„Schönere“ und vor allem allgemeinere Bilder liefern Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, wenn man ähnlich wie bei den Parameterkurven den Bildbereich als Teilmenge des $\mathbb{R}^3$ zeichnet. In der Vorlesung werden wir uns mit der Funktion

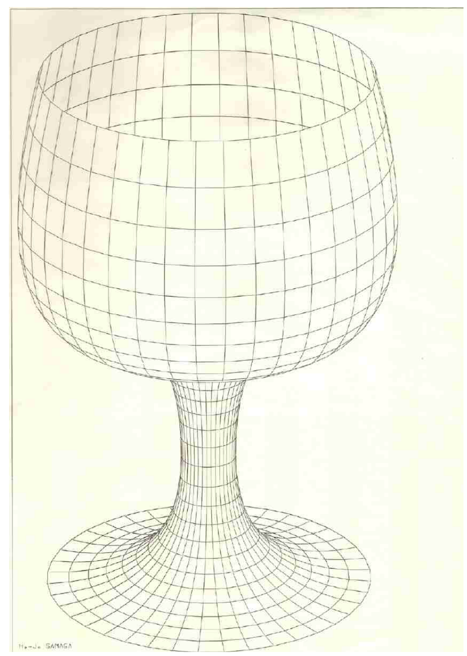
$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \to & \mathbb{R}^3 \\ (t, u) & \mapsto & (\cos t \cos u, \sin t \cos u, \sin u) \end{array} \right.$$

beschäftigen, die ein Rechteck der Ebene auf die Oberfläche der Einheitskugel (Radius $r = 1$ und Mittelpunkt $M = (0,0,0)$) in $\mathbb{R}^3$ abbildet.

Frage: (Wie) kann man eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ als Abbildung $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ auffassen?

Beispiele: Bilder von zwei weiteren Parameterflächen





13 Die Ableitung einer Abbildung

Viele Dinge des täglichen Lebens lassen sich durch Funktionen veranschaulichen; man denke etwa an Luftdruckwerte, festgestellt an einem bestimmten Ort zu unterschiedlichen Zeitpunkten oder an verschiedenen Orten zu einem gegebenen Zeitpunkt. Messen wir jederzeit bzw. überall und berücksichtigen wir, dass der Luftdruck nicht „springt“, handelt es sich um Beispiele für stetige Funktionen. Zur Wettervorhersage (wann oder wo droht ein Orkan?) sind exaktes Wissen über das Verhalten der Werte bei minimalen Veränderungen der Variablen Zeit oder Ort erforderlich (wie schnell fällt der Luftdruck?).

Diese und ähnliche Sachverhalte wollen wir mathematisch präzise erfassen. Die Behandlung solcher (und vieler anderer) Fragen erfolgt mit Hilfe der sogenannten *Differenzialrechnung*, die auf *I. Newton (1643–1727)* und *G. W. Leibniz (1646–1716)* zurückgeht.

Als *Beispiel* wollen wir noch einmal die „Dreiecksfunktion“ l_P mit $P = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2,\ \ p_2 \neq 0$ von Ende des Kapitels 10 untersuchen. Man bestimmt $l_P(x)$ für eine reelle Zahl x auf folgende Weise:

- Zeichne das Dreieck mit den Eckpunkten $A = (-1, 0), B = (1, 0), C = (0, 1)$
- Zeichne die Gerade g durch P und $X = (x, 0)$
- Bestimme die Länge l des Teils von g, der innerhalb des Dreiecks verläuft
- Dann ist $l_P(x) = l$

Für $P = (1, 1)$ erhalten wir so die Funktion[25]

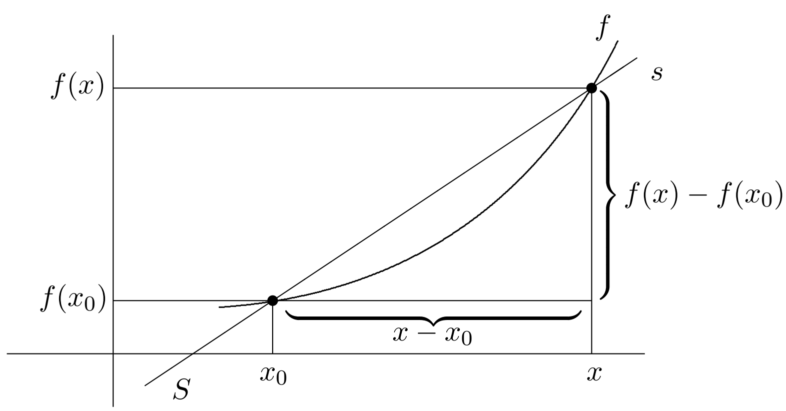
$$l_P : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \begin{cases} \frac{-2}{x(2-x)} \cdot \sqrt{1 + (1-x)^2} & \text{für} \quad x \leq -1 \\ \frac{1-x}{2-x} \cdot \sqrt{1 + (1-x)^2} & \text{für} \quad -1 < x \leq 1 \\ 0 & \text{für} \quad 1 < x \end{cases} \end{cases}$$

l_P ist stetig. Wenn wir den Graphen sorgfältig zeichnen, stellen wir an den Stellen -1 und 1 „Knicke“ im Verlauf der Kurve fest. Offensichtlich stimmen hier die Grenzwerte der Steigungen der Sekanten „von links“ und „von rechts“ nicht überein.

Ab jetzt betrachten wir Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$, wobei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall ist. Für ein festes $x_0 \in I$ bilden wir zu jedem $x \in I$ mit $x \neq x_0$ den *Differenzenquotienten*

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad .$$

Veranschaulichen können wir uns den Differenzenquotienten als Steigungsmaß („Verhältnis der Änderung von f zur Änderung von x“) der Sekante s durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x, f(x))$.

