

## Inhaltsverzeichnis

<b>6</b>	<b>Geometrie</b>	<b>56</b>
0	Vorbemerkungen . . . . .	56
1	Affine Ebenen: Definition und einfache Beispiele . . . . .	58
2	Sphärenmodell und Moultonebene . . . . .	61
3	Isomorphie und Kollineationen . . . . .	63
4	Schließungssätze . . . . .	67
5	Dilatationen . . . . .	73
6	Normale euklidische Ebenen . . . . .	77
7	Bewegungen Teil 1: Punktspiegelungen . . . . .	80
8	Orthogonalität . . . . .	86
9	Bewegungen Teil 2: Spiegelungen und Drehungen . . . . .	88
10	Winkel . . . . .	95
11	Eulergerade und Feuerbachkreis in der Anschauungsebene . . . . .	101

## 6 Geometrie

### 0 Vorbemerkungen

Als Antwort auf die *Frage*: Wovon handelt Geometrie? werden häufig Begriffe wie Punkt, Gerade, Kreis, Winkel, Fläche, Volumen, Länge, Lot fällen, Spiegelungen, Kongruenzen, Strahlensätze, ... genannt.

Wir wollen mit den einfachsten Begriffen beginnen und werden unsere Untersuchungen zunächst auf *Punkte* und *Geraden* beschränken.

*Frage*: Was ist ein Punkt? Was ist eine Gerade?

Bereits Euklid (circa 300 v. Chr.) hat sich mit diesen Fragen beschäftigt. Seine Antwort lautete unter anderem

Ein Punkt ist etwas, was keine Teile hat.

Eine Gerade ist eine Linie, die gleich liegt mit den Punkten auf ihr selbst.

Eine Linie hat breitenlose Länge, die Enden einer Linie sind Punkte.

Diese Angaben machen uns den Sachverhalt kaum klarer! Beispielsweise besitzt jede Gerade für Euklid im Gegensatz zu unseren Erkenntnissen aus der Anschauung offensichtlich ein Anfang und ein Ende. Heute nennen wir solche Gebilde Strecken und nicht Geraden. Um diesen und anderen Problemen zu entkommen, denken wir nicht länger über Gestalt von Punkt und Gerade nach<sup>1</sup> und ziehen uns lieber auf einen für Mathematiker typischen Standpunkt zurück. Wir machen uns das Leben einfach, indem wir per Definition festlegen

*Punkte* sind Elemente einer beliebigen Menge  $\mathbb{P} = \{A, B, P, Q, X, \dots\}$ .

*Geraden* sind Elemente einer weiteren, zunächst ebenfalls beliebigen Menge  $\mathbb{G} = \{a, b, g, h, \dots\}$ .

Die Frage, ob ein Punkt auf einer Geraden liegt oder nicht, kann dann ganz brutal durch eine beliebig vorgegebene Relation  $R \subset \mathbb{P} \times \mathbb{G}$  bestimmt werden: Ein Punkt  $P \in \mathbb{P}$  liegt auf einer Geraden  $g \in \mathbb{G}$  :  $\iff (P, g) \in R$ . Weil wir uns aber nicht zu weit von unserer gewohnten Anschauung entfernen wollen, gehen wir nicht so allgemein vor (obwohl Mathematiker es lieben), sondern fassen jede Gerade im Sinne von Euklid als eine Menge von Punkten auf, d.h.,  $\mathbb{G}$  ist mathematisch ausgedrückt ab jetzt eine Teilmenge der Potenzmenge von  $\mathbb{P}$ . Damit ist sofort die Frage, wann ein Punkt auf einer Geraden liegt, beantwortet:

**Def 0.1** Sei  $\mathbb{P}$  eine Menge von Punkten und  $\mathbb{G} \subset \text{Pot } \mathbb{P}$  eine Menge von Geraden.

$A \in \mathbb{P}$  liegt auf  $g \in \mathbb{G}$  :  $\iff A \in g$ .

„Liegt auf“ ist daher nur eine andere Bezeichnungsweise für „ist Element von“, wir werden in diesem Sinn die bekannten Schreibweisen wie  $A \in g$  oder  $B \notin h$  benutzen.

*Beispiele*: 1) *Zahlenstrahl*:  $\mathbb{P} = \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{G} = \{\mathbb{R}\}$ . Jeder Punkt (= jede reelle Zahl) liegt auf der Geraden  $\mathbb{R}$  (= Zahlenstrahl). Es gibt überabzählbar viele Punkte, aber nur eine Gerade.

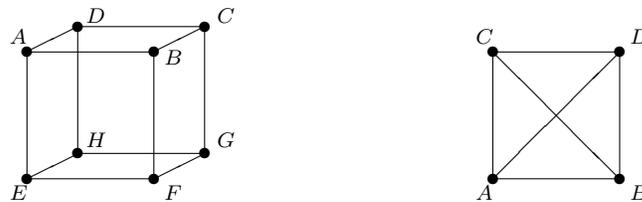
2) *Anschauungsebene*:  $\mathbb{P} = \mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{G} = \{g_{m,b}, g_k \mid m, b, k \in \mathbb{R}\}$ . Hier gilt beispielsweise  $(1, 0) \in g_1 \cap g_{1,-1}$  oder  $(5, 3) \notin g_{1,2}$ . Die hier benutzte Schreibweise für die Geraden sollte bereits bekannt sein.

3) Jetzt wird es abstrakter! Es sei  $\mathbb{P} := \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$  und  $\mathbb{G} := \{\{A, B\}, \{A, D\}, \{A, E\}, \{B, C\}, \{B, F\}, \{C, D\}, \{C, G\}, \{D, H\}, \{E, F\}, \{E, H\}, \{F, G\}, \{G, H\}\}$ . In diesem Beispiel steht eindeutig fest, ob ein Punkt auf einer Geraden liegt oder nicht. Wie kann man sich diese „Geometrie“

<sup>1</sup>sonst landet man bei Überlegungen wie: Ein Punkt ist ein Winkel, dem die Schenkel ausgerissen wurden; ein Winkel ist eine geknickte Gerade; eine Gerade ist ein aufgeblasener Kreis; ein Kreis ist ein aufgeblasener Punkt; ... ;-)

aus 8 Punkten und 12 Geraden anschaulich vorstellen? Bei geschickter Betrachtungsweise können wir die Punkte als Ecken eines Würfels deuten, wobei zwei Punkte genau dann auf einer Geraden liegen, wenn sie zu einer Kante des Würfels gehören (siehe Zeichnung weiter unten). Damit entspricht genau jede Würfelkante einer Geraden. Man beachte aber, dass unsere Geraden (= Elemente von  $\mathbb{G}$  bzw. Teilmengen von  $\mathbb{P}$ ) jeweils nur aus zwei (Eck)punkten bestehen!

4)  $\mathbb{P} := \{A, B, C, D\}$ ,  $\mathbb{G}$  bestehe aus allen zweielementigen Teilmengen von  $\mathbb{P}$ . Anschaulich können wir die Elemente von  $\mathbb{P}$  als die vier Eckpunkte eines Tetraeders deuten. Weil zu jeder Tetraederkante genau zwei Punkte gehören und jeweils zwei Punkte zu einer Tetraederkante, können wir der besseren Vorstellung wegen jede Gerade als Tetraederkante interpretieren, obwohl wir wissen, dass eigentlich nur jeweils genau zwei Punkte (und nichts dazwischen) eine Gerade bilden. Eine andere Möglichkeit der Visualisierung ist in der folgenden rechten Skizze gewählt worden. Beachte, dass die Geraden  $\{A, D\}$  und  $\{B, C\}$  keinen Punkt gemeinsam haben! Wir hätten die Punkte  $B$  und  $C$  genauso gut durch eine Kurve „außen herum“ verbinden können um anzudeuten, dass sie eine Geraden bilden.



Links der Würfel aus Beispiel 3), rechts eine Skizze zu Beispiel 4). Die Verbindungsstriche zwischen den Punkten sind keine Geraden, sie dienen lediglich zur Kennzeichnung, welche Punkte gemeinsam eine Geraden bilden.

Bei endlichen Punkt- und Geradenmengen wie in den letzten beiden Beispielen kann die Inzidenz von Punkten und Geraden (welcher Punkt liegt auf welcher Geraden?) auch durch eine Inzidenztafel angegeben werden.

*Frage:* Wieviele Möglichkeiten gibt es, in der folgenden Tabelle die fehlenden Punkte so einzutragen, dass die vollständige Inzidenztafel dem obigen Beispiel 3) entspricht?

	$g_1$	$g_2$	$g_3$	$g_4$	$g_5$	$g_6$	$g_7$	$g_8$	$g_9$	$g_{10}$	$g_{11}$	$g_{12}$
$A$	×				×				×			
$B$	×					×				×		
		×			×						×	
		×				×						×
			×				×		×			
			×					×		×		
				×			×				×	
				×				×				×

Wir werden in der Vorlesung an einem Beispiel „aus dem täglichen Leben“ die unterschiedlichen Darstellungsmöglichkeiten (graphisch, durch Mengen, als Inzidenztafel) noch einmal vergleichen.

Wie wir in den Beispielen gesehen haben, können (müssen aber nicht) verschiedene Punkte zu der gleichen Geraden gehören, können (müssen aber nicht) verschiedene Geraden gemeinsame Punkte enthalten.

**Def 0.2** Man nennt

Punkte  $P_1, \dots, P_n$  *kollinear* oder *in kollinearer Lage* :  $\iff \exists g \in \mathbb{G} : P_i \in g \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$

Geraden  $g_1, \dots, g_n$  *kopunktal* oder *in kopunktaler Lage* :  $\iff \exists P \in \mathbb{P} : P \in g_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$

Im Fall der Anschauungsebene sind  $(0,0), (1,0), (0,1)$  nicht kollinear, zwei verschiedene Geraden liegen in ihr genau dann kopunktal, wenn sie im herkömmlichen Sinn nicht parallel sind. Im Würfelbeispiel 3) sind die Punkte  $A$  und  $G$  nicht kollinear, da es keine Gerade in  $\mathbb{G}$  gibt, die  $A$  und  $G$  gemeinsam enthält. Im Beispiel 4) liegen  $\{A, D\}$  und  $\{B, C\}$  nicht kopunktal, auch wenn sich diese „Geraden“ in unserer Zeichnung zu schneiden scheinen.

## 1 Affine Ebenen: Definition und einfache Beispiele

Eines der Ziele dieser Vorlesung ist es, die uns bereits bekannte Anschauungsebene durch möglichst wenige charakterisierende Eigenschaften (Axiome) eindeutig festzulegen; nach dem Motto: Wenn ein Gebilde aus Punkten und Geraden diese und jene Eigenschaft erfüllt, dann muss es sich um die Anschauungsebene oder ein Gebilde mit exakt den Eigenschaften der Anschauungsebene handeln.<sup>2</sup>

Wie in der Anschauungsebene wollen wir daher ab jetzt verschiedene Geraden genau dann parallel nennen, wenn sie keinen Punkt gemeinsam haben, ferner soll stets jede Gerade zu sich selbst parallel sein.

Geraden  $g$  und  $h$  heißen parallel, geschrieben  $g \parallel h$ , :  $\iff g = h$  oder  $g \cap h = \emptyset$ .

Diese Terminologie bedeutet beispielsweise für den Würfel aus dem vorherigen Abschnitt im Gegensatz zu unserer Anschauung  $\{A, E\} \parallel \{G, H\}$  bzw. bei Beispiel 4) (Tetraeder)  $\{A, D\} \parallel \{B, C\}$ . Parallelität kommt auch in der nächsten grundlegenden Definition vor:

**Def 1.1** Sei  $\mathbb{P}$  eine Menge von Punkten und  $\mathbb{G} \subset \text{Pot } \mathbb{P}$  eine Menge von Geraden.  $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$  heißt *affine Ebene* :  $\iff$

(AE 1)  $\forall P, Q \in \mathbb{P}, P \neq Q, \exists_1 g \in \mathbb{G} : P, Q \in g$ .  
(Zwei verschiedene Punkte legen genau eine Gerade fest)

(AE 2)  $\forall P \in \mathbb{P} \forall g \in \mathbb{G} \exists_1 h \in \mathbb{G} : P \in h$  und  $g \parallel h$ .  
(Sogenanntes Euklidisches Parallelenaxiom)

(AE 3)  $\mathbb{P}$  enthält mindestens drei nichtkollineare Punkte.

*Beispiele:* 1) Der Zahlenstrahl ist keine affine Ebene; denn Axiom (AE 3) ist nicht erfüllt: Alle Punkte liegen kollinear auf einer gemeinsamen Gerade.

2) Die Anschauungsebene  $\mathbb{R}^2$  mit den Geraden  $g_{m,b}$  und  $g_k$  ist eine affine Ebene. Obwohl dies anschaulich klar ist, werden wir es weiter unten beweisen.

3) Der Würfel mit den 8 Ecken als Punktmenge und den 12 Kanten (Eckenpaare) als Geradenmenge ist keine affine Ebene (warum nicht?)

4) Sei  $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$  mit  $\mathbb{P} := \{A, B, C, D\}$  und  $\mathbb{G}$  die Menge aller zweielementigen Teilmengen von  $\mathbb{P}$  (Tetraeder).  $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$  ist eine affine Ebene, was man durch Überprüfung der drei Axiome beweist.

<sup>2</sup>Mathematisch vornehmer ausgedrückt: Es muss isomorph zur Anschauungsebene sein.

5) *Frage*: Bildet der Anschauungsraum  $\mathbb{R}^3$  eine affine Ebene?

Bevor wir 2) beweisen, zeigen wir noch

**Satz 1.1** Sei  $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$  eine affine Ebene. Dann ist die Parallelität  $\parallel$  eine Äquivalenzrelation auf  $\mathbb{G}$ .

**Beweis:** Wir überprüfen die Bedingungen reflexiv, symmetrisch, transitiv:

(r): Für alle Geraden  $g$  gilt  $g = g$ , also auch  $g \parallel g$ .

(s):  $g \parallel h \Rightarrow g = h$  oder  $g \cap h = \emptyset$ . Weil Gleichheit und Durchschnittsbildung kommutative Prozesse sind, gilt auch  $h = g$  oder  $h \cap g = \emptyset$  und damit nach Definition  $h \parallel g$ .

(t): Sei  $g \parallel h$  und  $h \parallel l$ , zu zeigen ist  $g \parallel l$ . Wäre  $g \not\parallel l$ , hätten die verschiedenen Geraden  $g$  und  $l$  einen gemeinsamen Punkt  $S$ . Das bedeutet aber, dass es durch  $S$  zwei verschiedene parallele Geraden zu  $h$  – nämlich  $g$  und  $l$  – gibt, ein Widerspruch zu Axiom (AE 2).

**Satz 1.2** Die Anschauungsebene ist eine affine Ebene.

**Beweis:** Wir überprüfen die Axiome (AE 1) – (AE 3):

(AE 1): Seien  $P = (p_1, p_2)$  und  $Q = (q_1, q_2) \in \mathbb{P} = \mathbb{R}^2$  verschiedene Punkte.

1. Fall  $p_1 = q_1 =: k$ : Wegen  $P, Q \in g_k$  existiert eine Verbindungsgerade. Sie ist auch *eindeutig* bestimmt: Für  $l \neq k$  gilt  $P \notin g_l$ . Es kann auch keine gemeinsame Gerade vom Typ  $g_{m,b}$  geben, denn  $P, Q \in g_{m,b} \Rightarrow p_2 = mp_1 + b = mq_1 + b = q_2$ , ein Widerspruch zur Voraussetzung  $P \neq Q$ .

2. Fall  $p_1 \neq q_1$ : Es kann keine Gerade vom Typ  $g_k$  geben, auf der beide Punkte liegen. Wir untersuchen, für welche  $m, b$  wir  $P, Q \in g_{m,b}$  erhalten:

Aus den Gleichungen  $mp_1 + b = p_2$  und  $mq_1 + b = q_2$  folgt durch einfache Rechnung für  $g_{m,b}$  die *eindeutige* Lösung mit  $m = \frac{q_2 - p_2}{q_1 - p_1}$  und  $b = \frac{p_2 q_1 - p_1 q_2}{q_1 - p_1}$ .

Wer nicht rechnen will, kann mit Kenntnissen aus der linearen Algebra auch folgendermaßen argumentieren:

$$P, Q \in g_{m,b} \iff \begin{pmatrix} p_1 & 1 \\ q_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_2 \\ q_2 \end{pmatrix}$$

Wir erinnern uns an Lösbarkeitskriterien aus der linearen Algebra:

Für eine Matrix  $A$  mit  $k$  Zeilen und  $l$  Spalten ist  $Ax = b$  eindeutig lösbar  $\iff \text{rg } A = \text{rg}(A, b) = l$

Weil dies hier ( $k = l = 2$ ) erfüllt ist, gibt es genau eine Gerade  $g_{m,b}$  durch die Punkte  $P$  und  $Q$ .

(AE 2): Sei  $P = (p_1, p_2) \in \mathbb{P}$ . Für  $g = g_k$  ist  $g_{p_1}$  die einzige Gerade durch  $P$  parallel zu  $g_k$ . Für  $g = g_{m,b}$  erhalten wir durch Rechnung  $P \in g_{m, p_2 - mp_1} \parallel g_{m,b}$ .<sup>3</sup>

(AE 3): Wurde schon erledigt (wann und wo?)

Wenn keine Verwechslung möglich ist, werden wir die in affinen Ebenen eindeutig bestimmte Gerade durch verschiedene Punkte  $A$  und  $B$  kurz  $AB$  schreiben. An Stelle von  $g \cap h = \{X\}$  notieren wir ohne Klammern kürzer  $g \cap h = X$ . Mit  $(A, g)$  sei ab jetzt die gemäß Axiom (AE 2) eindeutig bestimmte Gerade durch  $A$  gemeint, die parallel zu  $g$  verläuft.

*Beispiel:* Im  $\mathbb{R}^2$  gilt  $((1, 1), g_3) = g_1$ ,  $((0, 0), g_{0,1}) \cap g_{-1} = (-1, 0)$ .

Wir haben bereits sehr unterschiedliche affine Ebenen kennengelernt. Noch „kleinere“ affine Ebenen als in Beispiel 4) (bestehend aus vier Punkten und sechs Geraden) kann es nicht geben:

<sup>3</sup>Einzelheiten zur Parallelität von Geraden in der Anschauungsebene sind (hoffentlich noch) bekannt.

In jeder affinen Ebene  $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$  muss es wegen der Axiome (AE 3) und (AE 1) mindestens drei verschiedene nicht kollineare Punkte  $A, B, C$  und drei verschiedene Geraden  $AB, AC, BC$  geben.

*Frage:* Ist  $(\mathbb{P} = \{A, B, C\}, \mathbb{G} = \{AB, AC, BC\})$  eine affine Ebene?

*Antwort:* Nein, denn Axiom (AE 2) ist nicht erfüllt – es fehlen die Geraden  $(A, BC), (B, AC), (C, AB)$ .

Diese zuletzt genannten Geraden sind paarweise nicht parallel; denn wegen der Transitivität der Parallelität (siehe Satz 1.1) folgt sonst ein Widerspruch zur vorausgesetzten Nichtkollinearität von  $A, B, C$ :

$$BC \parallel (A, BC) \parallel (B, AC) \parallel AC \quad \Rightarrow \quad BC \parallel AC \quad \Rightarrow \quad BC = AC \quad \Rightarrow \quad A, B, C \text{ kollinear}$$

In jeder affinen Ebene gibt es mindestens einen vierten Punkt, sei  $D := (B, AC) \cap (C, AB)$ . Weil für alle Geraden gleiches Recht gilt, existieren ferner  $E := (A, BC) \cap (B, AC)$  und  $F := (A, BC) \cap (C, AB)$ .

*Frage:* Kann es sich bei  $D, E, F$  um denselben Punkt handeln?

*Antwort:* Warum nicht?

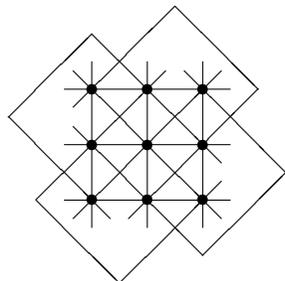
Wie wir in Beispiel 4) gesehen haben, liegt im Fall  $D = E = F$  eine affine Ebene vor; jetzt wissen wir, dass es sich um den kleinstmöglichen Fall handelt, dem sogenannten *Minimalmodell einer affinen Ebene*.

Das Minimalmodell einer affinen Ebene besteht aus 4 Punkten und 6 Geraden. Bekanntlich gehört in der Anschauungsebene zu jedem Punkt ein reelles Zahlenpaar, es ist ja  $\mathbb{P} = \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Analog können wir der Punktmenge des Minimalmodells die Zahlenmenge  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$  zuordnen. Auch bei den Geraden geht es so zu wie in der Anschauungsebene, wir müssen nur jeweils modulo 2 rechnen.

*Beispiel:* Die Punkte  $(0, 1)$  und  $(1, 0)$  liegen auf der Geraden  $g_{1,1} = \{(x, x+21) \mid x \in \mathbb{Z}_2\} = \{(0, 1), (1, 0)\}$ .

Unter Verwendung der Modulo 2 – Rechnung haben wir eine algebraische Darstellung des Minimalmodells gefunden:  $\mathbb{P} = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  und  $\mathbb{G} = \{g_{m,b}, g_k \mid m, b, k \in \mathbb{Z}_2\}$ .