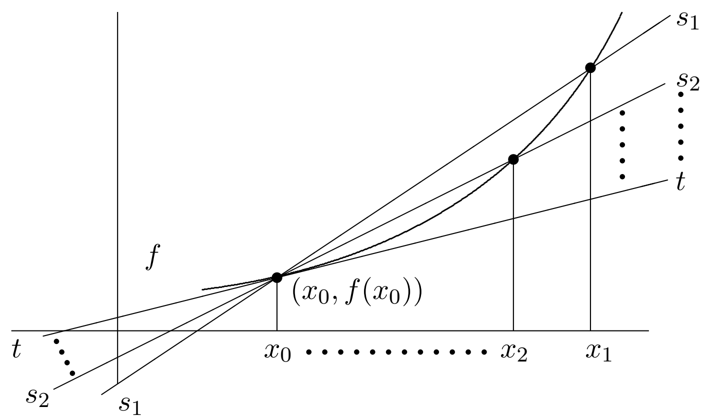


Weiter hinten in der grundlegenden Definition 1 werden wir den Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

betrachten. Falls dieser Grenzwert existiert, d.h., falls es ein $a \in \mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a$ gibt, werden wir a als *Ableitung von f an der Stelle x_0* bezeichnen. Veranschaulichen können wir uns a als das Steigungsmaß der Geraden t, an die sich die Sekante s annähert, wenn man x gegen x_0 streben lässt.

[25]Einzelheiten, beispielsweise wie man zu den konkreten Zahlen kommt, werden in der Vorlesung geklärt.



Man nennt t die *Tangente an f im Punkt* $(x_0, f(x_0))$. Ihr Steigungsmaß $a = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ bezeichnet man mit $f'(x_0)$, also

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \qquad \textit{falls dieser Grenzwert existiert.}$$

Def 13.1 a) Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt *differenzierbar an der Stelle* $x_0 \in I :\Longleftrightarrow$ Es existiert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Wir bezeichnen diesen Grenzwert mit $f'(x_0)$ und nennen ihn *Ableitung von f an der Stelle* x_0.

b) f heißt *differenzierbar auf* $X \subset I :\Longleftrightarrow$ f ist an jeder Stelle $x_0 \in X$ differenzierbar.

c) Sei f differenzierbar auf X. Dann heißt die Funktion

$$f' : \left\{ \begin{array}{ccc} X & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) \end{array} \right. \qquad \textit{Ableitung von f.}$$

Um Differenzierbarkeit an einer Stelle x_0 nachzuweisen, muss man überprüfen, ob der Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existiert. Hierzu wählt man sich eine *beliebige* Folge[26] (x_n) mit $x_n \in I \backslash \{x_0\}$, die gegen x_0 konvergiert, und untersucht, ob auch jeweils die zugehörige Folge $\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}$ konvergiert. Ist dies der Fall, liegt Differenzierbarkeit an der Stelle x_0 vor. Als ein Nebenprodukt dieser Überlegung ergibt sich, dass im Falle der Differenzierbarkeit für alle zulässigen Folgen (x_n) die jeweiligen Grenzwerte $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}$ übereinstimmen müssen.

Beispiele: 1) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konstante Funktion, d.h., $f(x) = c$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann ist f für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar, und es gilt $f'(x_0) = 0$. $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist die konstante Nullfunktion.

Denn: Ist (x_n) eine beliebige Folge mit $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$, so folgt

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = \lim_{n \to \infty} \frac{c - c}{x_n - x_0} = 0.$$

[26] Man beachte: Wenn etwas für eine *beliebige* Folge gilt, ist es für *jede* Folge gültig.

2) Die Funktion $f(x) = x$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar, für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt $f'(x_0) = 1$.

Denn: Ist (x_n) eine beliebige Folge mit $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$, so folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_0}{x_n - x_0} = 1.$$

3) Die Funktion $f(x) = x^2$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar, für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt $f'(x_0) = 2x_0$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2 - x_0^2}{x_n - x_0} = \lim_{n\to\infty} \frac{(x_n + x_0)(x_n - x_0)}{x_n - x_0} = \lim_{n\to\infty} (x_n + x_0) = 2x_0.$$

4) Die *Betragsfunktion* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch $f(x) = |x|$, ist an der Stelle $x_0 = 0$ *nicht* differenzierbar: Einerseits erhalten wir für die Folge $x_n = \frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n} - 0}{\frac{1}{n} - 0} = 1,$$

andererseits gilt für die Folge $x_n = -\frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n} - 0}{-\frac{1}{n} - 0} = -1;$$

Damit existiert $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ nicht.

5) $f(x) := \begin{cases} x^2 & \text{für} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ ist an der Stelle $x_0 = 0$ differenzierbar, denn es ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = \lim_{n\to\infty} \left\{ \begin{array}{lll} \frac{x_n^2}{x_n} = x_n & \text{für} & x_n \in \mathbb{Q} \\ \frac{0}{x_n} = 0 & \text{für} & x_n \notin \mathbb{Q} \end{array} \right\} = 0$$

6) *Frage*: Ist $f(x) := \begin{cases} x & \text{für} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ an der Stelle $x_0 = 0$ differenzierbar?

Zwischen den Begriffen stetig und differenzierbar besteht folgender Zusammenhang:

Satz 13.1 Ist $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so ist f auch stetig.

Beweis: Es sei $x_0 \in I$. Zu zeigen ist für jede Folge (x_n) mit $x_n \in I$ und $x_n \to x_0$ die Konvergenz $f(x_n) \to f(x_0)$. Es genügt, dies für Folgen (x_n) mit $x_n \neq x_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ zu zeigen. Die Behauptung $f(x_n) \to f(x_0)$ ist gleichbedeutend mit $f(x_n) - f(x_0) \to 0$. Wegen der Differenzierbarkeitsvoraussetzung von f in x_0 folgt

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} (f(x_n) - f(x_0)) &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \cdot (x_n - x_0) \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \cdot \lim_{n\to\infty} (x_n - x_0) \\ &= f'(x_0) \cdot 0 \quad = \quad 0 \end{aligned}$$

Bemerkung: Die Umkehrung dieses Satzes ist falsch: Aus der Stetigkeit folgt i.A. nicht die Differenzierbarkeit, ein Gegenbeispiel haben wir mit der Betragsfunktion bereits kennengelernt.

Frage: Ist die Funktion f aus Beispiel 5 an einer Stelle $x_0 \neq 0$ differenzierbar?

Wenn die Ableitung f' einer differenzierbaren Funktion f ebenfalls differenzierbar ist, kann man eine Funktion $(f')' = f''$ bilden. Auf diese Weise kommt man zu *höheren Ableitungen*, , d.h., f'' ist die Ableitung von f', f''' ist die Ableitung von f'' usw.; allgemein definiert man

$$f^{(n+1)} := (f^{(n)})'.$$

Die Funktion f selber bezeichnet man auch als 0–te Ableitung, d.h., $f^{(0)} = f$.

Beispiel: $f(x) = x^2, f'(x) = 2x, f''(x) = 2, f'''(x) = f^{(4)}(x) = 0.$

Nicht immer ist die Ableitung einer Funktion selbst differenzierbar.

Beispiel: Wir untersuchen die auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f(x) := \begin{cases} -x^2 & \text{für} \quad x \leq 0 \\ x^2 & \text{für} \quad x > 0 \end{cases}$.

f ist überall differenzierbar, für die Ableitung f' gilt $f'(x) := \begin{cases} -2x & \text{für} \quad x \leq 0 \\ 2x & \text{für} \quad x > 0 \end{cases}$.

Diese Funktion ist an der Stelle $x_0 = 0$ nicht differenzierbar, denn es ist $f'(x) = 2|x|$.

Setzt man $x = x_0 + h$, bedeutet $x \to x_0$ dasselbe wie $h \to 0$. Daher findet man manchmal auch folgende Darstellungen der Differenzierbarkeit:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \qquad \text{bzw. kürzer} \qquad f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Weitere alternative Schreibweisen zu $f'(x_0)$ sind $\frac{df}{dx}(x_0)$, $\frac{dy}{dx}(x_0)$, $Df(x_0)$ oder $y'(x_0)$.

14 Einige Ableitungsregeln

Bereits für eine einfache Funktion wie $f(x) = x^3$ ist es mühsam, die Ableitung an einer Stelle x_0 nur mit Hilfe der Definition auszurechnen. Daher benötigen wir Regeln, die uns das Ableiten einfacher machen. Wenn nichts anderes gesagt wird, gehen wir immer von reellen Funktionen aus, die auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sind.

Satz 14.1 Es seien f und g an der Stelle x_0 differenzierbar. Dann sind die Funktionen $f + g$ und $f \cdot g$ in x_0 differenzierbar; sofern $g(x_0) \neq 0$ gilt, ist auch $\frac{f}{g}$ in x_0 differenzierbar. Es gelten die Regeln:

a) $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$ (*Summenregel*)

b) $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$ (*Produktregel*)

c) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$ (*Quotientenregel*)

Beweis: a) Es sei (x_n) eine Folge mit $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$. Dann ist

$$\begin{aligned}\frac{(f+g)(x_n)-(f+g)(x_0)}{x_n-x_0} &= \frac{f(x_n)+g(x_n)-f(x_0)-g(x_0)}{x_n-x_0}\\ &= \frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}+\frac{g(x_n)-g(x_0)}{x_n-x_0} \;\to\; f'(x_0)+g'(x_0).\end{aligned}$$

b) Wir benutzen die gleichen Voraussetzungen wie in a). Ferner ist nach Satz 13.1 g in x_0 auch stetig, also gilt $g(x_n) \to g(x_0)$. Es folgt

$$\begin{aligned}\frac{(f\cdot g)(x_n)-(f\cdot g)(x_0)}{x_n-x_0} &= \frac{f(x_n)\cdot g(x_n)-f(x_0)\cdot g(x_0)}{x_n-x_0}\\ &= \frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}\cdot g(x_n)+f(x_0)\cdot\frac{g(x_n)-g(x_0)}{x_n-x_0}\\ &\to f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0).\end{aligned}$$

c) Wir formen den zu untersuchenden Quotienten um:

$$\begin{aligned}\frac{(\frac{f}{g})(x_n)-(\frac{f}{g})(x_0)}{x_n-x_0} &= \frac{1}{g(x_n)g(x_0)}\cdot\frac{f(x_n)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g(x_n)}{x_n-x_0}\\ &= \frac{1}{g(x_n)g(x_0)}\cdot\left(\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot\frac{g(x_n)-g(x_0)}{x_n-x_0}\right)\\ &\to \frac{1}{g^2(x_0)}\cdot\big(f'(x_0)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g'(x_0)\big)\end{aligned}$$

Satz 14.2 Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x^n$. Dann ist f auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1}.$$

Beweis (durch vollständige Induktion): Für $n = 0$ und $n = 1$ wurde die Behauptung im letzten Kapitel direkt aus der Definition nachgewiesen.