Es gibt keine affine Ebene mit genau 5, 6, 7 oder 8 Punkten. Die zweitkleinste affine Ebene besteht aus 9 Punkten und 12 Geraden:



*Frage:* Kann man die Punkte dieses Modells auch in der Form  $\mathbb{P} = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$  schreiben?

Wie sieht die zugehörige Geradenmenge aus?

Auf Grund der Axiome (AE 1) und (AE 3) ist schnell klar, dass in jeder affinen Ebene jeder Punkt auf mindestens zwei Geraden liegen muss<sup>4</sup>. Jetzt beweisen wir die „Umkehrung“:

**Satz 1.3** Sei  $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$  eine beliebige affine Ebene. Dann gilt  $|g| \geq 2 \quad \forall g \in \mathbb{G}$ .

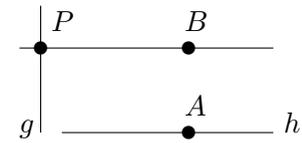
**Beweis:** Wir müssen zeigen, dass es in keiner affinen Ebene Geraden mit weniger als zwei Punkten geben kann. Wir führen den Beweis indirekt und nehmen das Gegenteil an.

1. Fall: Angenommen, es gibt eine Gerade  $g$  ohne Punkte, also  $g = \emptyset \in \text{Pot } \mathbb{P}$ . Wegen der Axiome (AE 3) und (AE 1) existieren Punkte  $A, B, C$  mit  $AB \neq AC$ . Da  $AB \cap g = \emptyset = AC \cap g$ , haben wir verschiedene

<sup>4</sup>Man kann sogar leicht zeigen, dass jeder Punkt auf mindestens drei Geraden liegt.

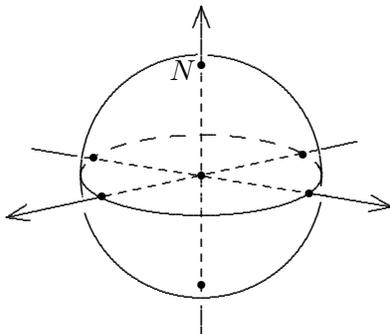
Geraden  $AB$  und  $AC$  durch  $A$  gefunden, die beide parallel zu  $g$  liegen. Dies ist nach Axiom (AE 2) nicht möglich.

2. Fall: Angenommen, es gibt eine Gerade  $g = \{P\}$ . Nach (AE 3) gibt es weitere Punkte  $A, B$  mit  $A \notin BP$ . Sei  $h := (A, BP)$ . Wegen  $P \notin h$  (sonst folgt aus  $AP = h \parallel BP$  die kollineare Lage von  $A, B, P$ ) ist  $g \cap h = \emptyset$ . Erneut haben wir mit  $g$  und  $BP$  verschiedene Geraden durch  $P$  gefunden, die parallel zu  $h$  liegen, Widerspruch zu (AE 2).



## 2 Sphärenmodell und Moultonebene

Weitere Beispiele für affine Ebenen finden wir auf Kugeloberflächen im Anschauungsraum  $\mathbb{R}^3$ . Stellvertretend für alle Kugeln betrachten wir die Oberfläche der Einheitskugel  $\mathcal{S} := \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ . Bei den folgenden Überlegungen wird der Punkt  $N = (0, 0, 1)$  ( $N$  wie Nordpol) eine besondere Rolle spielen.



Schneiden wir im Anschauungsraum Kugeloberflächen mit Ebenen, so ist das Ergebnis stets ein Kreis, sofern die Schnittmenge mindestens zwei Punkte enthält. Sei im Folgenden  $\mathbb{E}$  eine Ebene, die  $\mathcal{S}$  im Nordpol  $N$  und in mindestens einem weiteren Punkt schneidet. Die Menge aller Ebenen mit dieser Eigenschaft sei  $\mathcal{E}$ .

Zur besseren Übersicht setzen wir ferner  $\mathcal{S}' := \mathcal{S} \setminus \{N\}$ .

**Satz 2.1**  $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$  mit  $\mathbb{P} = \mathcal{S}'$ ,  $\mathbb{G} = \{\mathcal{S}' \cap \mathbb{E} \mid \mathbb{E} \in \mathcal{E}\}$  ist eine affine Ebene.

*Punkte* dieser affinen Ebene sind alle Punkte auf der Sphäre außer  $N$ , *Geraden* dieser affinen Ebene sind alle Kreise auf der Sphäre durch  $N$ , aber ohne diesen Punkt.<sup>5</sup> In der folgenden Beweisskizze nutzen wir einige einfache Eigenschaften des Anschauungsraumes  $\mathbb{R}^3$  aus, die aus dem zweiten Semester bekannt sein sollten. Um Missverständnissen vorzubeugen, verwenden wir für eine „normale“ Gerade durch zwei Raumpunkte des  $\mathbb{R}^3$  den Begriff *Raumgerade*.

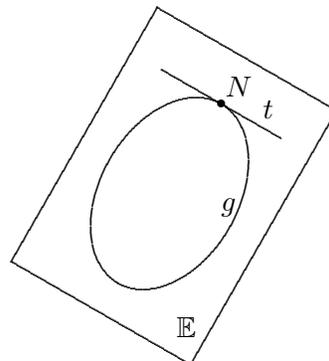
**Beweisskizze:** (AE 1): Seien  $A, B$  verschiedene Punkte auf  $\mathcal{S}'$ . Weil  $N$  nicht auf der Raumgeraden durch  $A$  und  $B$  liegt, da keine Raumgerade eine Kugeloberfläche mehr als zweimal treffen kann, legen die drei Raumpunkte  $N, A$  und  $B$  genau eine Ebene  $\mathbb{E} \in \mathcal{E}$  des  $\mathbb{R}^3$  fest. Wir schneiden  $\mathbb{E}$  mit  $\mathcal{S}'$ . Nach Definition

<sup>5</sup>Grob angenähert bildet auch die Erdoberfläche eine Sphäre. Der Nullmeridian durch London–Greenwich ist eine Gerade der affinen Erdoberflächenebene, der Äquator nicht.

von  $\mathbb{G}$  ist dieser Schnitt die gesuchte (affine) Gerade durch  $A$  und  $B$ .

(AE 2): Sei  $P \in \mathbb{P}$ ,  $g \in \mathbb{G}$ . Nach Definition ist  $g \cup \{N\}$  ein Kreis auf  $\mathcal{S}$ . Jeder Kreis des Anschauungsraumes  $\mathbb{R}^3$  liegt in genau einer Ebene. Also auch  $g \cup \{N\}$ , wir nennen diese Ebene  $\mathbb{E}$ . Eine elementare Eigenschaft von Kreisen besagt ferner, dass in jedem Punkt des Kreises genau eine Tangente existiert. Sei  $t$  die Tangente an „unseren“ Kreis  $g \cup \{N\}$  durch  $N$ .  $t$  ist eine Raumgerade, sie hat mit  $\mathcal{S}$  nur den Punkt  $N$  gemeinsam.

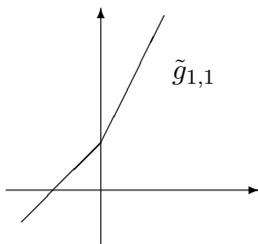
Weil  $P$  auf  $\mathcal{S}$  liegt, ist  $P \notin t$ , also legen  $P$  und  $t$  im  $\mathbb{R}^3$  genau eine weitere Ebene  $\mathbb{E}'$  fest. Die Ebenen  $\mathbb{E}$  und  $\mathbb{E}'$  gehören beide zu  $\mathcal{E}$  und schneiden sich in  $t$ . Sie haben auf  $\mathcal{S}'$  keinen gemeinsamen Punkt! Genau wie zu  $\mathbb{E}$  gehört auch zu  $\mathbb{E}'$  ein Kreis auf der Kugeloberfläche.  $h := \mathbb{E}' \cap \mathcal{S}'$  ist die durch  $\mathbb{E}'$  auf  $\mathcal{S}'$  bestimmte (affine) Gerade. Wegen  $h \cap g = \emptyset$  ist  $h$  die zu  $g$  gesuchte Parallele durch  $P$ .



(AE 3):  $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, -1, 0) \in \mathbb{P}$  liegen nicht zusammen mit  $N$  in einer Ebene und erfüllen daher das Axiom.

Für das nächste Beispiel kehren wir zur Anschauungsebene zurück. Wir übernehmen die Punkte und alle Geraden vom Typ  $g_k$  und  $g_{m,b}$  mit einer Steigung  $m \leq 0$ . An Stelle der Geraden mit positiver Steigung  $m > 0$  führen wir sogenannte „Knickgeraden“ ein:

Für  $m > 0$  sei  $\tilde{g}_{m,b} := \{(x, m * x + b) \mid x \in \mathbb{R}\}$  mit  $m * x := \begin{cases} mx & \text{für } x \leq 0 \\ 2mx & \text{für } x > 0 \end{cases}$



Eine Knickgerade: Beim Überqueren der  $y$ -Achse von links nach rechts wird die positive Steigung verdoppelt.

*Übung:* Skizziere die Geraden  $g_1, g_{0,1}, \tilde{g}_{2,0}, \tilde{g}_{1,-1}$ .

Im Folgenden sei  $\mathbb{G}' := \{g_k, g_{m,b} \mid k, m, b \in \mathbb{R}, m \leq 0\} \cup \{\tilde{g}_{m,b} \mid m, b \in \mathbb{R}, m > 0\}$ ; wir haben im Vergleich zur Anschauungsebene jede Gerade mit positiver Steigung durch die entsprechende Knickgerade ersetzt.

**Satz 2.2** ( $\mathbb{P}, \mathbb{G}'$ ) mit  $\mathbb{P} = \mathbb{R}^2$  und  $\mathbb{G}'$  wie oben ist eine affine Ebene, die sogenannte *Moultonebene*.<sup>6</sup>

**Beweis:** (AE 1): Um die Existenz der eindeutigen Verbindungsgeraden zweier Punkte  $P = (p_1, p_2)$  und  $Q = (q_1, q_2)$  nachzuweisen, unterscheiden wir folgende Fälle:

1. Fall: Für  $p_1 = q_1$  ist wie in der Anschauungsebene  $g_{p_1} = g_{q_1}$  die eindeutig bestimmte Gerade durch  $P$  und  $Q$ .

<sup>6</sup>Benannt nach F. R. Moulton (1877–1952), der 1902 als Erster Ebenen mit geknickten Geraden untersucht hat.

2. Fall: Wir gehen o.B.d.A. von  $p_1 < q_1$  aus. Für  $p_2 \geq q_2$  berechnen wir die eindeutige Gerade  $PQ = g_{m,b}$  genau wie in der Anschauungsebene (siehe Satz 1.2), es ist  $m = \frac{q_2 - p_2}{q_1 - p_1}$  und  $b = \frac{p_2 q_1 - p_1 q_2}{q_1 - p_1}$ .

Aufpassen müssen wir nur, falls  $p_2 < q_2$  ist. Gesucht ist eine Knickgerade  $\tilde{g}_{m,b}$  mit positiver Steigung. Je nach Lage von  $P$  und  $Q$  (links oder rechts von der  $y$ -Achse) müssen unterschiedliche Gleichungssysteme gelöst werden:

$$\begin{aligned} (1) \quad p_1 < q_1 \leq 0: \quad & mp_1 + b = p_2, \quad mq_1 + b = q_2 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{q_2 - p_2}{q_1 - p_1} \quad \text{und} \quad b = \frac{p_2 q_1 - p_1 q_2}{q_1 - p_1}. \\ (2) \quad p_1 \leq 0 < q_1: \quad & mp_1 + b = p_2, \quad 2mq_1 + b = q_2 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{q_2 - p_2}{2q_1 - p_1} \quad \text{und} \quad b = \frac{2p_2 q_1 - p_1 q_2}{2q_1 - p_1}. \\ (3) \quad 0 < p_1 < q_1: \quad & 2mp_1 + b = p_2, \quad 2mq_1 + b = q_2 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{q_2 - p_2}{2(q_1 - p_1)} \quad \text{und} \quad b = \frac{p_2 q_1 - p_1 q_2}{q_1 - p_1}. \end{aligned}$$

In jedem der drei Fälle erhalten wir eine eindeutige Lösung, Axiom (AE 1) ist erfüllt.

(AE 2): Sei  $P = (p_1, p_2)$ ,  $g \in \mathbb{G}'$ , gesucht ist  $(P, g)$ . Wir geben nur das Ergebnis an:

$$\begin{aligned} 1. \text{ Fall} \quad g = g_k & \Rightarrow (P, g) = g_{p_1} \\ 2. \text{ Fall} \quad g = g_{m,b} & \Rightarrow (P, g) = g_{m, p_2 - mp_1} \\ 3. \text{ Fall} \quad g = \tilde{g}_{m,b} & \Rightarrow (P, g) = \tilde{g}_{m,c} \text{ mit } m * p_1 + c = p_2, \text{ also } c = \begin{cases} p_2 - mp_1 & \text{für } p_1 < 0 \\ p_2 - 2mp_1 & \text{für } p_1 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

(AE 3): Die Punkte  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$  liegen nicht kollinear.

*Beispiel:* Für  $P = (-1, 0)$  und  $Q = (1, 2)$  erhalten wir  $PQ = \tilde{g}_{\frac{2}{3}, \frac{2}{3}}$ .

Der Beweis von (AE 1) kann übrigens auch ganz anders mit Hilfsmittel aus der Analysis (Stichworte: streng monotone, stetige Funktionen) durchgeführt werden. Ferner kann die Moultonenebene verallgemeinert werden, indem man zum Beispiel nicht (nur) an der  $y$ -Achse, sondern (zusätzlich) an der  $x$ -Achse (irgendwie) knickt.

### 3 Isomorphie und Kollineationen

Wieviele verschiedene affine Ebenen haben Sie bisher kennengelernt? Möglicherweise wird Ihre Antwort auf diese Frage „5“ lauten; denn Sie kennen neben dem Minimalmodell und der Ebene mit neun Punkten die Anschauungs- und Moultonenebene sowie das Sphärenmodell. Aber was heißt eigentlich verschieden? Unterschiedliche Darstellungen beispielsweise des Minimalmodells (Stichworte Tetraeder bzw.  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ) ergeben keine verschiedenen Ebenen. Andererseits sind endliche Ebenen mit unterschiedlich vielen Punkten garantiert verschieden. Damit affine Ebenen *nicht* verschieden sind, muss es also mindestens eine bijektive Abbildung zwischen den Punktmenge geben. Zur Anschauungsebene und zur Moultonenebene gehören dieselben Punkte, sind sie deshalb vielleicht doch nicht verschieden? Und was ist mit dem Sphärenmodell? Gibt es eine Bijektion zwischen den Punkten auf der Einheitssphäre (ohne Nordpol) und  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ?

Wir wollen in diesem Abschnitt die Frage untersuchen, wie stark sich Anschauungsebene, Sphärenmodell und Moultonenebene voneinander unterscheiden.

**Def 3.1** Affine Ebenen  $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$ ,  $(\mathbb{P}', \mathbb{G}')$  heißen *isomorph*, wenn eine Bijektion  $\varphi : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}'$  existiert mit  $\varphi(g) := \{\varphi(P) \mid P \in g\} \in \mathbb{G}'$  für alle  $g \in \mathbb{G}$ . Die Abbildung  $\varphi$  heißt *Isomorphismus* oder *Kollineation*.

Kollineationen bilden nicht nur Punkte bijektiv aufeinander ab, sondern sie erhalten zusätzlich die kollineare Lage von Punkten – daher der Name. Bei affinen Ebenen kommt es sehr darauf an, welche Punkte gemeinsam auf einer Geraden liegen und welche nicht. Isomorphe Ebenen verhalten sich bezüglich dieser Eigenschaft völlig gleich. Sie sind für uns nicht zu unterscheiden bzw. *nicht verschieden*; man sagt, sie besitzen die gleiche Struktur.<sup>7</sup>

Wir halten fest: Wenn zwischen affinen Ebenen mindestens eine Kollineation existiert, sind diese Ebenen isomorph, zu isomorphen Ebenen gehört immer mindestens eine Kollineation. Etwas unpräziser kann man sagen, dass jede Kollineation Geraden bijektiv auf Geraden abbildet. Wir werden in den Beispielen Bijektionen kennenlernen, die keine Kollineationen sind. Auch unabhängig von der Frage nach Isomorphie kann man sich mit Kollineationen innerhalb einer affinen Ebene beschäftigen, wenn man zum Beispiel wissen will, ob eine Bijektion „geradentreu“ ist.

Eine bijektive, strukturerhaltende Abbildung einer affinen Ebene auf sich kann man statt Kollineation mathematisch vornehmer auch Automorphismus nennen.

Bei den folgenden Beispielen beschränken wir uns auf Kollineationen (Automorphismen) der Anschauungsebene:

*Beispiele:* 1) Kollineationen haben Sie (wenn auch nicht unter diesem Namen) bereits in der linearen Algebra im zweiten Semester kennengelernt, damals ging es um geometrische Transformationen und lineare Abbildungen: Jede Spiegelung an einer Geraden durch  $(0, 0)$  und jede Drehung um  $(0, 0)$  ist eine Kollineation.

2) Translationen (Verschiebungen) in der Anschauungsebene sind ebenfalls Kollineationen, mit Ausnahme der Identität handelt es sich aber nicht um lineare Abbildungen (warum nicht?).

3) Die Abbildung  $\alpha : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x, y^3) \end{cases}$  ist bijektiv, aber keine Kollineation; denn  $\alpha(g_{1,0}) \notin \mathbb{G}$ .

Jede Kollineation ist bijektiv und besitzt deshalb eine Umkehrabbildung. Mit Hilfe von Satz 1.3<sup>8</sup> kann man leicht beweisen, dass mit  $\varphi$  auch die Umkehrabbildung  $\varphi^{-1}$  eine Kollineation ist:

**Satz 3.1** Wenn  $\varphi$  eine Kollineation von einer affinen Ebene  $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$  auf eine affine Ebene  $(\mathbb{P}', \mathbb{G}')$  ist, ist  $\varphi^{-1}$  eine Kollineation von  $(\mathbb{P}', \mathbb{G}')$  auf  $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$ .

**Beweis:**<sup>9</sup> Zu zeigen ist  $\varphi^{-1}(g') \in \mathbb{G}$  für alle Geraden  $g'$ . Da auf jeder Geraden mindestens zwei Punkte liegen, ist  $g' = A'B'$  mit geeigneten Punkten  $A', B' \in \mathbb{P}'$ . Wegen der Bijektivität von  $\varphi$  gibt es verschiedene Punkte  $A = \varphi^{-1}(A')$  und  $B = \varphi^{-1}(B')$ , die ihrerseits die Gerade  $AB$  in  $\mathbb{G}$  festlegen.

Wegen  $\varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B) = A'B' = g'$  ist  $\varphi^{-1}(g') = \varphi^{-1}(\varphi(AB)) = AB = g$ .

Leicht einzusehen ist folgende, eventuell als Übungsaufgabe zu beweisende Eigenschaft von Kollineationen:

**Satz 3.2** Kollineationen erhalten Parallelität.

Wie verhält es sich nun mit der Anschauungsebene, der Moultonenebene und dem Sphärenmodell in Bezug auf Isomorphie?

<sup>7</sup>Herr Prof. Werner hat in seiner Vorlesung (genau wie ich in meiner) den Begriff isomorph bei Gruppen benutzt. Die damalige Erkenntnis lautete, dass für Mathematiker isomorphe Gruppen nicht wirklich verschieden sind.

<sup>8</sup>der besagt: Auf jeder Geraden einer affinen Ebene liegen mindestens zwei Punkte.

<sup>9</sup>Kein Prüfungstoff

**Satz 3.3** Sphärenmodell und Anschauungsebene sind isomorphe affine Ebenen.

**Beweis:** Der Beweis gliedert sich in drei Teile, von denen wir nur die ersten beiden explizit durchführen werden:

- 1) Konstruktion einer Abbildung  $\tau : \mathcal{S}' \rightarrow \mathbb{F} := \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$
- 2) Nachweis der Bijektivität von  $\tau$  (dann ist natürlich auch die entsprechende Abbildung ohne dritte Komponente 0, also von  $\mathcal{S}'$  auf  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , bijektiv).
- 3) Nachweis der Strukturerhaltung von  $\tau$

Zu 1): Für jeden Punkt  $X = (u, v, w) \in \mathcal{S}'$  gilt  $u^2 + v^2 + w^2 = 1$  mit  $w \neq 1$  (sonst wäre  $X$  der ausgeschlossene Nordpol  $N$ ). Wir bilden die Raumgerade durch  $N$  und  $X$ :  $NX = \{N + \lambda(X - N) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(\lambda u, \lambda v, 1 + \lambda(w - 1)) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ . Diese Raumgerade schneidet die Ebene  $\mathbb{F}$  in genau einem Punkt  $P = (p_1, p_2, 0)$ .

Diese Zuordnung  $X \mapsto P$  dient uns als Grundlage für die gesuchte Abbildung  $\tau : \mathcal{S}' \rightarrow \mathbb{F}$ : Wir betrachten die dritte Komponente von  $P$ . Wegen  $P \in NX$  hat sie die Gestalt  $1 + \lambda(w - 1)$ , wegen  $P \in \mathbb{F}$  muss sie den Wert 0 annehmen, also  $1 + \lambda(w - 1) = 0 \iff \lambda = \frac{1}{1-w}$ .