$n \mapsto n+1$: Für ein festes n sei die Behauptung richtig, d.h., $(x^n)' = nx^{n-1}$. Wir zeigen mit Hilfe der Produktregel, dass die Behauptung dann auch für $n+1$ gilt:

$$(x^{n+1})' \;=\; (x^n\cdot x)' = (x^n)'\cdot x + x^n\cdot 1 = nx^{n-1}\cdot x + x^n \;=\; nx^n + x^n \;=\; (n+1)x^n.$$

Als eine weitere Konsequenz aus Satz 14.1 erhalten wir unmittelbar:

Korollar a) Polynome $p(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ sind auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar, es ist $p'(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$.

b) Rationale Funktionen $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ sind an allen Stellen ihres Definitionsbereiches (also für $q(x) \neq 0$) differenzierbar:

$$r'(x) = \frac{p'(x)q(x) - p(x)q'(x)}{q^2(x)}$$

Beispiele: 1) $f(x) = 5x^4 - 3x^2 + 11$: Wenn wir $f'(x)$ durch y' usw. abkürzen, erhalten wir
$y' = 20x^3 - 6x, \quad y'' = 60x^2 - 6, \quad y''' = 120x, \quad y^{(4)} = 120$ und $y^{(n)} = 0$ für alle $n \geq 5$.

2) Es soll $g(x) = \frac{4x^3+1}{x+1}$ differenziert werden. Nach der Quotientenregel erhält man:

$$g'(x) = \frac{12x^2(x+1) - (4x^3+1)}{(x+1)^2} = \frac{8x^3 + 12x^2 - 1}{(x+1)^2}.$$

Ein Spezialfall rationaler Funktionen sind Funktionen der Gestalt $f(x) = \frac{1}{x^n} = x^{-n}$ mit $n \in \mathbb{N}$. Man zeigt

Korollar Sei $z \in \mathbb{Z}$ und $f(x) = x^z$. Dann ist $f'(x) = z \cdot x^{z-1}$.

Beweis: Es ist nur noch der Fall $z < 0$, also $-z = n \in \mathbb{N}$ zu untersuchen. Es ist $f(x) = x^z = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$. Mit der Quotientenregel gilt

$$f'(x) = \frac{0 - 1 \cdot n \cdot x^{n-1}}{(x^n)^2} = -n \cdot x^{n-1-2n} = -n \cdot x^{-n-1} = z \cdot x^{z-1}$$

Ohne Beweise[27] geben wir die nächsten Regeln an:

Satz 14.3 (*Kettenregel*)

Es seien $f : X \to \mathbb{R}$ und $g : Y \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $f(X) \subseteq Y$. Die Funktion f sei differenzierbar in $x_0 \in X$, und g sei differenzierbar in $y_0 = f(x_0)$. Dann ist die zusammengesetzte Funktion $g \circ f$ differenzierbar in x_0:

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Beispiele: 3) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $h(x) = (3x^3 - 5x + 2)^7$. Es gilt $h(x) = g(f(x))$ für die Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die durch $f(x) = 3x^3 - 5x + 2$ und $g(y) = y^7$ gegeben sind. Die Anwendung der Kettenregel ergibt

$$h'(x) \;=\; (g \circ f)'(x) \;=\; g'(f(x)) \cdot f'(x) \;=\; 7 \cdot (3x^3 - 5x + 2)^6 \cdot (9x^2 - 5).$$

4) Es sei $h(x) = \left(\frac{4x^3+1}{x+1}\right)^{13}$. Mit der Kettenregel und dem Ergebnis aus Beispiel 2) erhalten wir

$$h'(x) = 13 \left(\frac{4x^3+1}{x+1}\right)^{12} \cdot \left(\frac{4x^3+1}{x+1}\right)' = 13 \left(\frac{4x^3+1}{x+1}\right)^{12} \cdot \frac{8x^3 + 12x^2 - 1}{(x+1)^2}.$$

Auf Grund des Umkehrsatzes (Satz 11.6) existiert für eine streng monotone Funktion f eine Umkehrfunktion. Wenn f zusätzlich differenzierbar ist mit $f'(x) \neq 0$, kann man auch die Umkehrfunktion ableiten:

Satz 14.4 (*Umkehrregel*)

Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ streng monoton und in $x_0 \in I$ differenzierbar mit $f'(x_0) \neq 0$. Dann ist f^{-1} differenzierbar in $y_0 = f(x_0)$, es gilt $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

[27] Beweise der Ketten– und der Umkehrregel findet man beispielsweise in: H. Junek, Analysis, Teubner Verlag 1998.

Beispiel: 5) Es sei $f : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ definiert durch $y = f(x) = x^2$. f ist stetig und auf dem Definitionsbereich streng monoton wachsend. Die Umkehrfunktion $f^{-1} : [0,\infty[\to [0,\infty[$ ist die Wurzelfunktion $x = g(y) = \sqrt{y} = y^{\frac{1}{2}}$. Nach der Umkehrregel gilt für die Ableitung von f^{-1} an der Stelle y:

$$g'(y) \;=\; \frac{1}{f'(x)} \;=\; \frac{1}{2x} \;=\; \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Schreiben wir x statt y und $x^{\frac{1}{2}}$ statt $\sqrt{x}$, erhalten wir $(x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$.

Allgemein folgt aus der Umkehrregel für $r \in \mathbb{R}$ und $x > 0$ sogar: $f(x) = x^r \Rightarrow f'(x) = r \cdot x^{r-1}$, wobei noch zu klären wäre, was x^r für eine beliebige reelle Zahl r überhaupt bedeutet.

Die Kenntnis der Ableitungen von $\sin x$, $\cos x$, e^x und $\ln x$ sollte zum mathematischen Allgemeingut gehören.

Satz 14.5 a) $\forall x \in \mathbb{R}$ gilt $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(e^x)' = e^x$.

b) $\forall x \in \mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ gilt $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Beweisidee zur Ableitung von e^x und $\ln x$:

Wegen $e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ gilt

$$(e^x)' = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right)' = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k\cdot x^{k-1}}{k!}\right)' = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{k!}\right)' = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} = e^x$$

Wir schreiben $y = f(x) = \ln x$ und erhalten aus der Umkehrregel zusammen mit $e^y = e^{\ln x} = x$

$$y' = (\ln x)' = \frac{1}{(e^y)'} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}.$$

Weitere *Beispiele*: 6) $y = \sqrt[3]{2x^2+1} = \left(2x^2+1\right)^{\frac{1}{3}} \;\Rightarrow\; y' = \frac{1}{3}\left(2x^2+1\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot 4x = \frac{4x}{3\sqrt[3]{(2x^2+1)^2}}$

7) $y = 2^x \;\Rightarrow\; y' = \ln 2 \cdot 2^x$; denn es ist $y = 2^x = e^{\ln(2^x)} = e^{x\cdot\ln 2} = (f \circ g)(x)$ mit $f(x) = e^x$ und $g(x) = x \cdot \ln 2$. Wegen $f'(x) = e^x$ und $g'(x) = \ln 2$ [28] ergibt die Kettenregel $y' = e^{x\ln 2} \cdot \ln 2 = \ln 2 \cdot 2^x$.

8) $y = x^x \Rightarrow y' = (x^x)' = \left(e^{x\ln x}\right)' = e^{x\ln x} \cdot (x\ln x)' = x^x \cdot \left(x \cdot \frac{1}{x} + 1 \cdot \ln x\right) = x^x \cdot (1 + \ln x)$

9) $y = e^{\sin\sqrt{x}}$ ist vom Typ $y = f(g(h(x)))$ mit $h(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sin x$ und $f(x) = e^x$. Mehrfache Anwendung der Kettenregel führt zum Ergebnis

$$y' = f'(\sin\sqrt{x}) \cdot g'(\sqrt{x}) \cdot h'(x) = e^{\sin\sqrt{x}} \cdot \cos\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Wir haben bereits gesehen, dass die Ableitung einer differenzierbaren Funktion nicht selbst differenzierbar sein muss. Es gibt sogar differenzierbare Funktionen mit unstetigen Ableitungen:

[28] Beachten Sie, dass es sich bei dem Graphen der Funktion g um eine Gerade mit Steigung $\ln 2$ handelt. $\ln 2$ ist eine Konstante und darf nicht mit der Funktion $\ln x$ verwechselt werden!

Beispiel: 10) Die Funktion $f(x) := \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{für} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}$ ist nach den Ableitungsregeln für $x \neq 0$ differenzierbar, die Ableitung ist in diesem Fall $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$. Für $x = 0$ kann man die Differenzierbarkeit mit Hilfe der Definition und Satz 3.3 [29] nachweisen, es ist

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \left(x \sin \frac{1}{x} \right) = 0$$

Damit ist f' auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Dass diese Funktion in $x_0 = 0$ nicht stetig ist, möge man selbst nachprüfen. (Hinweis: Man beschäftige sich mit der Folge $\left(\frac{1}{n\pi}\right) \to 0$.)

Zum Kuriositätenkabinett der Differenzialrechnung gehören ferner Funktionen, die auf ganz $\mathbb{R}$ stetig, aber an keiner einzigen Stelle differenzierbar sind, beispielsweise $f(x) := \sum_{i=0}^{\infty} b^i \cos(n^i \pi x)$, wobei $b \in \mathbb{R}$ und $n \in N$ die Bedingungen $0 < b < 1$, n ungerade und $nb > 1$ erfüllen müssen.

Zum Abschluss wollen wir die Differenzialrechnung zur Bestimmung von Grenzwerten der Art

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

benutzen, wenn Zähler und Nenner für $x \to x_0$ beide gegen 0 bzw. beide gegen ∞ streben. Der folgende Satz liefert uns hierfür eine schlagkräftige Methode. Man fasst Sätze dieser Art unter dem Namen *Regeln von de l'Hospital* zusammen, benannt nach *Guillaume Francois Antoine Marquis de l'Hospital, (1661–1704)*. Wir verzichten auf Beweise und gehen nur auf den Fall „$\frac{0}{0}$“ ein, andere Fälle bearbeitet man analog.

Satz 14.6 Es sei I ein Intervall und $x_0 \in I$. Die Funktionen f und g seien für alle $x \in I$ differenzierbar, es gelte $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in I$, $x \neq x_0$, und ferner sei $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$. Dann gilt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

falls der rechte Grenzwert existiert bzw. gleich $+\infty$ oder $-\infty$ ist.

Beispiele: 11) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{3x}$ soll berechnet werden. Für $x \to 0$ streben sowohl Zähler als auch Nenner gegen 0, d.h., die Berechnung des Grenzwertes ist nicht ohne weiteres möglich. Anwendung von Satz 14.6 ergibt

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{3x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{3} = \frac{1}{3}.$$

12) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{2x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{4x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x + e^{-x}}{4} = \dfrac{1}{2}.$

Dieses Beispiel zeigt, dass manchmal erst mehrfache Anwendung der Regel von de l'Hospital zum Erfolg führt.

13) Manchmal führen Umwege zum Ziel: $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to 0} e^{\frac{1}{x} \ln(1+x)} \overset{e^x \text{stetig}}{=} e^{\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \ln(1+x)} = e^1 = e$, wobei der Grenzwert $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} \ln(1 + x)$ nach der Regel von de l'Hospital bestimmt wurde (wie?).

[29] Satz 3.3 besagte, dass das Produkt aus Nullfolge und beschränkter Folge ebenfalls eine Nullfolge ist.

Bemerkung: Ein entsprechender Satz gilt für $x \to \infty$ an Stelle von $x \to x_0$ und für den Fall „$\frac{\infty}{\infty}$“.

Beispiel: 14) Es soll $\lim\limits_{x\to 0}(x \cdot \ln x)$ berechnet werden. Es gilt $x \cdot \ln x = \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}$, also

$$\lim_{x\to 0}(x \cdot \ln x) \;=\; \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \;=\; \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \;=\; \lim_{x\to 0}(-x) \;=\; 0.$$

Mit den Regeln von de l'Hospital kann man zeigen, dass jede Exponentialfunktion a^x mit $a > 1$ für $x \to \infty$ schneller wächst als jedes Polynom beliebig hohen Grades.