Diesen Wert für  $\lambda$  setzen wir in die beiden ersten Komponenten von  $P \in NX$  ein. Weil wir für jeden Punkt von  $\mathcal{S}'$  analog vorgehen können, erhalten wir insgesamt die Abbildung

$$\tau : \begin{cases} \mathcal{S}' & \rightarrow & \mathbb{F} \\ (u, v, w) & \mapsto & \left( \frac{u}{1-w}, \frac{v}{1-w}, 0 \right) \end{cases}$$

Zu 2): *Beh.*:  $\tau$  ist injektiv. *Bew.*: Wir zeigen für beliebige Punkte  $X$  und  $X'$  von  $\mathcal{S}'$ , dass aus  $\tau(X) = \tau(X')$  stets  $X = X'$  folgen muss, dass also verschiedene Punkte verschiedene Bilder haben müssen.

Seien  $X = (u, v, w)$ ,  $X' = (u', v', w') \in \mathcal{S}'$  Punkte mit  $\tau(X) = \tau(X')$ , also  $u^2 + v^2 + w^2 = 1 = u'^2 + v'^2 + w'^2$  mit  $\frac{u}{1-w} = \frac{u'}{1-w'}$  und  $\frac{v}{1-w} = \frac{v'}{1-w'}$  (\*).

Wir untersuchen  $1 - w'^2$ :

$$\text{Es ist } 1 - w'^2 = u'^2 + v'^2 = \left( \frac{u}{1-w} \right)^2 (1 - w')^2 + \left( \frac{v}{1-w} \right)^2 (1 - w')^2 = \frac{u^2 + v^2}{(1-w)^2} (1 - w')^2 = \frac{1 - w^2}{(1-w)^2} (1 - w')^2$$

$$\iff (1 - w')(1 + w') = \frac{(1-w)(1+w)}{(1-w)^2} (1 - w')^2 \iff 1 + w' = \frac{1+w}{1-w} (1 - w')$$

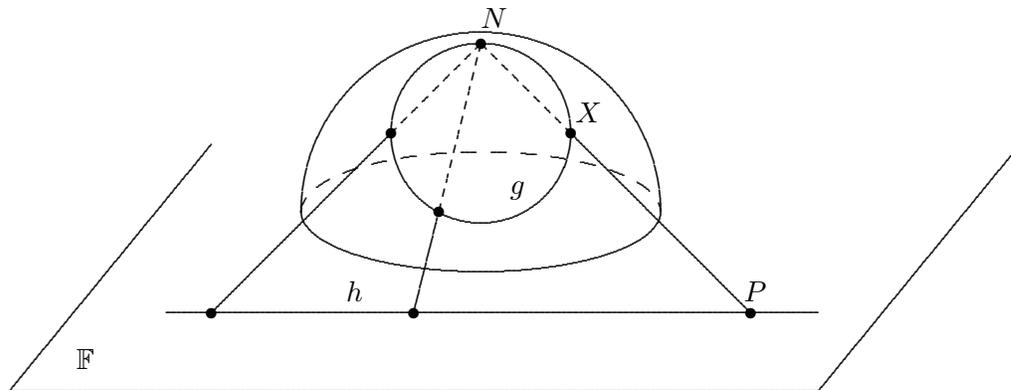
$$\iff (1 + w')(1 - w) = (1 + w)(1 - w') \iff w' - w = w - w' \iff w' = w$$

Dies eingesetzt in (\*) ergibt  $u = u'$  und  $v = v'$ , also  $X = X'$ .

*Beh.*:  $\tau$  ist surjektiv. *Bew.*: Gesucht ist zu jedem  $P = (x, y, 0) \in \mathbb{F}$  ein Punkt  $X \in \mathcal{S}'$  mit  $\tau(X) = P$ , d.h., wir suchen den Schnittpunkt der Raumgeraden  $NP = \{N + \lambda(P - N) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(\lambda x, \lambda y, 1 - \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$  mit  $\mathcal{S}'$ :

$$(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2 + (1 - \lambda)^2 = 1, \lambda \neq 0 \iff \lambda^2(x^2 + y^2 + 1) = 2\lambda \implies \lambda = \frac{2}{x^2 + y^2 + 1}$$

$$\implies X = \left( \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \right) \text{ ist das gesuchte Urbild.}$$



Zu 3): Sei  $\rho : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{R}^2$  die Bijektion  $(x, y, 0) \mapsto (x, y)$ . Als Verkettung von Bijektionen ist auch  $\alpha := \rho \circ \tau : \mathcal{S}' \rightarrow \mathbb{R}^2$  bijektiv. Durch teilweise umfangreiche Rechnung kann man zeigen, dass  $\alpha$  eine Kollineation ist. Wir machen uns dies nur anschaulich klar:

Zu jeder Geraden  $g$  des Sphärenmodells (= Kreis auf  $\mathcal{S}$  durch  $N$  ohne  $N$ ) existiert genau eine Ebene  $\mathbb{E} \subset \mathbb{R}^3$  mit  $g \subset \mathbb{E}$ .  $\mathbb{E} \cap \mathbb{F}$  ist eine eindeutig bestimmte Raumgerade  $h$ ,  $\rho(h)$  ist eine Gerade der Anschauungsebene. Insgesamt wird so jede Gerade des Sphärenmodells auf eine Gerade der Anschauungsebene abgebildet.

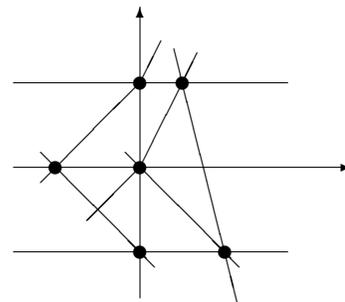
*Frage* (als Übungsaufgabe): Wie sieht das Urbild von  $g_1$  unter  $\alpha$  aus?

Die Abbildung  $\tau : \mathcal{S}' \rightarrow \mathbb{F}$  aus Satz 3.3, die auch in anderen Zusammenhängen von Bedeutung ist, heißt *stereographische Projektion*.

**Satz 3.4** Moultonebene und Anschauungsebene sind nicht isomorph.

**Beweisidee:** Unter Ausnutzung der Sätze 3.1 und 3.2, die besagen, dass die Parallelität von Geraden bei Anwenden von Kollineationen in beiden Richtungen erhalten bleibt, wird ein Widerspruchsbeweis geführt.

Seien in der Moultonebene die Punkte  $A_1 = (0, 1)$ ,  $A_2 = (\frac{1}{2}, 1)$ ,  $B_1 = (-1, 0)$ ,  $B_2 = (0, 0)$ ,  $C_1 = (0, -1)$ ,  $C_2 = (1, -1)$  gegeben. Die eindeutig festgelegten Geraden  $a = A_1A_2 = g_{0,1}$ ,  $b = B_1B_2 = g_{0,0}$ ,  $c = C_1C_2 = g_{0,-1}$  sind parallel, ebenso gilt  $A_1B_1 = \tilde{g}_{1,1} \parallel \tilde{g}_{1,0} = A_2B_2$ ,  $B_1C_1 = g_{-1,-1} \parallel g_{-1,0} = B_2C_2$ . Wie aus der Zeichnung zu entnehmen bzw. leicht zu berechnen ist, gilt aber  $A_1C_1 = g_0 \not\parallel g_{-4,3} = A_2C_2$ .



Wären Moulton- und Anschauungsebene isomorph, müsste eine Kollineation  $\varphi$  existieren, die diese Konfiguration unter Erhaltung der vorliegenden Parallelitäten in die Anschauungsebene überführt. Es müsste gelten

$$\begin{aligned}
 \text{Moultonebene} &\rightarrow \text{Anschauungsebene} \\
 a \parallel b \parallel c &\mapsto \varphi(a) \parallel \varphi(b) \parallel \varphi(c) \\
 A_1B_1 \parallel A_2B_2 &\mapsto \varphi(A_1B_1) \parallel \varphi(A_2B_2) \\
 B_1C_1 \parallel B_2C_2 &\mapsto \varphi(B_1C_1) \parallel \varphi(B_2C_2)
 \end{aligned}$$

Durch einfache, aber umfangreiche Rechnung mit vielen Fallunterscheidungen folgt hieraus für die Anschauungsebene  $\varphi(A_1C_1) \parallel \varphi(A_2C_2)$ .

Jetzt ist der Widerspruch perfekt: Es kann keine Kollineation geben, die die nicht parallelen Geraden  $A_1C_1$  und  $A_2C_2$  der Moultonenebene auf die parallelen Geraden  $\varphi(A_1C_1)$  und  $\varphi(A_2C_2)$  der Anschauungsebene abbildet, also können Moultonenebene und Anschauungsebene nicht isomorph sein.

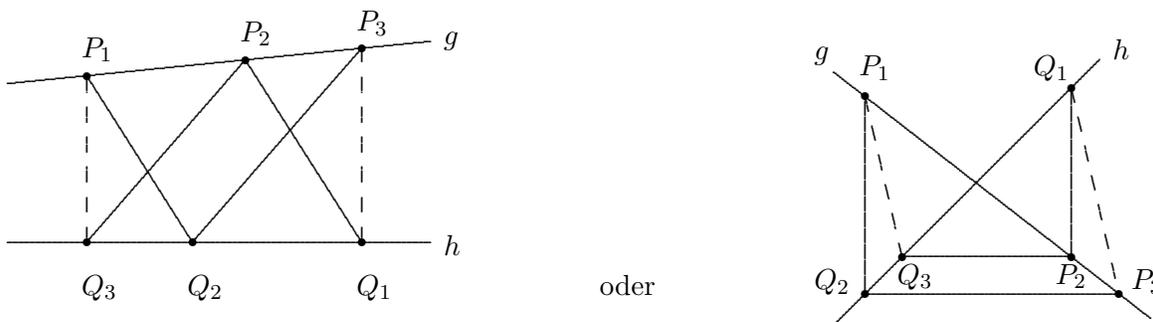
## 4 Schließungssätze

Am Ende des letzten Paragraphen konnten wir die Nichtisomorphie von Moulton- und Anschauungsebene nachweisen, weil anders als in der Moultonenebene in der Anschauungsebene aus der parallelen Lage von gewissen Geraden zwingend die Parallelität zweier weiterer Geraden folgt.

Jetzt wollen wir uns ausführlich mit weiteren Aussagen dieser Art beschäftigen. Aus historischen Gründen werden sie „Schließungssätze“ genannt, obwohl der Name Satz eigentlich nicht angebracht ist, denn im Gegensatz zur Anschauungsebene, in der man ihre Gültigkeit beweisen kann,<sup>10</sup> sind sie nicht in jeder affinen Ebene uneingeschränkt richtig. Wir werden sie daher wie üblich als Definitionen für beliebige affine Ebenen  $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$  formulieren.

**Def 4.1** (Großer Satz von Pappus,  $\approx 320$  n. Chr.)

In einer beliebigen affinen Ebene gilt der große Satz von Pappus :  $\Leftrightarrow$  Seien  $g, h$  verschiedene Geraden, seien  $P_i \in g \setminus h$ ,  $Q_i \in h \setminus g$  für  $i = 1, 2, 3$  Punkte mit  $P_1Q_2 \parallel P_2Q_1$  und  $P_2Q_3 \parallel P_3Q_2$ . Dann folgt  $P_1Q_3 \parallel P_3Q_1$ .



Wir werden den großen Satz von Pappus mit (P) abkürzen. Wenn (P) in einer affinen Ebene gültig ist, spricht man von einer *pappusschen affinen Ebene*.

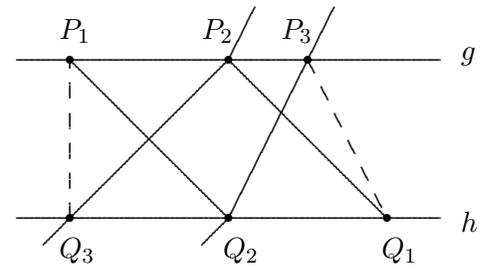
Setzt man in Definition 4.1 zusätzlich die Parallelität der sogenannten *Trägergeraden*  $g$  und  $h$  voraus, liegt der *kleine Satz von Pappus* (p) vor. Weil (p) lediglich ein Spezialfall von (P) ist, notieren wir als einfache Erkenntnis

**Satz 4.1** In jeder affinen Ebene gilt (P)  $\Rightarrow$  (p).

*Beispiele:* 1) In der Anschauungsebene gelten (P) und (p), sie ist eine pappussche affine Ebene.

<sup>10</sup>Daher der Name Satz. Früher war die Anschauungsebene die einzige bekannte affine Ebene, und in ihr handelt es sich bei den Schließungssätzen in der Tat um beweisbare Sätze.

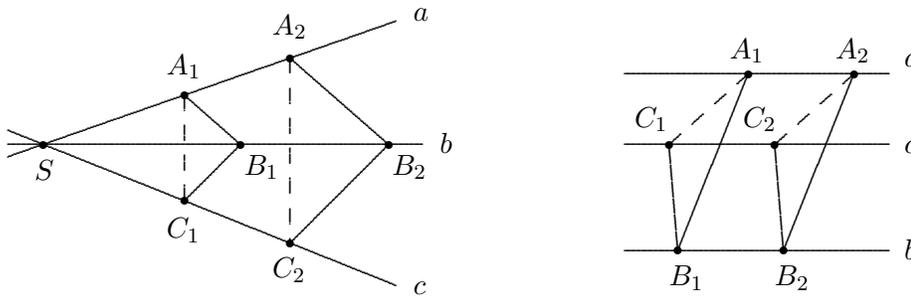
2) In der Moultebene gelten (P) und (p) nicht, denn für  $P_1 = (-1, 1)$ ,  $P_2 = (0, 1)$ ,  $P_3 = (\frac{1}{2}, 1) \in g = g_{0,1}$  und  $Q_1 = (1, 0)$ ,  $Q_2 = (0, 0)$ ,  $Q_3 = (-1, 0) \in h = g_{0,0}$  gelten zwar  $(P_1Q_2 = g_{-1,0}) \parallel (P_2Q_1 = g_{-1,1})$  und  $(P_2Q_3 = \tilde{g}_{1,1}) \parallel (P_3Q_2 = \tilde{g}_{1,0})$ , aber  $(P_1Q_3 = g_{-1}) \not\parallel (P_3Q_1 = g_{-2,2})$ . Wir haben sechs Punkte gefunden, die zwar die Voraussetzungen, nicht aber die Folgerung von (p) und von (P) erfüllen.



**Def 4.2** (Großer Satz von Desargues, 1593 – 1662, (D))

Seien  $a, b, c$  paarweise verschiedene kopunktuale Geraden mit  $S \in a \cap b \cap c$ , seien  $A_i \in a$ ,  $B_i \in b$ ,  $C_i \in c$  für  $i = 1, 2$  von  $S$  verschiedene Punkte mit  $A_1B_1 \parallel A_2B_2$ ,  $B_1C_1 \parallel B_2C_2$ . Dann folgt  $A_1C_1 \parallel A_2C_2$ .

Gilt (D) in einer affinen Ebene, spricht man von einer *desarguesschen affinen Ebene*. Die Anschauungsebene ist so eine desarguessche Ebene. Ersetzt man in Definition 4.2 die Voraussetzung  $a, b, c$  kopunktual durch  $a, b, c$  parallel, liegt der sogenannte *kleine Satz von Desargues* vor, abgekürzt durch (d).



Wie bereits im letzten Kapitel gesehen, gilt (d) nicht in der Moultebene.

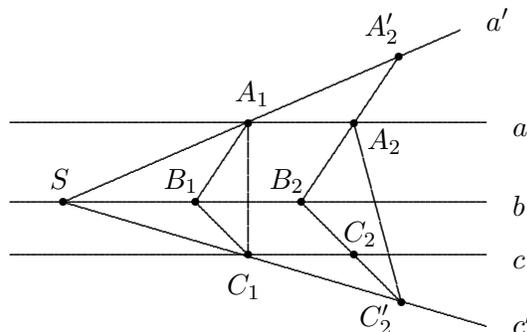
Anders als bei dem kleinen und großen Satz von Pappus ist (d) auf Grund der geänderten Voraussetzungen kein Spezialfall von (D). Trotzdem gilt

**Satz 4.2** Sei  $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$  eine beliebige affine Ebene. Dann gilt (D)  $\Rightarrow$  (d).

**Beweisskizze:** Der Beweis erfolgt durch Widerspruch: Ausgehend von Punkten, von denen man annimmt, dass sie zwar den Voraussetzungen, nicht aber der Folgerung von (d) genügen, konstruiert man weitere Punkte, auf die der gültige Schließungssatz (D) angewandt wird. Hieraus ergeben sich Widersprüche zur Lage der Punkte, mit denen der Beweis gestartet wurde.

Angenommen, in einer desarguesschen affinen Ebene gilt (d) nicht, d.h., es existieren Geraden  $a \parallel b \parallel c$  und Punkte  $A_1, A_2 \in a$ ,  $B_1, B_2 \in b$ ,  $C_1, C_2 \in c$  mit  $A_1B_1 \parallel A_2B_2$  und  $B_1C_1 \parallel B_2C_2$ , aber  $A_1C_1 \not\parallel A_2C_2$ .

Wie man leicht sieht, sind unter dieser Annahme alle beteiligten Punkte  $A_1, \dots, C_2$  paarweise verschieden und es muss gelten  $A_1C_1 \not\parallel B_1C_1 \parallel B_2C_2$ . Sei  $C'_2 := B_2C_2 \cap (A_2, A_1C_1)$ .



Durch einfache, teilweise aber Zeit kostende Überlegungen erkennt man:  $C'_2 \notin b$ ,  $C'_2 \notin c$ ,  $C'_2 \neq C_1$ .

Damit existiert eindeutig die Gerade  $c' = C_1C'_2$ . Da man  $c' \parallel b$  leicht widerlegen kann, gibt es den Schnittpunkt  $S := b \cap c'$ .

Als nächstes zeigt man  $S \neq C_1, A_1, B_1, B_2, C'_2$ . Insbesondere folgt die Existenz der Geraden  $a' = SA_1$ , die verschieden von  $b$  und  $c'$  ist (leicht einzusehen) und für die gilt  $a' \not\parallel A_2B_2$  (sonst gibt es einen Widerspruch), also existiert  $A'_2 := a' \cap A_2B_2$ .

Nachdem man überlegt hat, dass  $A'_2 \neq S$  gelten muss, kann man (D) auf die Geraden  $a', b, c'$  und auf die Punkte  $S, A_1, A'_2, B_1, B_2, C_1, C'_2$  anwenden und erhält  $A_1C_1 \parallel A'_2C'_2$ .

Wegen  $A_1C_1 \parallel (A_2, A_1C_1) = A_2C'_2$  liegen  $A_2, A'_2, C'_2$  kollinear.

Zuletzt macht man sich  $A_2 \neq A'_2$  klar. Wegen  $B_2 \in A_2A'_2$  folgt die kollineare Lage von  $A_2, B_2, C'_2$ . Dieser Widerspruch ist nicht mehr zu retten, die Ungültigkeit von (d) in Ebenen, in denen (D) erfüllt ist, ist widerlegt.

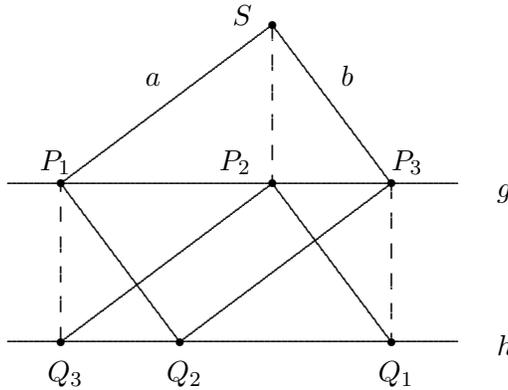
Es gibt weitere Verbindungen zwischen den Schließungssätzen:

**Satz 4.3** Sei  $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$  eine beliebige affine Ebene. Dann gilt (d)  $\Rightarrow$  (p).

**Beweis:** Auf Punkte, die die Voraussetzungen von (p) erfüllen, wird durch Konstruktion weiterer Punkte zweimal (d) angewandt. Auf einfache Weise folgt dann die Behauptung von (p).

Die Voraussetzungen von (p) seien wie in der Skizze erfüllt mit  $P_2Q_3 \not\parallel P_2Q_1$ .<sup>11</sup>

Wir setzen  $a := (P_1, P_3Q_2)$ ,  $b := (P_3, P_2Q_1)$  und  $S := a \cap b$ .



Wir wenden (d) zweimal mit unterschiedlichen Trägergeraden an:

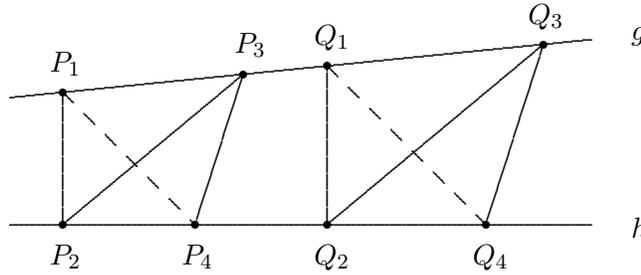
$$\begin{aligned} a \parallel P_2Q_3 \parallel P_3Q_2, \quad P_1Q_2 \parallel b, \quad (h = Q_2Q_3) \parallel (g = P_2P_3) &\Rightarrow P_1Q_3 \parallel SP_2 \\ b \parallel P_2Q_1 \parallel P_1Q_2, \quad a \parallel P_3Q_2, \quad (g = P_1P_2) \parallel (h = Q_2Q_1) &\Rightarrow P_3Q_1 \parallel SP_2 \end{aligned}$$

und erhalten aus der Transitivität der Parallelität die Behauptung  $P_1Q_3 \parallel P_3Q_1$ .