15 Weitere Eigenschaften differenzierbarer Funktionen

Im letzten Abschnitt zur Analysis wollen wir uns mit der geometrischen Bedeutung von Ableitungen beschäftigen und zum Schluss den Mittelwertsatz der Differenzialrechnung kennenlernen. Wenn nichts anderes gesagt wird, ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine (beliebig oft) differenzierbare Funktion. Wir werden nicht alle Beweise exakt durchführen und verweisen stattdessen auf die gängigen Lehrbücher.

Wir wissen: Ist f konstant, so ist die Ableitung f' überall gleich Null. Als Umkehrung gilt:

Satz 15.1 Sei $f'(x) = 0$ für alle $x \in [a, b]$. Dann ist f auf dem Intervall $[a, b]$ eine konstante Funktion.

Mit anderen Worten: Eine differenzierbare Funktion, die nirgends steigt oder fällt, muss konstant sein.

Satz 15.2 Gilt $f'(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$, so ist f auf $[a, b]$ streng monoton wachsend; gilt $f'(x) < 0$ für alle $x \in [a, b]$, so ist f auf $[a, b]$ streng monoton fallend.

Sowohl Satz 15.1 als auch Satz 15.2 sind auf Grund der geometrischen Interpretation von $f'(x)$ als Steigung von f im Punkt $(x, f(x))$ einleuchtend, wir verzichten auf formale Beweise.

Frage: Gilt für differenzierbare Funktionen auch die Umkehrung von Satz 15.2?

Def 15.1 Die Funktion f hat an der Stelle $x_0 \in\,]a, b[$ ein *lokales Maximum* $:\Longleftrightarrow$

$$\exists\, \delta > 0 : \; f(x_0) \geq f(x) \quad \text{für alle} \quad x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta].$$

Analog definiert man *lokales Minimum*.

Hat f in x_0 ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum, so nennen wir x_0 ein *lokales Extremum* von f (oder auch Extremstelle von f).

Satz 15.3 Wenn eine differenzierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 \in\,]a, b[$ eine Extremstelle hat, so gilt $f'(x_0) = 0$.

Beweis: OBdA habe f in x_0 ein lokales Maximum. Es gibt ein $\delta > 0$, so dass $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ ist. Es folgt (da f in x_0 differenzierbar ist):

$$f'(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0 + \frac{1}{n}) - f(x_0)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0 - \frac{1}{n}) - f(x_0)}{-\frac{1}{n}}.$$

Ist n hinreichend groß, so gilt $x_0 + \frac{1}{n} \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ und $x_0 - \frac{1}{n} \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ und somit $f(x_0 + \frac{1}{n}) \leq f(x_0)$ und $f(x_0 - \frac{1}{n}) \leq f(x_0)$. Es folgt

$$\frac{f(x_0 + \frac{1}{n}) - f(x_0)}{\frac{1}{n}} \leq 0 \quad \text{und} \quad \frac{f(x_0 - \frac{1}{n}) - f(x_0)}{-\frac{1}{n}} \geq 0.$$

Also gilt auch

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0 + \frac{1}{n}) - f(x_0)}{\frac{1}{n}} \leq 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0 - \frac{1}{n}) - f(x_0)}{\frac{1}{n}} \geq 0.$$

Insgesamt folgt $f'(x_0) = 0$.

Die Bedingung $f'(x_0) = 0$ ist notwendig, aber nicht hinreichend für das Vorliegen eines Extremums an der Stelle x_0: Für die Funktion $f(x) = x^3$ gilt $f'(x) = 3x^2$, also $f'(0) = 0$. An der Stelle $x_0 = 0$ hat f aber keine Extremstelle.

Es sei x_0 eine Nullstelle der ersten Ableitung f' von f. Um zu entscheiden, ob ein Minimum, ein Maximum oder überhaupt kein Extremum vorliegt, kann man die folgenden Sätze heranziehen.

Satz 15.4 Die Funktion f sei in $[a, b]$ zweimal differenzierbar, an der Stelle $x_0 \in]a, b[$ gelte $f'(x_0) = 0$.

a) Ist $f''(x_0) < 0$, so hat f an der Stelle x_0 ein lokales Maximum.

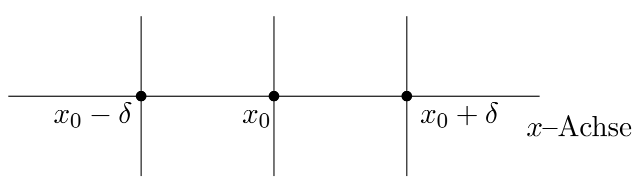
b) Ist $f''(x_0) > 0$, so hat f an der Stelle x_0 ein lokales Minimum.

Beweis: Wir zeigen nur a), der Beweis von b) verläuft analog. Es gelte $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$:

$$0 > f''(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0}.$$

Es folgt die Existenz eines $\delta > 0$ mit $\frac{f'(x)}{x - x_0} < 0$ für alle $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, $x \neq x_0$ (andernfalls wäre der Grenzwert nicht kleiner als Null). Hieraus folgt

$$f'(x) > 0 \quad \text{für} \quad x \in]x_0 - \delta, x_0[\quad \text{und} \quad f'(x) < 0 \quad \text{für} \quad x \in]x_0, x_0 + \delta[.$$



Frage: Wie verläuft der Graph von f' in der Skizze? Man sagt, dass f' an der Stelle x_0 einen *Vorzeichenwechsel* von + nach − hat. Aus Satz 15.2 folgt: f ist im Intervall $[x_0 - \delta, x_0]$ streng monoton wachsend und im Intervall $[x_0, x_0 + \delta]$ streng monoton fallend. f hat an x_0 ein lokales Maximum.

Beispiel: $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - x^2$. Es ist $f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 2x = x(\frac{3}{4}x - 2)$ mit den Nullstellen $x_0 = 0$ und $x_1 = \frac{8}{3}$, ferner ist $f''(x) = \frac{3}{2}x - 2$. Wegen $f''(0) = -2$ und $f''(\frac{8}{3}) = 2$ liegt an der Stelle $x_0 = 0$ ein lokales Maximum und an der Stelle $x_1 = \frac{8}{3}$ ein lokales Minimum vor.

Ist $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$, so gibt Satz 15.4 keine Auskunft darüber, ob ein Minimum, Maximum oder keine Extremstelle vorliegt. Hier kann manchmal der folgende Satz weiterhelfen, den wir ohne Beweis angeben.

Satz 15.5 Die Funktion f sei in $]a, b[$ n–mal differenzierbar ($n \geq 2$). An der Stelle $x_0 \in\,]a, b[$ gelte

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Ist n eine gerade Zahl und gilt $f^{(n)}(x_0) < 0$ $\quad [f^{(n)}(x_0) > 0]$, so hat f an x_0 ein lokales Maximum [lokales Minimum]. Ist n ungerade, liegt an der Stelle x_0 kein Extremum vor.

Beispiel: $f(x) = x^4$. An der Stelle $x_0 = 0$ ist die erste von 0 verschiedene Ableitung $f^{(4)}(0) = 24 > 0$, es liegt ein Minimum vor. Bei $f(x) = x^5$ hat erst die fünfte Ableitung an der Stelle 0 nicht den Wert 0, daher existiert hier kein Extremum.

Satz 15.4 ist der Spezialfall $n = 2$ von Satz 15.5.

Def 15.2 Ist $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so hat f an der Stelle x_0 ein *absolutes Maximum*, falls $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in D$ gilt. Analog definiert man *absolutes Minimum.*

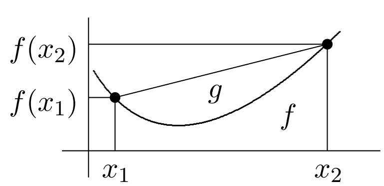
Ist $D = [a, b]$ ein abgeschlossenes Intervall und soll das absolute Maximum oder Minimum von f auf D gefunden werden, muss man sich auch um die Randpunkte a und b kümmern, in denen die Sätze für die Ableitungen nicht gelten müssen.

Beispiel: $D = [-1, 5]$, $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - x^2$ (wie in einem früheren Beispiel). Absolute Maxima bzw. Minima könnten an den Randstellen -1 und 5 sowie bei 0 (lokales Maximum) und $\frac{8}{3}$ (lokales Minimum) vorliegen. Es gilt $f(-1) = -\frac{5}{4}$, $f(0) = 0$, $f(\frac{8}{3}) = -\frac{64}{27}$, $f(5) = \frac{25}{4}$. Am Randpunkt $b = 5$ liegt ein absolutes Maximum vor, während das absolute Minimum bei $\frac{8}{3}$ erreicht wird.

Def 15.3 Eine Funktion f heißt *streng konvex* auf dem Intervall I, falls für alle $x_1, x_2, x \in I$ mit $x_1 < x < x_2$ gilt

$$f(x) \;<\; \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1).$$

Geometrisch bedeutet dies, dass der Graph von f zwischen x_1 und x_2 unterhalb der Verbindungsgeraden g der Punkte $(x_1, f(x_1))$ und $(x_2, f(x_2))$ verläuft. (Man beachte, dass der rechts stehende Ausdruck in der Definition diese Gerade g beschreibt.)



Bildlich gesprochen „hängt“ eine streng konvexe Funktion „nach unten durch“.

Analog definiert man *konvex* bzw. *streng konkav* bzw. *konkav*; man braucht hierzu in der obigen Definition das Zeichen $<$ nur in $\leq$ bzw. $>$ bzw. $\geq$ abzuändern.

Ohne Beweis geben wir den folgenden Satz an, der den Zusammenhang von streng konvex bzw. streng konkav mit der zweiten Ableitung f'' herstellt:

Satz 15.6 a) Gilt $f''(x) > 0$ für alle $x \in I =]a, b[$, so ist f auf I streng konvex.

b) Gilt $f''(x) < 0$ für alle $x \in I =]a, b[$, so ist f auf I streng konkav.

Def 15.4 Eine Nullstelle x_0 der zweiten Ableitung von f heißt ein *Wendepunkt* von f, falls f'' in x_0 einen Vorzeichenwechsel hat, d.h., wenn für ein $\delta > 0$ entweder

$$f''(x) > 0 \quad \text{für} \quad x \in]x_0 - \delta, x_0[\quad \text{und} \quad f''(x) < 0 \quad \text{für} \quad x \in]x_0, x_0 + \delta[$$

oder

$$f''(x) < 0 \quad \text{für} \quad x \in]x_0 - \delta, x_0[\quad \text{und} \quad f''(x) > 0 \quad \text{für} \quad x \in]x_0, x_0 + \delta[.$$

gilt.

In einem Wendepunkt stößt ein Bereich, in dem die Funktion streng konvex ist, mit einem Bereich, in dem die Funktion streng konkav ist, zusammen. Oder anders gesagt: An einem Wendepunkt geht die Funktion von konvexer zu konkaver Krümmung über (oder umgekehrt).

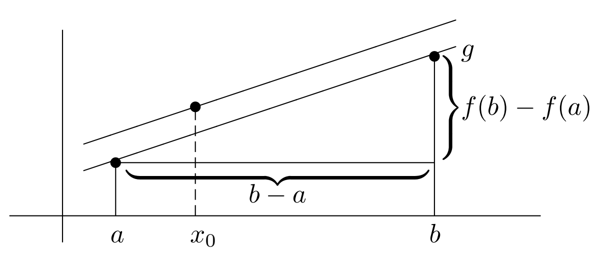
Damit haben wir alle Hilfsmittel zusammen, um die in der Schule beliebten(?) Kurvendiskussionen erfolgreich durchführen zu können!