**Def 4.3** (Großer und kleiner Scherensatz, (S) bzw. (s))

Seien  $g, h \in \mathbb{G}$  im Fall (S) beliebig bzw. parallel (für (s)). Für  $P_1, P_3, Q_1, Q_3 \in g \setminus h$ ,  $P_2, P_4, Q_2, Q_4 \in h \setminus g$  gelte  $P_iP_{i+1} \parallel Q_iQ_{i+1}$  für  $i = 1, 2, 3$ . Dann folgt  $P_1P_4 \parallel Q_1Q_4$ .

<sup>11</sup>Für  $P_2Q_3 \parallel P_2Q_1$  gilt die Behauptung unabhängig von der Gültigkeit von (d). Aus  $P_3Q_2 \parallel P_2Q_3 \parallel P_2Q_1 \parallel P_1Q_2$  folgt  $P_1 = P_3$  und  $Q_1 = Q_3$ , also sogar  $P_1Q_3 = P_3Q_1$ .

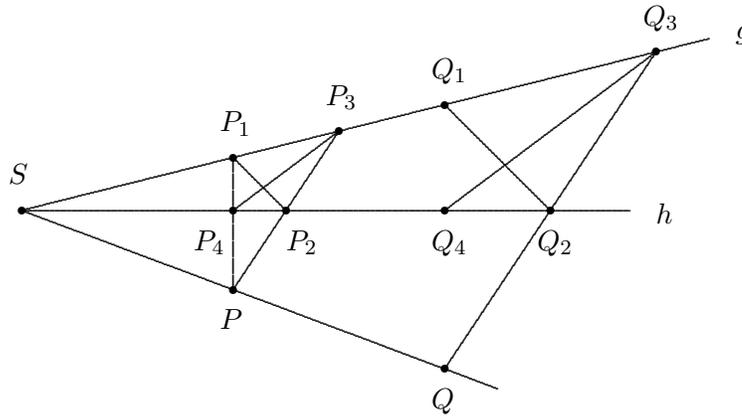


**Satz 4.4** Sei  $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$  eine beliebige affine Ebene. Dann gilt (D)  $\iff$  (S).

**Beweisskizze:** Beide Richtungen dieses Beweises sind komplizierter als die Beweise vorher. Sie erfordern einige Fallunterscheidungen, bevor man teilweise mehrfach den jeweils vorausgesetzten Schließungssatz bzw. Folgerungen daraus (Satz 4.3) benutzen kann.

„ $\Rightarrow$ “:  $P_i, Q_i \in \mathbb{P}, g, h \in \mathbb{G}$  mögen die Voraussetzungen von (S) erfüllen, zu zeigen ist  $P_1P_4 \parallel Q_1Q_4$ .

1. Fall  $g \cap h = S$ :



Weil die Behauptung für  $P_1P_4 \parallel P_2P_3$  und  $Q_1Q_4 \parallel Q_2Q_3$  direkt folgt, können wir oBdA von  $P_1P_4 \parallel P_2P_3$  ausgehen (notfalls vertausche man die Buchstaben  $P_i$  und  $Q_i$ ), es sei  $P := P_1P_4 \cap P_2P_3$ .

Wegen  $P \neq S$  und  $SP \not\parallel Q_2Q_3$  (indirekter Nachweis) existiert  $Q := SP \cap Q_2Q_3$ .

$SP = g$  oder  $SP = h$  ist nur möglich, falls einige der beteiligten Punkte zusammenfallen, in diesen Fällen folgt die Gültigkeit von (S) unmittelbar.

Ist  $SP \neq g, h$ , können wir (D) zweimal auf die Trägergeraden  $g, h, SP$  anwenden:

$$P_1P_2 \parallel Q_1Q_2, P_2P \parallel Q_2Q \Rightarrow P_1P \parallel Q_1Q \quad \text{und} \quad P_3P_4 \parallel Q_3Q_4, P_3P \parallel Q_3Q \Rightarrow P_4P \parallel Q_4Q$$

Weil die Punkte  $P, P_1, P_4$  kollinear liegen, gilt  $P_1P = P_4P$ , wir erhalten

$$Q_1Q \parallel (P_1P = P_4P) \parallel Q_4Q \Rightarrow P_1P_4 \parallel Q_1Q_4$$

2. Fall  $g \parallel h$ : Der Beweis verläuft ähnlich zum ersten Fall. Statt  $PS$  benutzt man die Gerade  $(P, g)$  und an Stelle von (D) wird mit (d) argumentiert, was wegen Satz 4.2 erlaubt ist.

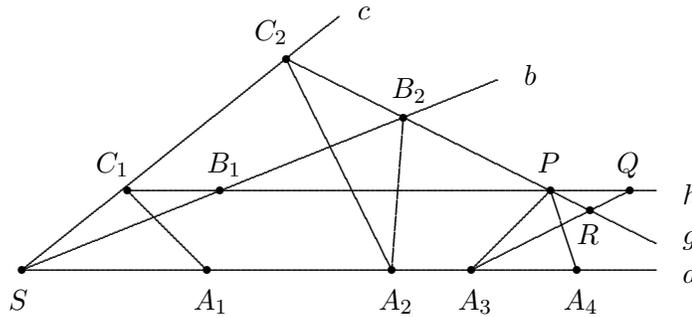
„ $\Leftarrow$ “:  $S, A_i, B_i, C_i \in \mathbb{P}, a, b, c \in \mathbb{G}$  mögen die Voraussetzungen von (D) erfüllen<sup>12</sup>, zu zeigen ist  $B_1C_1 \parallel B_2C_2$ .

Bei den folgenden Überlegungen gehen wir davon aus, dass  $A_1, \dots, C_2$  paarweise verschieden sind und  $A_i, B_i, C_i$  nicht kollinear liegen (sonst folgt (D) trivialerweise).

<sup>12</sup>Wir setzen  $A_1B_1 \parallel A_2B_2$  und  $A_1C_1 \parallel A_2C_2$  voraus.

Angenommen,  $B_1C_1 \not\parallel B_2C_2$ , d.h., es existiert  $P := B_1C_1 \cap B_2C_2$ .

1. Fall  $P \notin a$ : Es seien  $g := B_2C_2$  und  $h := B_1C_1$ .



Wir erhalten weitere Punkte:  $A_3 := a \cap (P, c)$ , es ist  $A_3 \notin g, h$ ;  $A_4 := a \cap (P, A_1C_1)$  mit  $A_4 \notin g, h$ ;  $Q := h \cap (A_3, b)$  mit  $Q \notin a$  und  $R := g \cap A_3Q$ ,  $R \notin a$ .

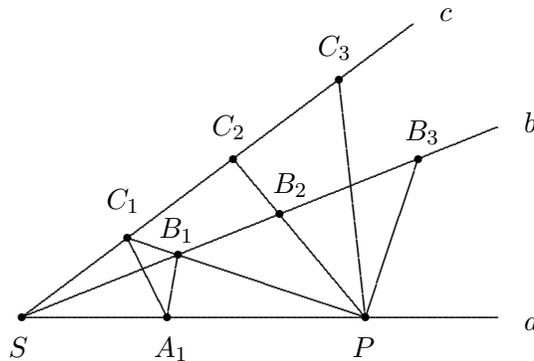
Wir wenden (S) mit den Trägergeraden  $h, a$  und  $g, a$  zweimal an :

$$\begin{aligned} C_1S \parallel PA_3, \quad C_1A_1 \parallel PA_4, \quad B_1S \parallel QA_3 &\Rightarrow B_1A_1 \parallel QA_4 \\ C_2S \parallel PA_3, \quad C_2A_2 \parallel PA_4, \quad B_2S \parallel RA_3 &\Rightarrow B_2A_2 \parallel RA_4 \end{aligned}$$

$\Rightarrow RA_4 = QA_4$ , weitere Überlegungen führen zu  $R = Q$  und  $P \neq R$  (beachte  $P \notin (A_3, b) \ni R$ )

$\Rightarrow B_2C_2 = PR = PQ = B_1C_1$ , Widerspruch!

2. Fall  $P \in a$ : Es seien  $C_3 := c \cap (P, A_1C_1)$  und  $B_3 := b \cap (P, A_1B_1)$ .



Wir erinnern uns an unsere Annahme  $B_1C_1 \not\parallel B_2C_2$ .  $B_3C_3$  kann also nicht zu beiden Geraden parallel sein. Sowohl  $B_2C_2 \not\parallel B_3C_3$  als auch  $B_1C_1 \not\parallel B_3C_3$  führt bei geeigneter Vorgehensweise zu Widersprüchen. daher muss  $B_1C_1 \parallel B_2C_2$  sein.<sup>13</sup>

**Korollar** Sei  $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$  eine beliebige affine Ebene. Dann gilt (d)  $\Rightarrow$  (s).

**Beweis:** Genau dies wurde zweiten Fall der Beweisrichtung „ $\Rightarrow$ “ bewiesen.

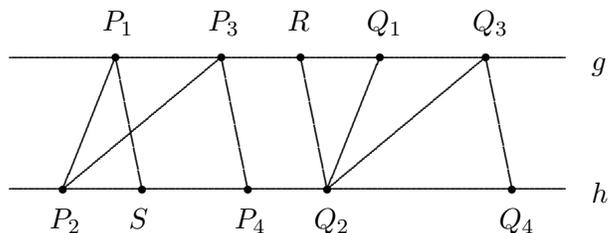
**Satz 4.5** Sei  $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$  eine beliebige affine Ebene. Dann gilt (P)  $\Rightarrow$  (S).

**Beweisskizze:** Die Vorgehensweise ist ähnlich zum Fall (d) $\Rightarrow$ (p), nur dass diesmal dreimal (P) benutzt werden muss, bevor die Gültigkeit von (S) folgt.

$P_i, Q_i \in \mathbb{P}, g, h \in \mathbb{G}$  mögen die Voraussetzungen von (S) erfüllen, zu zeigen ist  $P_1P_4 \parallel Q_1Q_4$ .

<sup>13</sup>Weitere Einzelheiten zu diesem Beweis findet man in R. Lingenberg, Grundlagen der Geometrie

Sei  $R := g \cap (Q_2, P_3P_4)$  und  $S := h \cap (P_1, P_3P_4)$ .



Wegen  $S \in h \setminus g$ ,  $R \in g \setminus h$  können wir (P) dreimal mit den Trägergeraden  $g$  und  $h$  anwenden:

$$\begin{aligned} P_1P_2 \parallel Q_1Q_2, \quad P_1S \parallel RQ_2 &\Rightarrow RP_2 \parallel Q_1S \\ P_3P_2 \parallel Q_3Q_2, \quad P_3P_4 \parallel RQ_2 &\Rightarrow RP_2 \parallel P_4Q_3 \\ P_1S \parallel Q_3Q_4, \quad Q_1S \parallel Q_3P_4 &\Rightarrow P_1P_4 \parallel Q_1Q_4 \end{aligned}$$

**Korollar** Sei  $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$  eine beliebige affine Ebene. Dann gilt (p)  $\Rightarrow$  (s).

**Satz 4.6** Sei  $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$  eine beliebige affine Ebene. Dann gilt (P)  $\Rightarrow$  (D).

**Beweis:** Satz 4.5, Satz 4.4

Wie bereits erwähnt, gelten alle Schließungssätze in der Anschauungsebene, wir werden dies aber nicht beweisen. Im krassen Gegensatz hierzu verhält sich die Moultonebene: Zu jedem Satz findet man Punkte und Geraden, die zwar den Voraussetzungen, nicht aber der Folgerung genügen.

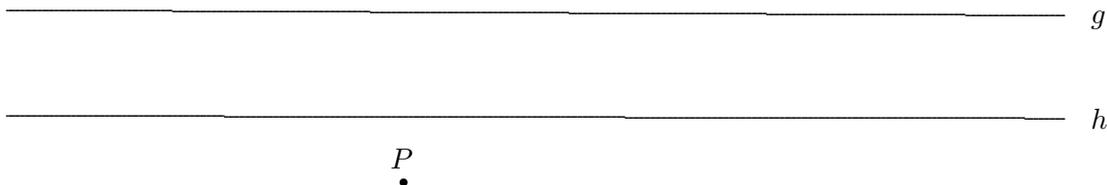
Es gibt ferner affine Ebenen, in denen (D), aber nicht (P) gilt; ebenso findet man Ebenen mit (d), in denen (D) nicht erfüllt ist. Die Schließungssätze können daher erfolgreich zu einer Klassifizierung der affinen Ebenen benutzt werden.

Es sind übrigens immer noch nicht alle Beziehungen zwischen den Schließungssätzen bekannt, offen ist beispielsweise die *Frage*: Gilt (p)  $\Rightarrow$  (d)?

Wir fassen unser Wissen zusammen:

$$(P) \Rightarrow (D) \iff (S) \Rightarrow (d) \Rightarrow (p) \Rightarrow (s)$$

und schließen das Kapitel mit einer praktischen Anwendung von (D) in der Anschauungsebene:



Seien  $g, h \in \mathbb{G}$  und  $P \in \mathbb{P}$  wie in der Skizze gegeben. Man konstruiere die Gerade durch  $P$ , die im Fall  $g \parallel h$  zu  $g$  und  $h$  parallel ist oder andernfalls durch den Schnittpunkt von  $g$  und  $h$  verläuft.

Die Lösung dieses Problems werden wir in den Übungen ermitteln.

## 5 Dilatationen

Wir wollen uns jetzt mit Abbildungen zwischen den Punkten einer affinen Ebene  $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$  beschäftigen. Wenn wir im Folgenden von Verschiebungen, Streckungen oder Drehungen reden, sind zunächst die (hoffentlich) aus dem Schulunterricht bekannten Abbildungen der Anschauungsebene gemeint, erst später werden wir diese Begriffe exakt definieren.  $\{P, Q\} \in \mathbb{P}_2$  bedeutet ab sofort, dass die Punkte  $P, Q \in \mathbb{P}$  verschieden sind.

**Def 5.1** Eine Abbildung  $\delta : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$  heißt *Dilatation* :  $\iff \delta(Q) \in (\delta(P), PQ) \quad \forall \{P, Q\} \in \mathbb{P}_2$ .

Bei jeder Dilatation müssen alle (nicht notwendig verschiedenen) Bildpunkte einer Geraden  $g$  auf einer zu  $g$  parallelen Geraden liegen. Dilatationen bilden Geraden auf (Teilmengen von) Geraden ab, es kann passieren, dass alle Punkte das gleiche Bild besitzen. In diesem Fall, der uns nicht weiter interessieren wird, liegt eine sogenannte *ausgeartete* Dilatation vor. Wir werden später beweisen, dass nicht ausgeartete Dilatationen jede Gerade auf eine dazu parallele Gerade abbilden.

*Beispiele:* 1) Die Identität ist eine Dilatation, die in jeder affinen Ebene vorkommt.

2) In der Anschauungsebene ist jede Verschiebung und jede Streckung eine Dilatation, da jede Gerade auf eine zu ihr parallele Gerade abgebildet wird.

3) Drehungen in der Anschauungsebene sind nur in Ausnahmefällen Dilatationen, nämlich wenn der Drehwinkel ein Vielfaches von  $\pi$  ist.

*Frage/Übung:* Welche Abbildungen im Minimalmodell sind Dilatationen?

Im Folgenden wollen wir Dilatationen genauer kennenlernen. Wieviel muss eigentlich von einer Dilatation bekannt sein, damit sie eindeutig bestimmt ist? Im folgenden Satz sehen wir, dass eine Dilatation bereits durch die Bilder zweier Punkte eindeutig festliegt.

**Satz 5.1** Seien  $\alpha, \beta$  Dilatationen,  $\{P, Q\} \in \mathbb{P}_2$  mit  $\alpha(P) = \beta(P) =: P', \alpha(Q) = \beta(Q) =: Q' \Rightarrow \alpha = \beta$ .

**Beweis:** Zu zeigen ist  $\alpha(R) = \beta(R)$  für alle Punkte  $R$ . Wir nehmen uns zuerst alle Punkte vor, die nicht auf  $PQ$  liegen, anschließend beschäftigen wir uns mit den Punkten auf  $PQ$ .

1. Fall  $R \notin PQ$ : Nach Definition der Dilatation ist  $\alpha(R) \in (\alpha(P), PR) = (\beta(P), PR) \ni \beta(R)$  und analog  $\alpha(R) \in (\alpha(Q), QR) = (\beta(Q), QR) \ni \beta(R)$ . Wegen  $PR \nparallel QR$  ist auch  $(\alpha(P), PR) \nparallel (\alpha(Q), QR)$ . Einerseits haben diese Geraden genau einen Schnittpunkt, andererseits liegen  $\alpha(R)$  und  $\beta(R)$  auf beiden Geraden. Dies geht nur im Fall  $\alpha(R) = \beta(R)$ , also unterscheiden sich die Abbildungen  $\alpha$  und  $\beta$  nicht für Punkte, die nicht auf  $PQ$  liegen.

2. Fall  $R \in PQ$ : Auf Grund des dritten Axioms (AE 3) gibt es einen Punkt  $S \notin PQ$ . Für diesen Punkt  $S$  gilt, wie im ersten Fall bewiesen,  $\alpha(S) = \beta(S)$ . Weil  $R \notin PS$ , wenden wir noch einmal den ersten Fall auf  $P, S, R$  an und erhalten die Behauptung  $\alpha(R) = \beta(R)$  auch für jeden Punkt auf  $PQ$ .

**Korollar** Jede Dilatation  $\delta$  mit zwei Fixpunkten ist die Identität.

**Beweis:** Für Fixpunkte  $P$  und  $Q$  gilt  $\delta(P) = P = id(P), \delta(Q) = Q = id(Q) \Rightarrow \delta = id$

Leider kann man Satz 5.1 nicht auf Kollineationen übertragen, beispielsweise besitzt jede Geradenspiegelung in der Anschauungsebene unendlich viele Fixpunkte, ist aber verschieden von der Identität. Wir wollen den Zusammenhang zwischen Kollineationen und Dilatationen klären:

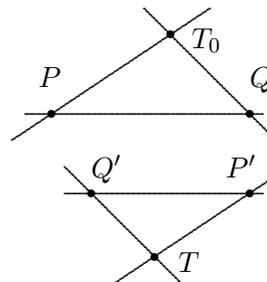
**Satz 5.2** Jede nicht ausgeartete Dilatation ist eine Kollineation.

**Beweis:** Nach Definition bilden Dilatationen Geraden auf Teilmengen von Geraden ab, es fehlt nur noch der Nachweis der Bijektivität. Im Folgenden sei  $\delta$  eine nicht ausgeartete Dilatation. Wir zeigen

1.  $\delta$  ist injektiv: Angenommen, für verschiedene  $A, B \in \mathbb{P}$  sei  $\delta(A) = \delta(B) =: P$ . Wir vergleichen  $\delta$  mit der ausgearteten Dilatation  $\delta_P$ , die jeden Punkt  $X$  auf  $P$  abbildet. Weil beide Dilatationen auf  $A$  und  $B$  übereinstimmen, gilt nach Satz 5.1  $\delta = \delta_P$ . Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung nicht ausgeartet, also muss  $\delta$  injektiv sein.

2.  $\delta$  ist surjektiv: Wir suchen zu einem beliebigen Punkt  $T$  ein Urbild. Da  $\delta$  nicht ausgeartet ist, gibt es  $\{P, Q\} \in \mathbb{P}_2$  mit  $P' = \delta(P) \neq \delta(Q) =: Q'$ . Falls  $T \in \{P', Q'\}$ , ist nichts mehr zu zeigen. Falls  $T \notin \{P', Q'\}$ , untersuchen wir zuerst die Möglichkeit  $T \notin P'Q'$  (Fall 2.1):

Es folgt  $TP' \nparallel TQ' \Rightarrow (P, TP') \nparallel (Q, TQ')$ , diese Geraden haben genau einen Schnittpunkt  $T_0$ , der nach Definition der Dilatation das gesuchte Urbild von  $T$  ist.



Für  $T \in P'Q'$  (Fall 2.2) wählen wir einen beliebigen Punkt  $S \notin P'Q'$ . Wie gerade gezeigt  $\exists S_0 \in \mathbb{P}$  mit  $\delta(S_0) = S$ ; jetzt wenden wir Fall 2.1 auf  $T \notin P'S$  an.<sup>14</sup>

Bezüglich der Verkettung als Verknüpfung bilden die nicht ausgearteten Dilatationen einer affinen Ebene eine Untergruppe aller Kollineationen; wir werden hierauf nicht näher eingehen. Weil ab jetzt ausschließlich nicht ausgeartete Dilatationen untersucht werden, vereinbaren wir zur Vereinfachung der Schreibarbeit, dass ab jetzt mit Dilatation stets eine nicht ausgeartete Dilatation gemeint ist.