Differenzierbarkeit ist eine lokale Eigenschaft (Steigung der Tangente in einem Punkt). Im *Mittelwertsatz* wird für $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Verbindung zwischen globaler Änderungsrate $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ und lokaler Änderung in $x_0 \in]a, b[$ hergestellt.

Satz 15.7 (*Mittelwertsatz der Differenzialrechnung*)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gibt es mindestens ein $x_0 \in]a, b[$ mit

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



Frage: Wie muss der Graph von f in obige Skizze eingefügt werden, damit der Mittelwertsatz dargestellt wird?

Der Mittelwertsatz ist anschaulich einleuchtend: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ gibt die Steigung der Geraden g durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ an. Er besagt, dass es (mindestens) eine Stelle $x_0 \in]a, b[$ gibt, für die die Tangente im Punkt $(x_0, f(x_0))$ parallel zu g verläuft.

Wir werden zuerst einen Spezialfall beweisen, benannt nach *Michel Rolle* (1652–1719):

Satz 15.8 (*Satz von Rolle*)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f(a) = f(b)$. Dann gibt es mindestens ein $x_0 \in \,]a, b[$ mit $f'(x_0) = 0$.

Beweis: Da die Behauptung für den Fall einer konstanten Funktion gilt, gehen wir oBdA von einer nicht konstanten Funktion aus. Nach dem Prinzip vom Maximum/Minimum (Satz 14.8, anwendbar wg. Satz 13.1) existieren $\min f([a, b])$ und $\max f([a, b])$; seien $x_1, x_2 \in [a, b]$ mit $f(x_1) = \min f([a, b])$ und $f(x_2) = \max f([a, b])$. Da f nicht konstant ist, gilt $f(x_1) < f(x_2)$ und deshalb ist $\{x_1, x_2\} \neq \{a, b\}$. [30]:

Für $x_0 \in \{x_1, x_2\} \backslash \{a, b\}$ sind die Voraussetzungen von Satz 15.3 erfüllt und wir erhalten $f'(x_0) = 0$.

Beweis des Mittelwertsatzes: Mit Hilfe der gegebenen Funktion f definieren wir die ebenfalls differenzierbare Abbildung $g(x) := (f(b) - f(a))x - (b - a)f(x)$. Wegen $g(a) = f(b)a - bf(a) = g(b)$ sind für g die Voraussetzungen des Satzes von Rolle erfüllt: Es gibt ein $x_0 \in \,]a, b[$ mit $g'(x_0) = 0$.

Mit Hilfe der Differenziationsregeln erhalten wir andererseits

$$g'(x) = (f(b) - f(a)) \cdot 1 - (b - a) \cdot f'(x) \qquad \forall x \in [a, b]$$

Mit $g'(x_0) = 0$ folgt hieraus die Behauptung $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Wir wollen die Analysis mit einer nützlichen Anwendung beenden:

Das *Newton–Verfahren* dient zur näherungsweisen Berechnung von Nullstellen einer Funktion f. Es zeichnet sich dadurch aus, dass es sehr gut konvergiert und daher meist schon nach wenigen Iterationsschritten gute Näherungswerte liefert. Sorgfältig muss man allerdings auf das Erfülltsein folgender Bedingungen achten:

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine mindestens zweimal differenzierbare Funktion mit

(1) $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in [a, b]$

(2) f'' überall stetig und es gilt entweder $f''(x) \geq 0$ oder $f''(x) \leq 0$ für alle $x \in [a, b]$

(3) $f(a) \cdot f(b) < 0$.

(1) sorgt dafür, dass f *streng monoton* (steigend oder fallend) ist. Wegen (2) ist f auf $[a, b]$ *konvex oder konkav*. Bedingung (3) sichert die Existenz mindestens einer Nullstelle $c \in \,]a, b[$.

Sind (1) bis (3) erfüllt, kann man die (eindeutig bestimmte) Nullstelle c näherungsweise durch

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

bestimmen, wenn der Startwert x_0 „*auf der richtigen Seite*“ von c gewählt wird, genauer:

(4) In den Fällen

(4.1) $f(a) < 0,\ f(b) > 0,\ f''(x) \leq 0$ und (4.2) $f(a) > 0,\ f(b) < 0,\ f''(x) \geq 0$,

wähle man $x_0 \in [a, c]$; also etwa $x_0 = a$. In den übrigen Fällen

(4.3) $f(a) < 0,\ f(b) > 0,\ f''(x) \geq 0$ und (4.4) $f(a) > 0,\ f(b) < 0,\ f''(x) \leq 0$,

wähle man $x_0 \in [c, b]$, also etwa $x_0 = b$.

[30] Wenigstens einer der Stellen x_1, x_2 ist verschieden von a oder b.

Beispiel: Wir suchen eine Nullstelle der Funktion $f(x) = x^2 + 2x - 5$. Wir überprüfen (1) bis (4):

(1) $f'(x) = 2x + 2 \neq 0$ für alle $x \in [0, 3]$

(2) $f''(x) = 2$ ist auf ganz $[0, 3]$ stetig, es gilt $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in [0, 3]$

(3) $f(0) \cdot f(3) < 0$

(4) $f(0) < 0$, $f(3) > 0$, $f''(x) \geq 0$

(1) bis (3) sind erfüllt und es liegt der Fall (4.3) vor. Daher wählen wir als Startwert $x_0 = 3$ und erhalten nacheinander

$x_1 = 3 - \frac{f(3)}{f'(3)} = 1.75, \quad x_2 = 1.465909, \quad x_3 = 1.449544, \quad x_5 = 1.449490 = x_6$ usw.

Index