**Def 5.2** Sei  $\alpha$  eine Kollineation.  $g \in \mathbb{G}$  heißt *Fixgerade* :  $\iff \forall P \in g : \alpha(P) \in g$

Fixgerade bedeutet also *nicht*, dass jeder Punkt auf ihr ein Fixpunkt ist, sondern nur, dass jeder ihrer Punkte nach der Abbildung wieder auf ihr liegt – eventuell an ganz anderer Stelle. Die folgenden *Beispiele* beziehen sich auf die Anschauungsebene:

1)  $\tau : (x, y) \mapsto (x + 1, y + 1)$  ist eine Dilatation mit Fixgerade  $g_{1,0}$ :  $\tau(g_{1,0}) = \{\tau((x, x)) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{((x + 1, x + 1)) \mid x \in \mathbb{R}\} = g_{1,0}$ . Keiner dieser Punkte ist ein Fixpunkt! *Frage:* Gibt es bei dieser Abbildung  $\tau$  weitere Fixgeraden?

2)  $(x, y) \mapsto (-x, -y)$  ist eine Dilatation. Jede Gerade durch  $(0, 0)$  ist eine Fixgerade mit jeweils einzigem Fixpunkt  $(0, 0)$ .

3)  $(x, y) \mapsto (y, -x)$  ist eine Kollineation, aber keine Dilatation, weil sich die Steigung von Geraden ändert. Es gibt keine Fixgerade, obwohl jede Gerade  $g$  einen Punkt besitzt, der wieder auf  $g$  abgebildet wird. (Warum? Einzelheiten eventuell in den Übungen.)

4)  $(x, y) \mapsto (x, -y)$  ist ebenfalls eine Kollineation und keine Dilatation (warum nicht?). Jede Gerade vom Typ  $g_k$  ist eine Fixgerade, ebenso die Gerade  $g_{0,0}$ . Jeder Punkt auf  $g_{0,0}$  ist ein Fixpunkt. Auch mit dieser Abbildung werden wir uns vielleicht in den Übungen beschäftigen.

Im Fall von Dilatationen besitzen Fixgeraden weitere interessante Eigenschaften.

<sup>14</sup>Vielleicht haben Sie es gemerkt: Wir sind ähnlich wie im Beweis von Satz 5.1 vorgegangen, in dem wir uns zuerst für die Punkte, die *nicht* auf einer speziellen Geraden liegen, interessiert haben. Anschließend haben wir das Verhalten der Punkte *auf* dieser Geraden untersucht.

**Satz 5.3** Für jede Dilatation  $\delta$  gilt

- a)  $g$  ist Fixgerade  $\iff \exists P \in g$  mit  $\delta(P) \in g$
- b) Der Schnittpunkt von Fixgeraden ist stets ein Fixpunkt.

**Beweis:** a) „ $\implies$ “ ist klar, weil die geforderte Eigenschaft für jeden Punkt auf  $g$  gelten muss. „ $\impliedby$ “: Sei  $P \in g$  mit  $\delta(P) \in g$ . Für jeden anderen Punkt  $Q \in g$  folgt dann  $\delta(Q) \in (\delta(P), PQ) = g$ , also ist  $g$  eine Fixgerade.

b) Sei  $P$  der eindeutig bestimmte Schnittpunkt von  $g$  und  $h$ . Weil  $g$  und  $h$  Fixgeraden sind, muss das Bild von  $P$  auf beiden Geraden liegen, es folgt  $\delta(P) \in g \cap h \implies P = \delta(P)$ .

Als Folgerung erhalten wir, dass bei Dilatationen  $\neq id$  alle Fixgeraden *im Büschel* liegen, d.h., sie sind entweder alle parallel oder sie haben alle genau einen Punkt gemeinsam (denn bei mehr als einem Schnittpunkt gibt es mehr als einen Fixpunkt, damit liegt die identische Abbildung vor).

Wieviele Fixpunkte kann eine Dilatation haben? Weil jede Dilatation mit mehr als einem Fixpunkt die Identität ist, gibt es nur drei Möglichkeiten: Kein Fixpunkt, ein Fixpunkt oder jeder Punkt ist Fixpunkt. Wir nutzen diese Tatsache, um Dilatationen an Hand der Anzahl ihrer Fixpunkte zu klassifizieren.

**Def 5.3** Eine Dilatation  $\tau$  heißt *Translation* :  $\iff \tau = id$  oder  $\tau$  besitzt keinen Fixpunkt.

Die Menge aller Translationen schreiben wir  $\mathcal{T}$ , bezüglich der Verkettung bilden alle Translationen eine Untergruppe der Gruppe aller Dilatationen.

*Beispiele:* 1) In der Anschauungsebene ist jede Abbildung  $(x, y) \mapsto (x + a, y + b)$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$  eine Translation (näheres eventuell in den Übungen). (Nur) diese Abbildungen haben Nichtmathematiker vor Augen, wenn sie an Translationen (= Verschiebungen) denken.

2) In der Minimalebene mit den vier Punkten  $A, B, C, D$  ist  $\tau : A \mapsto B \mapsto A, C \mapsto D \mapsto C$  eine Translation; denn diese Bijektion hat keinen Fixpunkt und bildet jede Gerade auf eine zu ihr parallele Gerade ab. Wird  $\tau$  zweimal hintereinander ausgeführt, erhält man erstaunlicherweise die identische Abbildung:  $\tau \circ \tau = id$ .

**Satz 5.4** Für  $\tau \in \mathcal{T} \setminus \{id\}$  bildet die Menge aller Fixgeraden ein Parallelbüschel.

**Beweis:** Eventuell Übungsaufgabe.

Wir haben gesehen, dass bei einer beliebigen Dilatation zwei Paare Punkt – Bildpunkt ausreichen, um die Abbildung eindeutig festzulegen. Bei Translationen geht es noch einfacher:

**Satz 5.5** Seien  $\tau_1, \tau_2$  Translationen mit  $\tau_1(P) = \tau_2(P)$  für ein  $P \in \mathbb{P}$ . Dann gilt  $\tau_1 = \tau_2$ .

**Beweis:** Sei  $\tau_1(P) = \tau_2(P) = P' \neq P$  (sonst liegt ein Fixpunkt vor und nach Definition 5.3 gilt  $\tau_1 = id = \tau_2$ ). Sei  $R \notin PP'$ . Nach den letzten beiden Sätzen ist  $\tau_i(R) \in (R, PP')$ . Für  $i = 1, 2$  gilt damit  $\tau_i(R) \in (R, PP') \cap (P', PR) \implies \tau_1(R) = \tau_2(R)$ , nach Satz 5.1 stimmen die Abbildungen überein.

Zu  $P, Q \in \mathbb{P}$  kann es in einer affinen Ebene höchstens eine Translation geben, die  $P$  auf  $Q$  abbildet. In der Anschauungsebene gibt es auch immer so eine Abbildung, zu  $P = (p_1, p_2), Q = (q_1, q_2)$  wähle man  $\tau((x, y)) := (x + (q_1 - p_1), y + (q_2 - p_2))$ . Dies trifft jedoch nicht auf jede affine Ebene zu:

*Behauptung:* In der Moultonebene existiert keine Translation, die  $P := (-1, 0)$  auf  $Q := (0, 0)$  abbildet.

*Beweis:*<sup>15</sup> Angenommen,  $\tau$  ist eine Translation mit  $\tau(P) = Q$ . Damit ist  $PQ = g_{0,0}$  und jede zu ihr parallele Gerade eine Fixgerade. Wir bestimmen  $\tau(R)$  für  $R = (0, 1)$ :

$$\tau(R) = (R, PQ) \cap (Q, PR) = \left(\frac{1}{2}, 1\right) =: R'$$

Wie finden wir das Bild von  $S = (0, -1)$  unter  $\tau$ ? Es muss gelten

$$\tau(S) \in (S, PQ) = g_{0,-1}, \quad \tau(S) \in ((Q, PS) = g_{-1,0}, \quad \tau(S) \in (R', RS) = g_{\frac{1}{2}}$$

Es gibt aber keinen gemeinsamen Schnittpunkt dieser drei Geraden!

**Def 5.4** Eine affine Ebene heißt *Translationsebene* :  $\iff \forall \{P, Q\} \in \mathbb{P}_2 \exists \tau \in \mathcal{T} : \tau(P) = Q$

Minimalmodell und Anschauungsebene sind Translationsebenen, die Moultonsebene ist keine Translationsebene. Ohne Beweis geben wir den folgenden Satz an, der eine Verbindung zu den Schließungssätzen herstellt:

**Satz 5.6** Eine affine Ebene ist genau dann eine Translationsebene, wenn in ihr der kleine Satz von Desargues (d) gilt.

Als nächstes beschäftigen wir uns mit den Dilatationen mit Fixpunkt.

**Def 5.5** Eine Dilatation  $\sigma$  heißt *Streckung* :  $\iff \sigma$  besitzt mindestens einen Fixpunkt.

Eine Streckung hat entweder genau einen Fixpunkt, der auch *Zentrum* genannt wird, oder es liegt die identische Abbildung vor. Die Identität ist als einzige Dilatation gleichzeitig Translation und Streckung.

*Beispiele:* 1) In der Anschauungsebene ist jede Abbildung  $(x, y) \mapsto (ax, ay)$  für  $a \neq 0$  eine Streckung; denn  $(0, 0)$  ist Fixpunkt,  $\sigma$  ist bijektiv und wegen  $\sigma(g_k) = g_{ak} \parallel g_k$ ,  $\sigma(g_{m,b}) = g_{m,ab} \parallel g_{m,b}$  liegt eine Dilatation vor.

2) In der Anschauungsebene ist die Abbildung  $(x, y) \mapsto (2x, 3y)$  keine Streckung;  $\sigma(g_{1,0}) = g_{\frac{3}{2},0} \not\parallel g_{1,0}$ .

3) In der affinen Ebene mit 9 Punkten und 12 Geraden gibt es zu jedem Punkt genau eine Streckung, die genau diesen Punkt fest lässt.

Im Gegensatz zu den Translationen bilden die Streckungen keine Untergruppe der Dilatationen. Um dies einzusehen, betrachten wir in der Anschauungsebene folgende Abbildungen:

1)  $\sigma((x, y)) = (-x, -y)$  ist eine Streckung.

2)  $\tau((x, y)) = (x - 1, y)$  ist eine Translation und keine Streckung.

3)  $(\tau^{-1}\sigma\tau)((x, y)) = \tau^{-1}(\sigma((x - 1, y))) = \tau^{-1}((1 - x, -y)) = (1 - x + 1, -y) = (2 - x, -y)$  ist eine Streckung, denn  $(1, 0)$  ist einziger Fixpunkt. Dies kann man elementar ausrechnen oder elegant durch Widerspruch beweisen: Angenommen, es gibt keinen Fixpunkt. Dann ist  $\tau^{-1}\sigma\tau = \alpha$  eine Translation. Translationen bilden eine Gruppe, also ist auch  $\sigma = \tau\alpha\tau^{-1}$  eine Translation, Widerspruch.<sup>16</sup>

Würden die Streckungen bezüglich der Verkettung eine Untergruppe bilden, müsste auch  $\sigma \circ (\tau^{-1}\sigma\tau)$  eine Streckung sein, aber  $\sigma\tau^{-1}\sigma\tau$  hat wegen  $(\sigma\tau^{-1}\sigma\tau)((x, y)) = (x - 2, y)$  keinen Fixpunkt.

<sup>15</sup>Siehe hierzu auch die Skizze zu Satz 3.4 auf Seite 66.

<sup>16</sup>Bei der Schreibweise in diesem Abschnitt haben wir ausgenutzt, dass für die Verkettung von Abbildungen das Assoziativgesetz gilt, sonst hätten wir zwischen  $\tau^{-1}(\sigma\tau)$  und  $(\tau^{-1}\sigma)\tau$  unterscheiden und viel mehr Klammern setzen müssen.

Während es in der Anschauungsebene zu Punkten  $A, B$  stets genau eine Translation  $\tau$  mit  $\tau(A) = B$  gibt, verhält es sich mit Streckungen etwas anders.

*Beispiel:*  $\sigma_1 : (x, y) \mapsto (2 - x, -y)$  und  $\sigma_2 : (x, y) \mapsto (3x + 2, 3y)$  sind verschiedene Streckungen, die beide  $(0, 0)$  auf  $(2, 0)$  abbilden.

**Def 5.6** Eine affine Ebene heißt *Streckungsebene* :  $\iff \forall Z, P, Q \in \mathbb{P}$  kollinear,  $Z \neq P, Q \exists$  Streckung  $\sigma$  mit  $\sigma(Z) = Z$  und  $\sigma(P) = Q$ .

Wegen Satz 5.1 ist diese Streckung eindeutig bestimmt. Ein Beispiel für eine Streckungsebene ist die Anschauungsebene. Die Moultonenebene ist keine Streckungsebene.

Wir wollen in der Anschauungsebene alle Streckungen mit Zentrum (Fixpunkt)  $Z = O = (0, 0)$  angeben: Sei  $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  beliebig. Weil Streckungen spezielle Dilatationen sind, muss gelten

$$\sigma(X) \in (\sigma(O), OX) = OX, \quad \text{d.h.} \quad \sigma(X) = (\alpha x, \alpha y) \quad \text{mit } \alpha \in \mathbb{R}$$

Für jede reelle Zahl  $\alpha$  ist  $\sigma(x, y) \mapsto (\alpha x, \alpha y)$  eine Streckung mit Fixpunkt  $O$  (für  $\alpha = 0$  liegt eine ausgeartete Dilatation vor).

Wir wollen verallgemeinern und suchen als *Beispiel* die Streckung mit Fixpunkt  $Z = (0, 1)$ , die  $P = (1, 2)$  auf  $Q = (-2, -1)$  abbildet.

Weil diese Punkte kollinear liegen, muss es genau eine solche Streckung geben. Wir gehen schrittweise vor:

1) Es gibt eine Translation  $\tau$  mit  $\tau(Z) = O$ , nämlich  $\tau((x, y)) := (x, y - 1)$ . Für diese Abbildung gilt  $\tau(P) = (1, 1)$  und  $\tau(Q) = (-2, -2)$ .

2) Es gibt eine Streckung  $\sigma$  mit  $\sigma(O) = O$  und  $\sigma((1, 1)) = (-2, -2)$ , nämlich  $\sigma((x, y)) := (-2x, -2y)$ .

3) Es gibt eine Translation, die  $O$  auf  $Z$  abbildet, nämlich  $\tau^{-1}$  aus 1), also  $\tau^{-1}((x, y)) = (x, y + 1)$ .

4) Für  $\tau^{-1} \circ \sigma \circ \tau$  gilt  $(\tau^{-1} \sigma \tau)(Z) = (\tau^{-1} \sigma)(O) = \tau^{-1}(O) = Z$  und  $(\tau^{-1} \sigma \tau)(P) = \tau^{-1}(\sigma(\tau(P))) = \tau^{-1}(\sigma((1, 1))) = \tau^{-1}((-2, -2)) = \tau^{-1}(\tau(Q)) = Q$ .

Allgemein ist  $(\tau^{-1} \sigma \tau)((x, y)) = (\tau^{-1} \sigma)((x, y - 1)) = \tau^{-1}((-2x, -2y + 2)) = (-2x, -2y + 3)$ .

Als Übungsaufgabe versuche man, die analoge Abbildung für beliebige kollineare Punkte  $Z, P, Q$  anzugeben!

Wie bei Translationsebenen gibt es auch für Streckungsebenen einen charakteristischen Schließungssatz:

**Satz 5.7** Eine affine Ebene ist genau dann eine Streckungsebene, wenn in ihr der große Satz von Desargues (D) gilt.

## 6 Normale euklidische Ebenen

Bisher haben wir uns ausschließlich mit inzidenzgeometrischen Aspekten beschäftigt und beispielsweise untersucht, ob Punkte kollinear liegen oder ob Geraden parallel sind. Mit Hilfe von Schließungssätzen oder der Existenz von Dilatationen konnten wir affine Ebenen klassifizieren. In diesem Abschnitt werden wir zusätzliche Axiome kennenlernen, durch die sich die Anschauungsebene eindeutig von allen anderen affinen Ebenen unterscheidet.

Beschränken wir uns hierzu für einen Augenblick auf die Anschauungsebene und erinnern uns an die Schulzeit.

*Fragen:* Was ist eine Strecke und wie stellt man fest, ob zwei Strecken gleich lang sind oder nicht?

Nachdem wir diese Fragen in der Vorlesung beantwortet haben, stellen wir fest, dass Strecken in der Anschauungsebene eindeutig durch zwei Randpunkte festgelegt sind. Der Vergleich zweier Strecken bedeutet mathematisch die Überprüfung, ob diese Strecken in einer Relation (gleich lang?) zueinander stehen. Wie man leicht sieht, handelt es sich hierbei um eine Äquivalenzrelation.

Kehren wir zu beliebigen affinen Ebenen  $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$  zurück. Wir wollen jedes Punktepaar  $\{A, B\} \in \mathbb{P}_2$  als *Strecke* bezeichnen. Auf der Menge aller Punktepaare  $\mathbb{P}_2$  sei eine zunächst beliebige Äquivalenzrelation  $\equiv$  gegeben. Falls  $\{A, B\} \equiv \{C, D\}$  für  $\{A, B\}, \{C, D\} \in \mathbb{P}_2$  erfüllt ist (gesprochen:  $\{A, B\}$  ist kongruent zu  $\{C, D\}$ ), wollen wir diese Strecken *gleich lang* nennen.

Vergleichen wir diese allgemeine Vorgehensweise mit dem bekannten Abstandsbegriff, den wir aus der Anschauungsebene kennen. In der Anschauungsebene sind die Bedeutung von Strecken und Längen von Strecken intuitiv klar, erst im Nachhinein erkennt man (als Mathematiker), dass der Streckenvergleich die Eigenschaften reflexiv, symmetrisch und transitiv besitzt, es sich also um eine Äquivalenzrelation handelt. Im allgemeinen Fall einer beliebigen affinen Ebene werden zuerst gewisse Punktmengen (nämlich ungeordnete Punktepaare) als Strecken bezeichnet (definiert). Auf diesen Strecken gibt man sich dann eine beliebige Äquivalenzrelation vor und nennt zwei Strecken gleich lang, wenn sie diese Relation erfüllen. Die übliche Längenmessung ist also nur ein Spezialfall eines viel allgemeineren Sachverhalts.

*Beispiele:* 1) In der Anschauungsebene messen wir die Länge der Strecke zwischen Punkten  $A = (a_1, a_2)$  und  $B = (b_1, b_2)$  nach Pythagoras durch  $\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$ . Genau dann, wenn diese Werte für verschiedene Strecken übereinstimmen, sind die betroffenen Strecken gleich lang.

2) Wir stellen uns das Minimalmodell einer affinen Ebene als regelmäßiges Tetraeder vor. Weil in diesem Modell alle Kanten gleich lang sind, setzen wir  $\{A, B\} \equiv \{C, D\} \quad \forall \{A, B\}, \{C, D\} \in \mathbb{P}_2$ . Damit ist  $\equiv$  eine Äquivalenzrelation auf  $\mathbb{P}_2$ , der Menge aller Strecken.

3) Auch in der Anschauungsebene ist  $\{A, B\} \equiv \{C, D\} : \iff \{A, B\} = \{C, D\} \quad \forall \{A, B\}, \{C, D\} \in \mathbb{P}_2$  eine Äquivalenzrelation und damit theoretisch eine Möglichkeit, die Länge von Strecken zu vergleichen. Dies wird aber kein Mensch ernsthaft in Erwägung ziehen!

Es ist hoffentlich aufgefallen, dass im allgemeinen Fall Strecken  $\{A, B\}$  nur aus zwei Punkten bestehen und nicht, wie in der Schule üblich, aus allen Punkten „dazwischen“. Der einzige Grund für diese Vorgehensweise ist, dass die Streckendefinition als Punktepaar problemlos in jeder affinen Ebene möglich ist. (Wie soll „liegt zwischen“ in beliebigen affinen Ebenen erklärt sein?)

Ab jetzt sei  $(\mathbb{P}, \mathbb{G}, \equiv)$  eine affine Ebene mit einer abstrakten Äquivalenzrelation  $\equiv$  auf  $\mathbb{P}_2$ . Wir führen mit Hilfe dieser Relation weitere Begriffe ein:

**Def 6.1** Sei  $(\mathbb{P}, \mathbb{G}, \equiv)$  eine affine Ebene, sei  $\{A, B\} \in \mathbb{P}_2$ . Dann heißt

- $m_{A,B} := \{X \in \mathbb{P} \mid \{A, X\} \equiv \{X, B\}\}$  *Mittelsenkrechte* von  $\{A, B\}$ .
- $k_A(B) := \{X \in \mathbb{P} \mid \{A, X\} \equiv \{A, B\}\}$  *Kreis* mit *Mittelpunkt*  $A$  durch  $B$ .

Mit anderen Worten:  $m_{A,B}$  besteht aus allen Punkten, die von  $A$  und  $B$  gleich weit entfernt sind, zu  $k_A(B)$  gehören alle Punkte, deren Entfernung von  $A$  gleich der Länge der Strecke  $\{A, B\}$  ist.

*Beispiele:* 1) In der Anschauungsebene mit der üblichen Längenmessung ist  $m_{(0,0)(2,0)} = g_1$ :

$X = (x, y) \in m_{(0,0)(2,0)} \iff \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2} \iff 0 = -4x + 4 \iff (x, y) = (1, y)$ , also  $m_{(0,0)(2,0)} = \{(1, y) \mid y \in \mathbb{R}\} = g_1$ .

$k_{(0,0)((2,0))} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4\}$ , die entsprechende Rechnung wird in den Übungen durchgeführt. Mittelsenkrechte und Kreise aus Definition 6.1 sind genau die Gebilde, die uns aus der Schule unter diesen Namen bekannt sind!

2) Definiert man in der Minimalebene wie oben  $\{A, B\} \equiv \{C, D\}$  für alle  $\{A, B\}, \{C, D\} \in \mathbb{P}_2$ , so ist  $m_{A,B} = \{C, D\}$  und  $k_A(B) = \{B, C, D\}$ .

**Def 6.2** Sei  $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$  eine affine Ebene, seien  $A_1, \dots, A_4 \in \mathbb{P}$  paarweise verschieden.  $(A_1, A_2, A_3, A_4)$  heißt *Parallelogramm* :  $\iff A_1A_2 \parallel A_3A_4 \nparallel A_2A_3 \parallel A_1A_4$

Zum mathematischen Allgemeinwissen gehört, dass in der Anschauungsebene gegenüberliegende Seiten eines Parallelogramms als Strecken aufgefasst die gleiche Länge besitzen. Dies ist nicht in jeder affinen Ebene so, ein Gegenbeispiel liefert einmal mehr die Moultonebene mit dem Parallelogramm  $(-2, 0), (0, 0), (1, 1), (0, 1)$  bei gleicher Längendefinition wie in der Anschauungsebene.

Eine andere Binsenweisheit der Anschauungsebene besagt, dass jeder Kreis jede Gerade, die durch den Kreismittelpunkt verläuft, in genau zwei Punkten schneidet. Auch dies gilt nicht in jeder affinen Ebene, diesmal finden wir ein Gegenbeispiel im Minimalmodell, hier ist  $k_A(B) \cap AB = \{B\}$ .

Offensichtlich haben wir zwei Eigenschaften gefunden, in denen sich die Anschauungsebene von anderen affinen Ebenen unterscheidet.

**Def 6.3** Eine affine Ebene  $(\mathbb{P}, \mathbb{G}, \equiv)$

1) genügt dem *Parallelogrammaxiom* (PG) :  $\iff \{A, B\} \equiv \{C, D\}$  für alle Parallelogramme  $(A, B, C, D)$ .

2) genügt dem *Kreisschnittaxiom* (KS) :  $\iff |k_A(B) \cap AB| = 2 \quad \forall \{A, B\} \in \mathbb{P}_2$

3) heißt *normale euklidische Ebene* :  $\iff$  es gelten (PG) und (KS).

Wie bereits in den Beispielen gesehen, ist die Anschauungsebene im Gegensatz zur Moultonebene und zum Minimalmodell eine normale euklidische Ebene.

Leider gibt es normale euklidische Ebenen, die sich wesentlich von der Anschauungsebene unterscheiden. Um die Anschauungsebene eindeutig von *allen* anderen Ebenen abzuheben, sind weitere Axiome notwendig.

**Def 6.4** In einer affinen Ebene  $(\mathbb{P}, \mathbb{G}, \equiv)$  heißt

a)  $g \in \mathbb{G}$  *Tangente* an den Kreis  $k$  :  $\iff |g \cap k| = 1$ .

b)  $P \in \mathbb{P}$  *innerer Punkt* eines Kreises  $k$  :  $\iff P$  liegt auf keiner Tangente an  $k$ .

c)  $k^\circ := \{X \in \mathbb{P} \mid X \text{ innerer Punkt von } k\}$  *Inneres* von  $k$ .

d)  $k \cup k^\circ$  *abgeschlossene Kreisscheibe*.

Weil diese Begriffe in der Anschauungsebene genau unseren Vorstellungen entsprechen, verzichten wir auf explizite Beispiele.

**Def 6.5** Eine affine Ebene  $(\mathbb{P}, \mathbb{G}, \equiv)$

1) genügt dem *euklidischen Axiom* (E) :  $\iff$  Jede Gerade durch einen inneren Punkt eines Kreises trifft diesen Kreis.

- 2) genügt dem *Vollständigkeitsaxiom* (V) :  $\iff$  Sind  $k_1, k_2$  abgeschlossene Kreisscheiben mit gleichem Mittelpunkt  $M$  und gilt  $k_1 \subsetneq k_2$ , so existiert eine weitere abgeschlossene Kreisscheibe  $k_3$  mit Mittelpunkt  $M$  und  $k_1 \subsetneq k_3 \subsetneq k_2$ .
- 3) heißt *vollständige euklidische Ebene* :  $\iff$  es gelten (E) und (V).

*Frage*: Worin unterscheiden sich die Axiome (E) und (KS)?

Wer ein gutes Gedächtnis hat, erinnert sich vielleicht an ein ähnliches Vollständigkeitsaxiom, das zur Charakterisierung der reellen Zahlen benutzt wird. Mit dem folgenden Satz, den wir nicht beweisen werden, haben wir ein Ziel dieser Vorlesung, nämlich die Anschauungsebene eindeutig durch Axiome festzulegen, erreicht:

**Satz 6.1** Jede vollständige euklidische Ebene ist isomorph zur Anschauungsebene.

Normale euklidische Ebenen heißen übrigens nur dann isomorph, wenn eine bijektive Abbildung existiert, die kollineare Punkte auf kollineare Punkte und außerdem gleichlange Strecken auf gleichlange Strecken abbildet. Weitere Eigenschaften solcher Isomorphismen sind im folgenden Satz zusammengefasst:

**Satz 6.2** Sei  $\varphi$  ein Isomorphismus zwischen affinen Ebenen  $(\mathbb{P}, \mathbb{G}, \equiv)$  und  $(\mathbb{P}', \mathbb{G}', \equiv')$ . Dann gilt für alle  $\{A, B\} \in \mathbb{P}_2$

- a)  $\varphi(m_{A,B}) = m_{\varphi(A)\varphi(B)}$   
 b)  $\varphi(k_A(B)) = k_{\varphi(A)}(\varphi(B))$

**Beweis:** a)  $\varphi(m_{A,B}) = \{\varphi(X) \mid \{A, X\} \equiv \{B, X\}\} = \{\varphi(X) \mid \{\varphi(A), \varphi(X)\} \equiv' \{\varphi(B), \varphi(X)\}\}$   
 $= m_{\varphi(A)\varphi(B)}$

b)  $\varphi(k_A(B)) = \{\varphi(X) \mid \{A, X\} \equiv \{A, B\}\} = \{\varphi(X) \mid \{\varphi(A), \varphi(X)\} \equiv' \{\varphi(A), \varphi(B)\}\} = k_{\varphi(A)}(\varphi(B))$

Isomorphismen bilden Mittelsenkrechte auf Mittelsenkrechte und Kreise auf Kreise ab.

## 7 Bewegungen Teil 1: Punktspiegelungen

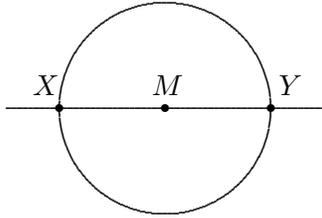
Mit den Dilatationen haben wir in beliebigen affinen Ebenen Kollineationen kennengelernt, bei denen Gerade und Bildgerade stets parallel sind. Jetzt wollen wir uns mit Abbildungen beschäftigen, die „distanztreu“ sind. Hierzu benötigen wir bekanntermaßen eine Äquivalenzrelation  $\equiv$  auf der Menge der Punktepaare. Um allzu exotische Fälle von vorneherein auszuschließen, gehen wir von einer normalen euklidischen Ebene aus. An einigen Stellen werden wir außerdem voraussetzen, dass jede Mittelsenkrechte die Gestalt einer Geraden hat. Dies ist in der Anschauungsebene selbstverständlich und wir werden uns nicht mit der Frage befassen, ob es überhaupt Ebenen geben kann, in denen es anders ist. Wir setzen daher ab sofort solche „gutartigen“ normalen euklidischen Ebenen  $(\mathbb{P}, \mathbb{G}, \equiv)$  voraus. Wem dies zu unheimlich ist, der möge sich lediglich die Anschauungsebene mit der bekannten Längenmessung nach Pythagoras vorstellen!

**Def 7.1** Eine Kollineation  $\varphi$  heißt *Bewegung* :  $\iff \{A, B\} \equiv \{\varphi(A), \varphi(B)\} \quad \forall \{A, B\} \in \mathbb{P}_2$

Bewegungen sind *distanztreue* Abbildungen, bezüglich der Verkettung bilden sie eine Untergruppe der Kollineationsgruppe.

*Frage:* Wer kennt in der Anschauungsebene Beispiele für Bewegungen?

Wir wollen eine spezielle Bewegung, die etwas mit Kreisen und dem Kreisschnittaxiom zu tun hat, kennenlernen und genauer untersuchen.



Sei  $M \in \mathbb{P}$  fest gewählt. Für jeden Punkt  $X \neq M$  trifft die Gerade  $MX$  den Kreis  $k_M(X)$  außer in  $X$  in genau einem weiteren Punkt  $Y$ , der vom Kreismittelpunkt  $M$  die gleiche Entfernung hat wie  $X$ ; denn nach dem Kreisschnittaxiom und der Definition des Kreises ist  $\{X, M\} \equiv \{Y, M\}$ .

**Def 7.2** Sei  $(\mathbb{P}, \mathbb{G}, \equiv)$  eine normale euklidische Ebene. Für jeden Punkt  $M$  heißt die Abbildung

$$\varphi_M : \begin{cases} \mathbb{P} & \rightarrow & \mathbb{P} \\ X & \mapsto & \begin{cases} M & \text{für } X = M \\ Y & \text{für } X \neq M \text{ mit } Y \in MX \setminus \{X\}, \{M, X\} \equiv \{M, Y\} \end{cases} \end{cases}$$

*Punktspiegelung an M.*

Jede Streckung mit Zentrum  $M$  und Streckungsfaktor  $-1$  ist eine Punktspiegelung. Wir wollen Eigenschaften von beliebigen Punktspiegelungen (in beliebigen normalen euklidischen Ebenen) zusammenstellen.

*Beh. 1:* Jede Punktspiegelung hat genau einen Fixpunkt.

*Bew.:* Folgt direkt aus der Definition:  $\varphi_M(M) = M$ ,  $\varphi_M(X) \neq X$  für  $X \neq M$ .

Bei den nächsten Behauptungen verwenden wir statt  $\varphi_M$  die kürzere Schreibweise  $\varphi$ .

*Beh. 2:* Jede Punktspiegelung ist surjektiv.

*Bew.:* Sei  $Y \in \mathbb{P}$  beliebig. Für  $Y = M$  ist  $M$  das Urbild, für  $Y \neq M$  folgt aus dem Kreisschnittaxiom  $k_M(Y) \cap MY = \{Y, X\} \in \mathbb{P}_2$  mit  $\{Y, M\} \equiv \{X, M\}$ .  $X$  ist das gesuchte Urbild:  $\varphi(X) = Y$ .

*Beh. 3:* Jede Punktspiegelung ist injektiv.

*Bew.:* Zu zeigen ist  $\varphi(X_1) \neq \varphi(X_2)$  für alle  $\{X_1, X_2\} \in \mathbb{P}_2$ . Wir untersuchen verschiedene Fälle:

1. Fall  $M \in \{X_1, X_2\}$ , sei oBdA  $X_1 = M \neq X_2 \Rightarrow \varphi(X_1) = M \neq \varphi(X_2)$ .

2. Fall  $M \notin \{X_1, X_2\}$ . Für  $M \notin X_1X_2 \iff X_2 \notin MX_1$  folgt  $\varphi(X_1) \in MX_1 \not\equiv \varphi(X_2)$ . Für  $M \in X_1X_2$  unterscheiden wir weitere Fälle:

a)  $\{M, X_1\} \not\equiv \{M, X_2\}$ . Weil nach Definition  $\{M, X_i\} \equiv \{M, \varphi(X_i)\}$  für  $i = 1, 2$  gilt, ist  $\{M, \varphi(X_1)\} \not\equiv \{M, \varphi(X_2)\}$  und damit  $\varphi(X_1) \neq \varphi(X_2)$ .

b)  $\{M, X_1\} \equiv \{M, X_2\} \Rightarrow X_1 \in k_M(X_2)$  und  $X_2 \in k_M(X_1) \Rightarrow \varphi(X_1) = X_2 \neq X_1 = \varphi(X_2)$ .

*Beh. 4:* Jede Punktspiegelung ist selbstinvers (involutorisch).

*Bew.:* Es ist  $\varphi^2(M) = M$ . Für  $X \neq M$  ist  $\varphi(X) = Y$  mit  $Y \in MX \setminus \{X\}$ ,  $\{X, M\} \equiv \{Y, M\}$ . Damit folgt  $\varphi^2(X) = \varphi(Y) = X$  wegen  $\varphi(Y) \in (MY = MX) \setminus \{Y\}$ ,  $\{Y, M\} \equiv \{\varphi(Y), M\}$ . Also gilt  $\varphi^2 = \text{id}$ .

Beh. 5: Jede Punktspiegelung ist eine Streckung.<sup>17</sup>

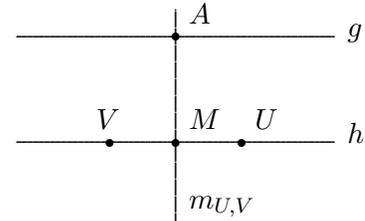
Bew.: Sei  $\varphi$  eine Punktspiegelung an  $M$ . Weil wir bereits wissen, dass  $\varphi$  bijektiv ist und genau einen Fixpunkt besitzt, bleibt „nur“ noch zu zeigen, dass jede Gerade  $g$  unter  $\varphi$  auf eine zu  $g$  parallele Gerade abgebildet wird. Für Geraden  $g$  mit  $M \in g$  ist natürlich  $\varphi(g) = g$ , der andere Fall  $M \notin g$  bereitet leider etwas Mühe.

Es sei  $h := (M, g)$ ,  $U \in h \setminus \{M\}$  und  $V = \varphi(U)$ , damit ist  $\{U, M\} \equiv \{V, M\}$ .

Wegen  $m_{U,V} = \{X \in \mathbb{P} \mid \{U, X\} \equiv \{V, X\}\}$  gilt

$M \in h \cap m_{U,V}$  und  $U \in h \setminus m_{U,V}$ . Aus  $h \parallel g$  folgt  $m_{U,V} \not\parallel g$ , sonst wären  $M_{U,V}$  und  $h$  verschiedene parallele Geraden zu  $g$  durch  $M$ .

Sei  $A := g \cap m_{U,V}$ , also  $\{A, U\} \equiv \{A, V\}$ .



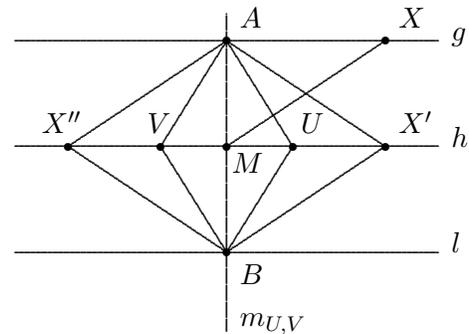
Weil  $A, U, V$  nicht kollinear sind, legt der eindeutig bestimmte Punkt  $B := (V, AU) \cap (U, AV)$  das Parallelogramm  $(U, A, V, B)$  fest mit  $\{B, V\} \equiv \{A, U\} \equiv \{A, V\} \equiv \{B, U\}$ <sup>18</sup>  $\Rightarrow B \in m_{U,V}$ .

Aus  $\{A, U\} \equiv \{B, U\}$  und  $\{A, V\} \equiv \{B, V\}$  folgt außerdem  $U, V \in m_{A,B} = h$ .<sup>19</sup> Damit ist  $M \in h = m_{A,B}$  und wir erhalten  $\{M, A\} \equiv \{M, B\}$  und hieraus  $\varphi(A) = B$ .

Zu zeigen ist  $\varphi(g) = (B, g) =: l$ , d.h., für jeden beliebigen Punkt  $X \in g \setminus \{A\}$  ist  $\varphi(X) \in l$  nachzuweisen.

Es sei  $X' := h \cap (B, MX)$ .  $B, X', A$  liegen nicht kollinear, daher gibt es genau ein  $X'' \in \mathbb{P}$ , so dass  $(B, X', A, X'')$  ein Parallelogramm ist, d.h., es gilt  $\{A, X''\} \equiv \{B, X'\}$  (\*) und  $\{A, X'\} \equiv \{B, X''\}$ .

Wegen  $h = m_{A,B}$  ist ferner  $\{X', A\} \equiv \{X', B\} \Rightarrow X'' \in h$ .

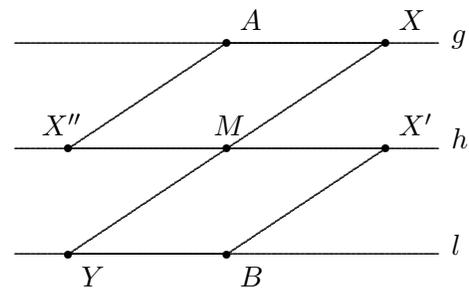


Nach Definition von  $X'$  ist  $MX \parallel BX'$ , ferner ist  $BX' \parallel AX''$ . Damit erhalten wir ein weiteres Parallelogramm  $(X, M, X'', A)$  (beachte  $(MX'' = h) \parallel (g = AX)$ ) mit  $\{X, M\} \equiv \{A, X''\}$  (\*\*). Da  $XM \not\parallel h$  existiert  $Y := l \cap XM$ , es ist  $Y \neq B$

Wegen  $(BY = l) \parallel (h = X'M)$  und  $(YM = XM) \parallel BX'$  ist auch  $(B, X', M, Y)$  ein Parallelogramm mit  $\{B, X'\} \equiv \{M, Y\}$  (\*\*\*)

Insgesamt folgt für die kollinearen Punkte  $X, M, Y$  aus (\*\*), (\*) und (\*\*\*)

$\{X, M\} \equiv \{A, X''\} \equiv \{B, X'\} \equiv \{M, Y\}$  und damit  $Y = \varphi(X) \in l$ , was zu zeigen war.



Beh. 6: Sei  $\{A, B\} \in \mathbb{P}_2$ ,  $M \notin AB$ . Für jede Punktspiegelung  $\varphi$  an  $M$  ist  $(A, B, \varphi(A), \varphi(B))$  ein Parallelogramm.

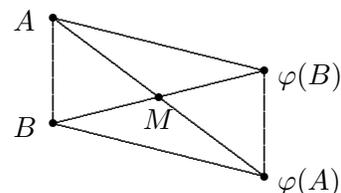
<sup>17</sup>Zur Erinnerung: Streckungen sind Dilatationen mit Fixpunkt.  
<sup>18</sup>Hier geht das Axiom (PG) ein.  
<sup>19</sup>Hier benutzen wir die Gleichheit von Geraden und Mittelsenkrechten.

Bew.: Wegen  $M \notin AB$  ist  $AB \parallel B\varphi(A)$ .

Aus Behauptung 5 folgt  $AB \parallel \varphi(A)\varphi(B)$

Aus den Behauptungen 4 und 5 folgt

$$A\varphi(B) \parallel \varphi(A)\varphi^2(B) = \varphi(A)B.$$



Beh. 7: Jede Punktspiegelung  $\varphi$  an  $M$  ist eine Bewegung.

Bew.: Wir haben bereits nachgewiesen, dass  $\varphi_M = \varphi$  eine Kollineation ist, zu zeigen bleibt die Distanztreue, d.h.

$$\{A, B\} \equiv \{\varphi(A), \varphi(B)\} \quad \forall \{A, B\} \in \mathbb{P}_2$$

Für  $M \notin AB$  folgt dies aus der letzten Behauptung und dem Parallelogrammaxiom, denn  $(A, B, \varphi(A), \varphi(B))$  ist ein Parallelogramm.

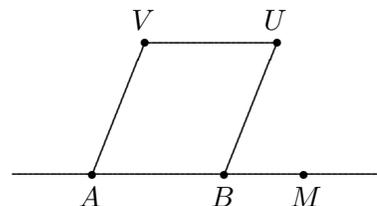
Für  $M \in AB$  wählen wir einen beliebigen Punkt  $U \notin AB$ .

Mit  $V := (A, BU) \cap (U, AB)$  ist  $(A, B, U, V)$  ein Parallelogramm, es folgt  $\{A, B\} \equiv \{U, V\}$ .

Weil  $M \notin UV$  ist  $\{U, V\} \equiv \{\varphi(U), \varphi(V)\}$ .

Weil  $\varphi$  eine Kollineation ist, ist auch  $(\varphi(A), \varphi(B), \varphi(U), \varphi(V))$  ein Parallelogramm, also gilt

$$\{\varphi(A), \varphi(B)\} \equiv \{\varphi(U), \varphi(V)\}, \text{ womit alles gezeigt ist.}$$



Mit den Behauptungen 1 – 7 haben wir folgenden Satz bewiesen:

**Satz 7.1** In normalen euklidischen Ebenen sind Punktspiegelungen

- a) involutorische Streckungen mit einzigem Fixpunkt  $M$
- b) Bewegungen

Aus unserer Erfahrung mit der Anschauungsebene verbinden wir mit dem Namen Mittelsenkrechte Vorstellungen von „senkrecht stehen“ und „Mitte“. Diese Begriffe sind bisher nicht vorgekommen, für uns bestehen Mittelsenkrechte nur aus allen Punkten, die den gleichen Abstand zu zwei gegebenen Punkten besitzen. Einen ersten Schritt in Richtung Anschauung unternehmen wir mit dem nächsten Satz, der in der Anschauungsebene offensichtlich gültig ist. Für beliebige normale euklidische Ebenen müssen wir ihn beweisen.

**Satz 7.2** Für alle Punktepaare  $\{A, B\}$  einer normalen euklidischen Ebene gilt  $m_{A,B} \parallel AB$ .

**Beweis:**<sup>20</sup> Wegen  $A \notin m_{A,B}$  ist  $m_{A,B} \neq AB$ . Sei  $C := \varphi_B(A)$ . Wegen  $A \notin m_{A,C}$  und  $B \in m_{A,C}$  ist  $m_{A,C} \parallel AB$ . Wir zeigen indirekt  $m_{A,B} \parallel m_{A,C}$  und damit die Behauptung  $AB \parallel m_{A,B}$ :

Angenommen,  $m_{A,C} \cap m_{A,B} = \{D\}$ . Für kollineare Punkte  $A, C, D$ , also  $D \in (AC = AB)$ , gilt die Behauptung  $AB \parallel m_{A,B}$ . Für nicht kollineare Punkte  $A, C, D$  bilden diese Punkte zusammen mit  $E := \varphi_B(D)$  das Parallelogramm  $(A, D, C, E)$ .

$$\Rightarrow \{A, E\} \equiv \{C, D\} \equiv \{A, D\} \equiv \{B, D\} \equiv \{B, E\}$$

<sup>20</sup>Kein Prüfungsstoff

(Begründung für  $\equiv$  von links nach rechts: Parallelogramm;  $D \in m_{A,C}$ ;  $D \in m_{A,B}$ ; Definition von  $\varphi_B$ )

$\Rightarrow E \in m_{A,B} \Rightarrow m_{A,B} = m_{A,C}$ , Widerspruch.

Wir notieren einige interessante Konsequenzen aus diesem Satz:

**Korollar 1** Zu je zwei Punkten  $A, B$  gibt es genau eine Punktspiegelung  $\varphi$  mit  $\varphi(A) = B$

**Beweis:** Für  $A = B$  ist  $\varphi = \varphi_A$ , für  $A \neq B$  ist  $\varphi = \varphi_M$  mit  $M = AB \cap m_{A,B}$ .

Auf Grund des Korollars können wir jetzt die Mitte einer Strecke definieren:

**Def 7.3** Sei  $\{A, B\} \in \mathbb{P}_2$ .  $M \in \mathbb{P}$  heißt *Mitte* der Strecke  $\{A, B\}$  :  $\iff \varphi_M(A) = B$

**Korollar 2** Sei  $(A, B, C, D)$  ein Parallelogramm, dann ist  $AC \cap BD$  Mitte von  $\{A, C\}$  und  $\{B, D\}$ .

**Beweis:** Sei  $E$  die Mitte von  $\{A, C\}$ , dann ist  $(A, B, C, \varphi_E(B))$  ein Parallelogramm, das mit dem Parallelogramm  $(A, B, C, D)$  übereinstimmen muss, also  $D = \varphi_E(B) \Rightarrow E$  ist auch Mitte von  $\{B, D\}$ .

**Korollar 3** Jede Kollineation  $\alpha$  ist mittentreu: Die Mitte von  $\{A, B\}$  wird auf die Mitte von  $\{\alpha(A), \alpha(B)\}$  abgebildet.

**Beweis:** Sei  $(A, U, B, V)$  ein Parallelogramm mit Mitte  $M = AB \cap UV$ . Jede Kollineation bildet Parallelogramme auf Parallelogramme ab, also ist  $(\alpha(A), \alpha(U), \alpha(B), \alpha(V))$  ein Parallelogramm mit Mitte  $\alpha(A)\alpha(B) \cap \alpha(U)\alpha(V) = \alpha(M)$ .

Mit dem nächsten Satz stellen wir einen wichtigen Zusammenhang zwischen Punktspiegelungen und Translationen her.

**Satz 7.3** Seien  $\varphi_A$  und  $\varphi_B$  Punktspiegelungen in einer normalen euklidischen Ebene. Dann ist

- $\varphi_A \circ \varphi_B$  eine Translation. Im Fall  $A = B$  ist  $\varphi_A \circ \varphi_B$  die identische Abbildung, im Fall  $A \neq B$  liegt eine Translation in Richtung  $AB$  vor.
- jede Translation die Verkettung zweier Punktspiegelungen.

**Beweis:** a) Die Behauptung gilt für  $A = B$ , weil jede Punktspiegelung selbstinvers ist (Beh. 4 von Satz 7.1). Für  $A \neq B$  ist  $\varphi_A \circ \varphi_B$  eine Dilatation (Begründung: Punktspiegelungen sind Streckungen, Streckungen sind Dilatationen, Dilatationen bilden eine Gruppe).

*Beh.:*  $\varphi_A \circ \varphi_B$  hat keinen Fixpunkt.

*Bew.:* Angenommen,  $(\varphi_A \circ \varphi_B)(X) = X$ . Aus  $\varphi_A^2 = id$  folgt  $\varphi_B(X) = \varphi_A^2(\varphi_B(X)) = \varphi_A((\varphi_A \varphi_B)(X)) = \varphi_A(X)$

Aus Korollar 1 folgt  $\varphi_B = \varphi_A$  und daraus der Widerspruch  $A = B$ . Weil Dilatationen ohne Fixpunkt Translationen sind, ist  $\varphi_A \circ \varphi_B$  als Translation nachgewiesen.

Wegen  $(\varphi_A \varphi_B)(B) = \varphi_A(B) \in AB$  ist  $AB$  die gesuchte Translationsrichtung.

- Sei  $\tau$  eine Translation, sei  $X \in \mathbb{P}$  beliebig. Für  $\tau = id$  ist  $\tau = \varphi_X \circ \varphi_X$ , für  $\tau \neq id$  ist  $\{X, \tau(X)\} \in \mathbb{P}_2$ .

Nach Korollar 1 existiert eine Punktspiegelung  $\varphi_M$  mit  $\varphi_M(X) = \tau(X)$ .

*Beh.:*  $\tau = \varphi_M \circ \varphi_X$

*Bew.:* Wie in a) bewiesen, ist  $\varphi_M \circ \varphi_X$  eine Translation. Wegen  $(\varphi_M \circ \varphi_X)(X) = \tau(X)$  stimmen diese Translationen nach Satz 5.5 überein.

*Beispiel:* Die Translation  $\tau : A = (0, 0) \mapsto B = (4, 0)$ , also  $\tau : (x, y) \mapsto (x + 4, y)$ , soll als Verkettung zweier Punktspiegelungen dargestellt werden.

Variante a): Sei  $X$  ein beliebiger Punkt, wir wählen  $X = (0, 0)$ . Es ist  $\{X, \tau(X)\} = \{(0, 0), (4, 0)\} \in \mathbb{P}_2$ . Die Punktspiegelung gemäß Korollar 1 ist  $\varphi_M$  mit  $M = (2, 0)$ , also  $\varphi_M : (x, y) \mapsto (4 - x, y)$  – am Ende von § 5 haben wir gesehen, wie man auf diese Darstellung kommt. Wir benötigen noch  $\varphi_X : (x, y) \mapsto (-x, y)$ . Insgesamt folgt  $(\varphi_M \circ \varphi_X)((x, y)) = \varphi_M((-x, y)) = (4 - (-x), y)$ , also  $\tau = \varphi_M \circ \varphi_X$ .

Variante b) (hier ohne Zwischenschritte):  $X = (2, 2)$ ,  $\varphi_X : (x, y) \mapsto (4 - x, 4 - y)$ .  $\tau(X) = (6, 2)$ ,  $\varphi_M(X) = \tau(X)$  für  $M = (4, 2) \Rightarrow \varphi_M((x, y)) = (8 - x, 4 - y)$ . Durch Rechnung folgt erneut  $\varphi_M \circ \varphi_X = \tau$ .

In Satz 7.3 haben wir gezeigt, dass Translationen Bewegungen sind, und dass man in normalen euklidischen Ebenen zu zwei Punkten  $A, B$  immer eine Translation findet, die  $A$  in  $B$  überführt:

**Korollar** Translationen sind Bewegungen. Jede normale euklidische Ebene ist eine Translationsebene.

Verkettet man zwei Punktspiegelungen, erhält man eine Translation. Was passiert, wenn drei Punktspiegelungen hintereinander ausgeführt werden?

**Satz 7.4** Seien  $A, B, C \in \mathbb{P}$  beliebig.

- $\varphi_A \circ \varphi_B \circ \varphi_C$  ist eine Punktspiegelung
- $\varphi_A \circ \varphi_B \circ \varphi_C = \varphi_C \circ \varphi_B \circ \varphi_A$
- Liegen  $A, B, C$  nicht kollinear, ist  $(A, B, C, D)$  ein Parallelogramm mit  $\varphi_A \circ \varphi_B \circ \varphi_C = \varphi_D$ .

**Beweis:** a) Wir vergleichen die Punkte  $C$  und  $\varphi_A \varphi_B(C)$ . Im Fall  $C = \varphi_A \varphi_B(C)$  folgt  $\varphi_A = \varphi_B$ . Damit ist  $A = B \Rightarrow \varphi_A \varphi_B \varphi_C = \varphi_C$ .

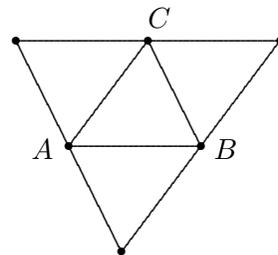
Im Fall  $C \neq \varphi_A \varphi_B(C)$  sei  $D$  die Mitte von  $\{C, \varphi_A \varphi_B(C)\}$ , also  $\varphi_D(C) = \varphi_A \varphi_B(C)$ . Wegen  $C = \varphi_C(C)$  folgt  $\varphi_A \varphi_B(C) = \varphi_D(C) = \varphi_D \varphi_C(C)$ .

Nach Satz 7.3 sind  $\varphi_A \varphi_B$  und  $\varphi_D \varphi_C$  Translationen, die nach Satz 5.5 übereinstimmen:

$$\varphi_A \varphi_B = \varphi_D \varphi_C \iff \varphi_A \varphi_B \varphi_C^{-1} = \varphi_D \iff \varphi_A \varphi_B \varphi_C = \varphi_D$$

- Weil jede Punktspiegelung selbstinvers ist, folgt  $\varphi_A \varphi_B \varphi_C = (\varphi_A \varphi_B \varphi_C)^{-1} = \varphi_C^{-1} \varphi_B^{-1} \varphi_A^{-1} = \varphi_C \varphi_B \varphi_A$ .
- $A, B, C$  nicht kollinear  $\Rightarrow A \neq B \Rightarrow \varphi_A \varphi_B$  Translation in Richtung  $AB$ . Wegen  $\varphi_A \varphi_B = \varphi_D \varphi_C$  ist auch  $\varphi_D \varphi_C$  eine Translation in gleicher Richtung, es folgt  $AB \parallel CD$ . Analog folgt aus  $\varphi_B \varphi_C = \varphi_A \varphi_D$  die Parallelität von  $BC$  und  $AD$ .

*Frage:* Wo findet man in der Zeichnung einen Punkt  $D$  mit  $\varphi_D = \varphi_A \circ \varphi_B \circ \varphi_C$ ? Welche Bedeutung haben die anderen Punkte?



## 8 Orthogonalität

Nachdem wir im vorherigen Paragraphen den Begriff Mitte geklärt haben, wenden wir uns jetzt der zweiten Worthälfte von *Mittelsenkrechte* zu. Wir befinden uns weiterhin in normalen euklidischen Ebenen.

**Def 8.1** Eine Gerade  $g$  heißt *orthogonal* oder *senkrecht* zu einer Geraden  $h$ , geschrieben  $g \perp h$ , :  $\iff h = m_{A,B}$  mit geeigneten Punkten  $A, B \in g$ .

Man beachte, dass wir zur Definition von orthogonal keine Winkel benutzt haben!

*Beispiel:* In der Anschauungsebene ist  $g_0 \perp g_{0,1}$ : Auf  $g_0$  gibt es mit  $A = (0,0)$  und  $B = (0,2)$  zwei Punkte, also eine Strecke  $\{A, B\}$ , für die  $g_{0,1}$  zugehörige Mittelsenkrechte ist,  $g_0 \perp (g_{0,1} = m_{A,B})$ .

Ersetzen wir  $B = (0,2)$  durch  $C = (0,4)$ , erhalten wir analog  $g_0 \perp (g_{0,2} = m_{A,C})$ .

*Frage:* Gilt auch  $g_{0,1} \perp g_0$ ?

Die Antwort auf die letzte Frage lässt sich verallgemeinern:

**Satz 8.1** Seien  $g$  und  $h$  Geraden einer normalen euklidischen Ebene. Dann gilt  $g \perp h \iff h \perp g$ .

**Beweis:** Es ist nur „ $\Rightarrow$ “ zu zeigen: Gesucht sind  $X, Y \in h$  mit  $g = m_{X,Y}$ .

Aus der Voraussetzung  $g \perp h$  folgt die Existenz zweier Punkte  $A, B \in g$  mit  $h = m_{A,B}$ . Nach Satz 7.2 ist  $m_{A,B} \nparallel (AB = g)$ , sei  $M = g \cap h$ . Auf jeder Geraden liegen mindestens zwei Punkte, sei  $C \in h$  ein weiterer von  $M$  verschiedener Punkt. Wir nutzen verschiedene Eigenschaften der Punktspiegelung  $\varphi_M$  und die Distanztreue der Relation  $\equiv$  aus:

$$\{A, \varphi_M(C)\} = \{\varphi_M(B), \varphi_M(C)\} \equiv \{B, C\} \equiv \{A, C\} \equiv \{\varphi_M(A), \varphi_M(C)\} = \{B, \varphi_M(C)\}$$

$A$  und  $B$  haben jeweils den gleichen Abstand zu  $C$  und zu  $\varphi_M(C)$ . Sie liegen damit auf  $m_{C, \varphi_M(C)}$  oder anders ausgedrückt: Die Punkte  $C$  und  $\varphi_M(C)$  bilden eine Strecke auf  $h$ , für die  $g$  die zugehörige Mittelsenkrechte ist:  $(C\varphi_M(C) = h) \perp (g = m_{C, \varphi_M(C)})$ .

Wir haben soeben bewiesen, dass die Relation  $\perp$  symmetrisch auf der Menge der Geraden ist. Ob sie auch reflexiv und transitiv ist, werden wir eventuell in den Übungen untersuchen.

Aus Satz 6.2 wissen wir, dass jede Bewegung (dort Isomorphismus genannt) Mittelsenkrechte auf Mittelsenkrechte und Kreise auf Kreise abbildet. Jetzt lernen wir eine weitere Eigenschaft dieser „gutartigen“ Abbildungen kennen:

**Satz 8.2** Bewegungen erhalten Orthogonalität.

**Beweis:** Sei  $\alpha$  eine Bewegung und sei  $g \perp h$ . Nach der Definition von  $\perp$  gibt es geeignete Punkte  $A, B \in g$ , für die  $h$  die Mittelsenkrechte ist:  $h = m_{A,B}$ . Wir wenden die Bewegung  $\alpha$  auf  $g$  und  $h$  an. Es folgt  $\alpha(A)\alpha(B) = \alpha(g)$  und  $\alpha(h) = \alpha(m_{A,B})$ . Weil nach Satz 6.2 Mittelsenkrechte auf Mittelsenkrechte abgebildet werden, gilt  $\alpha(m_{A,B}) = m_{\alpha(A), \alpha(B)}$ , womit die Behauptung  $\alpha(g) \perp \alpha(h)$  bewiesen ist.

Wir vergleichen  $\parallel$  und  $\perp$ ; bekanntlich ist  $g \perp h \Rightarrow g \nparallel h$  (warum?).

**Satz 8.3** Seien  $g, h, h' \in \mathbb{G}$ ,  $g \perp h$ . Dann gilt  $h \parallel h' \iff g \perp h'$ .

**Beweis:** „ $\Rightarrow$ “: Sei  $M = g \cap h$ , aus  $h' \parallel h \nparallel g$  folgt  $g \cap h' = M'$ . Weil für  $M = M'$  wegen  $h = h'$  nichts mehr zu zeigen ist, können wir von  $M \neq M'$  ausgehen.

Jede normale euklidische Ebene ist eine Translationsebene (Korollar zu Satz 7.3). Also gibt es eine Translation  $\tau$  mit  $\tau(M) = M'$ . Was wissen wir über die Bilder der Geraden  $g$  und  $h$  unter der Abbildung  $\tau$ ? Es ist  $\tau(g) = g$  und  $\tau(h) = (\tau(M), h) = (M', h) = h'$ . Weil  $\tau$  gleichzeitig eine Bewegung ist, folgt aus Satz 8.2 ( $g = \tau(g)$ )  $\perp$  ( $\tau(h) = h'$ ), was zu zeigen war.

„ $\Leftarrow$ “: Zu zeigen ist  $g \perp h$ ,  $g \perp h' \Rightarrow h \parallel h'$ . Erneut sei  $M = g \cap h$ . Wir setzen  $k := (M, h')$ . Wegen  $k \parallel h'$  folgt aus der vorher bewiesenen Richtung „ $\Rightarrow$ “  $g \perp k$ . Zu zeigen ist somit  $k = h$ .

Sei  $A \in g \setminus \{M\}$ . Wir bilden  $\varphi_M(A) \in g$  und stellen fest:

Wegen  $g \perp h$  ist  $h = m_{A, \varphi(A)}$ , wegen  $g \perp k$  ist  $k = m_{A, \varphi(A)}$ , also gilt  $h = k$ .

Orthogonalität und Parallelität hängen eng zusammen, insgesamt gilt

**Korollar** Seien  $g, g', h, h' \in \mathbb{G}$ ,  $g \perp h$ ,  $g \parallel g'$ . Dann ist  $h \parallel h' \iff g' \perp h'$ .

Den einfachen kurzen Beweis möge man als Übung selbst erledigen.

Jetzt können wir uns mit einigen elementaren geometrischen Begriffen beschäftigen, die in der Schule aus der Anschauungsebene bekannt sein sollten.

**Satz 8.4** (Fällen von Loten)

In jeder normalen euklidischen Ebene kann zu jeder Geraden durch jeden Punkt das *Lot gefällt* werden:

$$\forall g \in \mathbb{G}, \forall P \in \mathbb{P} \quad \exists_1 l \in \mathbb{G} : P \in l \wedge l \perp g$$

**Beweis:** Zu  $A, B \in g$ ,  $A \neq B$ , existiert stets die Mittelsenkrechte  $m_{A,B} \perp g$ , die Gerade  $l := (P, m_{A,B})$  ist nach Satz 8.3 das gesuchte Lot.

*Frage:* Wie konstruiert man Lote in der Anschauungsebene?

Das Lot  $l$  durch  $A$  zu einer Geraden  $g$  schreiben wir auch  $l = (A \perp g)$ . Im Folgenden werden drei nicht kollineare Punkte  $A, B, C$  als *Dreieck*  $ABC$  bezeichnet.

**Satz 8.5** (Umkreis eines Dreiecks)

In jedem Dreieck  $ABC$  schneiden sich die Mittelsenkrechten  $m_{A,B}$ ,  $m_{A,C}$ ,  $m_{B,C}$  in einem Punkt  $M$ .  $M$  ist der Mittelpunkt des *Umkreises*  $k$  von  $ABC$ , d.h.,  $k = k_M(A) = k_M(B) = k_M(C)$ .

**Beweis:** Aus  $AB \perp m_{A,B}$ ,  $AC \perp m_{A,C}$  und  $AB \nparallel AC$  folgt aus dem letzten Korollar die Existenz von  $M := m_{A,B} \cap m_{A,C}$ .

$$\Rightarrow \{B, M\} \equiv \{A, M\} \equiv \{C, M\} \Rightarrow M \in m_{B,C} \text{ und } A, B, C \in k_M(A) \cap k_M(B) \cap k_M(C).$$

**Def 8.2** In jedem Dreieck  $ABC$  heißt das Lot  $h_A := (A \perp BC)$  die *Höhe* auf  $BC$  durch  $A$ .

Analog sind  $h_B = (B \perp AC)$  und  $h_C = (C \perp AB)$  die anderen Höhen des Dreiecks  $ABC$ .

**Satz 8.6** (Höhenschnittpunkt eines Dreiecks)

In jedem Dreieck  $ABC$  schneiden sich die Höhen  $h_A$ ,  $h_B$ ,  $h_C$  in einem Punkt  $H$ .

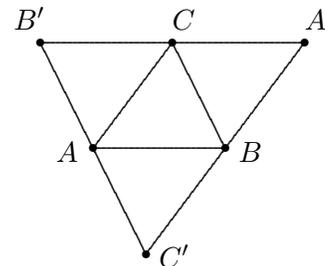
**Beweis:** Wir ergänzen  $ABC$  zu Parallelogrammen  $(A, B, C, B')$ ,  $(C, A, B, A')$ ,  $(B, C, A, C')$  und erhalten

$$\{A, B'\} \equiv \{B, C\} \equiv \{A, C'\}, \quad \{B, C'\} \equiv \{A, C\} \equiv \{A', B\}, \\ \{A', C\} \equiv \{A, B\} \equiv \{B', C\}.$$

Damit ist  $A \in m_{B',C'}$ ,  $B \in m_{A',C'}$ ,  $C \in m_{A',B'}$ .

Wegen  $h_A \perp BC$  und  $BC \parallel B'C'$  ist  $h_A \perp B'C' \Rightarrow h_A = m_{B',C'}$ .

Weil analog  $h_B = m_{A',C'}$  und  $h_C = m_{A',B'}$  gilt, folgt die Behauptung aus Satz 8.5., der Mittelpunkt des Umkreises von  $A'B'C'$  ist gleichzeitig der gesuchte Höhenschnittpunkt von  $ABC$ .



**Satz 8.7** In einem Dreieck  $ABC$  sei  $M$  die Mitte von  $\{A, B\}$  und  $M'$  die Mitte von  $\{A, C\}$ . Dann ist  $MM' \parallel BC$ .

**Beweis:** Es ist  $A = \varphi_M(B)$ ,  $C = \varphi_{M'}(A)$ , wegen  $B \neq C$  ist  $M \neq M'$ . Nach Satz 7.3 ist  $\varphi_{M'} \circ \varphi_M$  eine Translation  $\tau$  in Richtung  $MM'$ . Wegen  $\tau(B) = \varphi_{M'}(\varphi_M(B)) = \varphi_{M'}(A) = C$  ist  $BC = B\tau(B) \parallel MM'$ .

**Def 8.3** Sei  $M$  die Mitte von  $\{A, B\}$ . Dann heißt  $k_M(A) = k_M(B)$  *Thaleskreis* über  $AB$ , geschrieben  $k(A, B)$ .

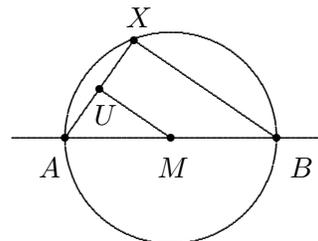
Aus der Schulzeit erinnert man sich vielleicht noch, dass der Thaleskreis etwas mit rechten Winkeln zu tun hat. Wir haben in dieser Vorlesung zwar bisher keine Winkel eingeführt, wissen aber, was senkrecht bedeutet.

**Satz 8.8** Sei  $X \neq A, B \in \mathbb{P}$ . Dann gilt  $X \in k(A, B) \iff AX \perp BX$

**Beweis:** Für  $X \neq A$  sei  $U$  die Mitte von  $\{A, X\}$ . Wenn wir die Mitte von  $\{A, B\}$  mit  $M$  bezeichnen, ist nach Definition des Thaleskreis  $k(A, B) = k_M(A)$ . Damit ist

$$X \in k(A, B) \iff \{A, M\} \equiv \{X, M\} \iff UM = m_{A,X}$$

„ $\Rightarrow$ “: Weil  $ABX$  ein Dreieck mit Mittlen  $M$  und  $U$  ist, folgt aus Satz 8.7  $UM \parallel BX$ . Aus Satz 8.3 folgt dann  $AX \perp BX$ .



„ $\Leftarrow$ “: Sei  $AX \perp BX$ . Erneut ergibt Satz 8.7  $UM \parallel BX$ , zusammen mit Satz 8.3 erhalten wir diesmal  $AX \perp UM$ , d.h.  $UM = m_{A,X}$ .

## 9 Bewegungen Teil 2: Spiegelungen und Drehungen

Im vorletzten Paragraphen hatten wir uns das erste Mal mit Bewegungen beschäftigt, dort standen Punktspiegelungen im Zentrum unseres Interesses. Jetzt wollen wir auf ähnliche Weise Geradenspiegelungen untersuchen. Wir werden feststellen, dass diese Abbildungen die elementaren Bausteine sind, aus denen alle Bewegungen zusammengesetzt sind.

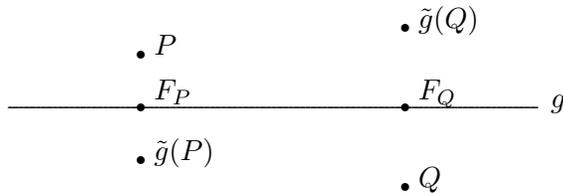
**Def 9.1** Sei  $g \in \mathbb{G}$ ,  $P \in \mathbb{P}$  und  $h = (P \perp g)$ . Der Schnittpunkt  $F_P := g \cap h$  heißt *Lotfußpunkt*.

Mit Hilfe von Punktspiegelungen an Lotfußpunkten definieren wir Geradenspiegelungen:

**Def 9.2** Sei  $g \in \mathbb{G}$ . Die Abbildung

$$\tilde{g} : \begin{cases} \mathbb{P} & \rightarrow & \mathbb{P} \\ X & \mapsto & \varphi_{F_X}(X) \end{cases} \quad \text{heißt Geradenspiegelung an } g$$

Geradenspiegelungen ordnen jedem Punkt  $X$  das Bild unter der Punktspiegelung an dem jeweiligen Lotfußpunkt zu. Man beachte, dass die Schreibweise  $\tilde{g}$  nichts mit den Knickgeraden der Moultonebene zu tun hat!



Im folgenden Satz werden die wichtigsten Eigenschaften von Geradenspiegelungen zusammengestellt.

**Satz 9.1** Für jede Geradenspiegelung  $\tilde{g}$  gilt

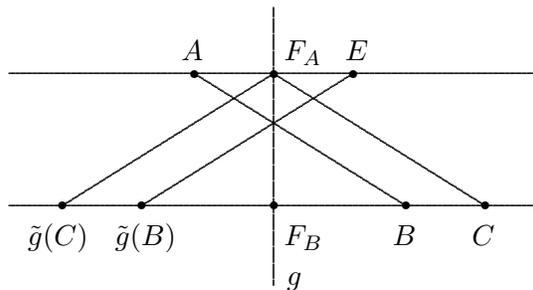
- (1)  $\tilde{g}$  ist bijektiv und involutorisch
- (2)  $g = m_{P, \tilde{g}(P)} \quad \forall P \in \mathbb{P} \setminus g$
- (3)  $g = m_{A, B} \iff \tilde{g}(A) = B$
- (4)  $g$  ist die Menge aller Fixpunkte, also  $\text{Fix } \tilde{g} := \{X \in \mathbb{P} \mid \tilde{g}(X) = X\} = g$
- (5) Die Menge aller Fixgeraden ist  $\{g\} \cup \{h \in \mathbb{G} \mid h \perp g\}$
- (6)  $\tilde{g}$  ist eine Bewegung und damit distanztreu

**Beweis:** Wir zeigen nur die Distanztreue  $\{A, B\} \equiv \{\tilde{g}(A), \tilde{g}(B)\}$  für alle  $\{A, B\} \in \mathbb{P}_2$ , alle anderen Behauptungen sind mehr oder weniger direkt einsichtig. Hierzu untersuchen wir zwei Fälle:

1. Fall:  $\{A, B\} \cap g \neq \emptyset$ : Liegen beide Punkte auf  $g$ , ist wegen  $\{A, B\} = \{\tilde{g}(A), \tilde{g}(B)\}$  nichts mehr zu zeigen. Sei oBdA  $A \in g$  und  $B \notin g$ . Weil  $A \in g = m_{B, \tilde{g}(B)}$  folgt auch in diesem Fall direkt  $\{A, B\} \equiv \{\tilde{g}(A), \tilde{g}(B)\}$ .

2. Fall:  $\{A, B\} \cap g = \emptyset$ : Falls  $AB \perp g$ , stimmen die Lotfußpunkte  $F_A$  und  $F_B$  überein, die Behauptung folgt aus Satz 7.1 über Punktspiegelungen ( $\tilde{g}$  stimmt auf  $A$  und  $B$  mit einer Punktspiegelung überein).

Interessant ist lediglich der andere Fall  $AB \not\perp g$ . Wir benötigen weitere Punkte  $C := BF_B \cap (F_A, AB)$  und  $E := AF_A \cap (\tilde{g}(B), F_A \tilde{g}(C))$ .



Weil  $(A, B, C, F_A)$  und  $(F_A, \tilde{g}(C), \tilde{g}(B), E)$  Parallelogramme sind, folgen

$$\{A, B\} \equiv \{F_A, C\} \equiv \{F_A, \tilde{g}(C)\} \equiv \{E, \tilde{g}(B)\} \quad (*)$$

und (beachte  $BC \perp g$ )

$$\{A, F_A\} \equiv \{B, C\} \equiv \{\tilde{g}(B), \tilde{g}(C)\} \equiv \{E, F_A\} \quad (**)$$

Es ist  $A \neq E$ , da sonst aus (\*)  $\{A, B\} \equiv \{A, \tilde{g}(B)\}$  und hieraus  $A \in m_{B, \tilde{g}(B)} = g$  folgt, ein Widerspruch zur Voraussetzung  $A \notin g$ .

Damit folgt aus (\*\*)  $\tilde{g}(A) = E$ , in (\*) steht nichts anderes als die Behauptung  $\{A, B\} \equiv \{\tilde{g}(A), \tilde{g}(B)\}$ .

Für jede Bewegung  $\varphi$  und Gerade  $g$  ist  $\varphi(g)$  ebenfalls eine Gerade. Der nächste Satz untersucht, in welchem Verhältnis  $\tilde{g}$  (Geradenspiegelung an  $g$ ) zu  $\widetilde{\varphi(g)}$  (Geradenspiegelung an  $\varphi(g)$ ) steht.

**Satz 9.2** Sei  $\varphi$  eine Bewegung. Dann gilt für jede Gerade  $g$   $\widetilde{\varphi(g)} = \varphi \tilde{g} \varphi^{-1}$  bzw.  $\tilde{g} = \varphi^{-1} \widetilde{\varphi(g)} \varphi$

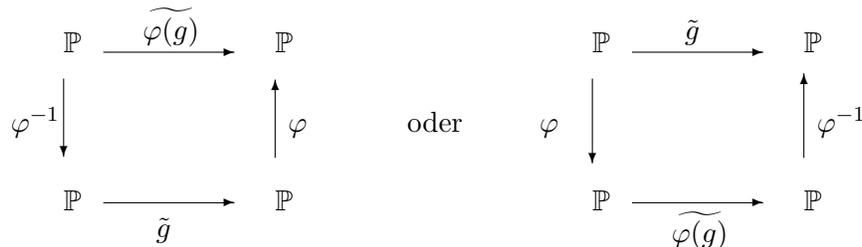
**Beweis:** Für  $X \in \mathbb{P} \setminus g$  ist  $g = m_{X, \tilde{g}(X)}$ , also  $\varphi(g) = \varphi(m_{X, \tilde{g}(X)}) = m_{\varphi(X), \varphi(\tilde{g}(X))}$ . Dies bedeutet, dass die Geradenspiegelung an  $\varphi(g)$  den Punkt  $\varphi(X)$  auf  $\varphi(\tilde{g}(X))$  abbildet:

$$\widetilde{\varphi(g)}(\varphi(X)) = \varphi(\tilde{g}(X)) \iff (\widetilde{\varphi(g)} \circ \varphi)(X) = (\varphi \circ \tilde{g})(X)$$

Für  $X \in g$  ist  $\varphi(X) \in \varphi(g)$  und  $\tilde{g}(X) = X$ , also ebenfalls  $(\widetilde{\varphi(g)} \circ \varphi)(X) = \widetilde{\varphi(g)}(\varphi(X)) = \varphi(X) = \varphi(\tilde{g}(X)) = (\varphi \circ \tilde{g})(X)$ . Insgesamt folgt

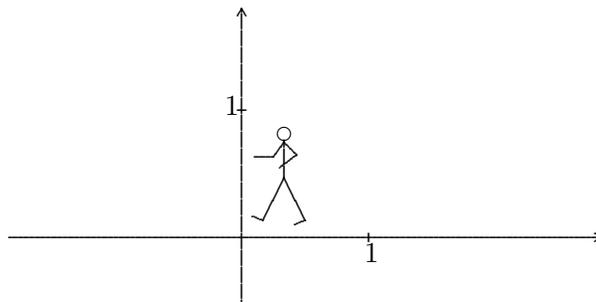
$$\widetilde{\varphi(g)} \circ \varphi = \varphi \circ \tilde{g} \iff \widetilde{\varphi(g)} = \varphi \tilde{g} \varphi^{-1} \iff \tilde{g} = \varphi^{-1} \widetilde{\varphi(g)} \varphi$$

Mathematiker drücken diesen Sachverhalt gerne durch ein *Diagramm* aus:



Weil es egal ist, auf welchem Weg man von oben links nach oben rechts gelangt, spricht man von einem *kommutativen* Diagramm.

*Beispiel:* In der Anschauungsebene sei  $\tau$  die Translation  $(x, y) \mapsto (x - 2, y)$ . Was passiert mit dem Wanderer unter der Abbildung  $\tau(\widetilde{g_{1,-1}})$ ? Welche Abbildung  $(x, y) \mapsto ??$  ist  $\widetilde{g_{1,-1}}$ ?



Im Beweis des nächsten Satzes benötigen wir die aus der Anschauungsebene wohlbekannte Tatsache, dass zwei verschiedene Kreise höchstens zwei Punkte gemeinsam haben.

**Satz 9.3** Jede Bewegung  $\alpha$  mit mindestens zwei Fixpunkten ist entweder eine Geradenspiegelung oder die Identität.

**Beweis:**  $\alpha$  habe die Fixpunkte  $\{A, B\} \in \mathbb{P}_2$ . Für  $X \in \mathbb{P} \setminus \{A, B\}$  ist  $\{A, X\} \equiv \{\alpha(A), \alpha(X)\} \equiv \{A, \alpha(X)\}$  und  $\{B, X\} \equiv \{B, \alpha(X)\}$ . Da für  $g = AB$  auch  $\{A, X\} \equiv \{A, \tilde{g}(X)\}$  und  $\{B, X\} \equiv \{B, \tilde{g}(X)\}$  gilt, folgt  $\{X, \alpha(X), \tilde{g}(X)\} \in k_A(X) \cap k_B(X)$ .

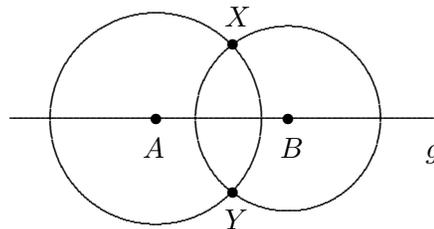
Wegen  $|k_A(X) \cap k_B(X)| \leq 2$  sind zwei Fälle möglich:

1. Fall  $|k_A(X) \cap k_B(X)| = |\{X, \alpha(X), \tilde{g}(X)\}| = 1 \Rightarrow \alpha(X) = \tilde{g}(X) = X$ , dies bedeutet  $X \in g$ .

2. Fall  $|k_A(X) \cap k_B(X)| = 2$ , also  $\{X, \alpha(X), \tilde{g}(X)\} = \{X, Y\} \in \mathbb{P}_2$ .

Wegen  $\{A, X\} \equiv \{A, Y\}$  und  $\{B, X\} \equiv \{B, Y\}$  folgt  $A, B \in m_{X,Y}$ .

Damit ist  $AB = g = m_{X,Y}$  und  $X \notin g \Rightarrow \tilde{g}(X) \neq X \Rightarrow Y = \tilde{g}(X)$  und  $\alpha(X) \in \{X, \tilde{g}(X)\} = k_A(X) \cap k_B(X)$ .



*Beh.:* Für alle Punkte  $P$  gilt entweder  $\alpha(P) = P$  (also  $\alpha = id$ ) oder für alle Punkte  $P$  gilt  $\alpha(P) = \tilde{g}(P)$  (also  $\alpha = \tilde{g}$ ).

*Bew.:* Angenommen, es gibt  $U, V \in \mathbb{P}$  mit  $\alpha(U) = U \neq \tilde{g}(U)$  einerseits und  $\alpha(V) = \tilde{g}(V) \neq V$  andererseits.

$\Rightarrow \{U, V\} \equiv \{\alpha(U), \alpha(V)\} = \{U, \tilde{g}(V)\} \Rightarrow U \in m_{V, \tilde{g}(V)} = g$ , ein Widerspruch zu  $U \neq \tilde{g}(U)$ .

In Satz 7.3 wurde gezeigt, dass die Verkettung zweier Punktspiegelungen stets eine Translation ergibt. Bei zwei Geradenspiegelungen hängt das Ergebnis davon ab, ob die Geraden parallel sind oder nicht.

**Satz 9.4** Für  $\{g, h\} \in \mathbb{G}_2$  gilt

- (1)  $\text{Fix}(\tilde{g} \circ \tilde{h}) = g \cap h$  (Es gibt höchstens einen Fixpunkt)
- (2)  $g \parallel h \Rightarrow \tilde{g} \circ \tilde{h}$  ist eine Translation  $\neq id$  in senkrechter Richtung zu  $g$ .

**Beweis:** (1) „ $\subseteq$ “:  $U \in \text{Fix}(\tilde{g} \circ \tilde{h}) \iff U = (\tilde{g} \circ \tilde{h})(U) \iff \tilde{g}(U) = \tilde{h}(U)$  ( $\tilde{g}$  ist selbstinvers.)

Zu zeigen ist  $U \in g \cap h$ , dies geschieht indirekt:

$U \notin g \Rightarrow U \neq \tilde{g}(U) = \tilde{h}(U) \Rightarrow g = m_{U, \tilde{g}(U)} = m_{U, \tilde{h}(U)} = h$ , aber nach Voraussetzung ist  $g \neq h$ .

$U \notin h$  widerlegt man völlig analog.

„ $\supseteq$ “:  $U \in g \cap h \Rightarrow (\tilde{g} \circ \tilde{h})(U) = \tilde{g}(\tilde{h}(U)) = \tilde{g}(U) = U \Rightarrow U \in \text{Fix}(\tilde{g} \circ \tilde{h})$

(2) Wegen  $g \cap h = \emptyset$  kann  $\tilde{g} \circ \tilde{h}$  nach (1) keinen Fixpunkt haben. (\*)

Wir zeigen  $(\tilde{g} \circ \tilde{h})(l) \parallel l \forall l \in \mathbb{G}$ . (Dann ist  $\tilde{g} \circ \tilde{h}$  eine Translation.)

Für  $l \perp g$  (und damit  $l \perp h$ ) ist  $l$  nach Satz 9.1 (5) eine Fixgerade unter  $\tilde{g}$  und  $\tilde{h}$ , also gilt  $l = (\tilde{g} \circ \tilde{h})(l)$ .

Für  $l \not\perp g$  folgt  $l \parallel (\tilde{g} \circ \tilde{h})(l)$  indirekt:

Sonst  $\exists_1 A \in l \cap (\tilde{g} \circ \tilde{h})(l)$ . Weil  $k := (A \perp g)$  eine Fixgerade unter  $\tilde{g}$  und  $\tilde{h}$  ist (siehe erneut Satz 9.1 (5)), folgt  $(\tilde{g} \circ \tilde{h})(A) \in k \cap (\tilde{g} \circ \tilde{h})(l)$ . Weil  $k \not\parallel (\tilde{g} \circ \tilde{h})(l)$  (sonst  $(\tilde{g} \circ \tilde{h})(l) = k \perp g \Rightarrow l \perp g$ ) ist  $A$  Fixpunkt, ein Widerspruch zu (\*).

$\tilde{g} \circ \tilde{h}$  ist eine Translation ohne Fixpunkt, die senkrechte Richtung folgt aus den Überlegungen zum Fall  $l \perp g$  von oben.

**Satz 9.5** Sei  $\tau \neq id$  eine Translation in Richtung  $f$ , sei  $g \perp f$ . Dann gilt

- (1)  $\exists_1 h \in \mathbb{G}, h \parallel g$  mit  $\tau = \tilde{h} \circ \tilde{g}$
- (2)  $\exists_1 k \in \mathbb{G}, k \parallel g$  mit  $\tau = \tilde{g} \circ \tilde{k}$

**Beweis:** (1): Nach alten Sätzen existiert  $A := g \cap f$ . Für  $h := m_{A, \tau(A)}$  ist  $g \parallel h$  und damit  $\tilde{h} \circ \tilde{g}$  eine Translation in Richtung  $f$  mit  $(\tilde{h} \circ \tilde{g})(A) = \tilde{h}(A) = \tau(A)$ .

(2): Für  $k := \tilde{g}(h)$  ist nach Satz 9.2  $\tilde{k} = \widetilde{\tilde{g}(h)} = \tilde{g} \tilde{h} \tilde{g} \iff \tilde{g} \tilde{k} = \tilde{h} \tilde{g} = \tau$

*Frage:* Wie findet man zu  $g \parallel h$  die Gerade  $k$  mit  $\tilde{g} \tilde{h} \tilde{k} = \tilde{h}$ ?

Für  $g \not\parallel h$  besitzt  $\tilde{g} \tilde{h}$  genau einen Fixpunkt und kann deshalb keine Translation sein.

**Def 9.3** Eine Bewegung heißt *Drehung*, wenn sie genau einen Fixpunkt besitzt oder die Identität ist.

Die aus der Schule bekannten Drehungen sind Beispiele für Drehungen im Sinne dieser Definition, ferner handelt es sich bei den in beliebigen normalen euklidischen Ebenen untersuchten Punktspiegelungen um spezielle Drehungen. Der Fixpunkt einer Drehung  $\neq id$  heißt *Drehzentrum*. Analog zum letzten Satz gilt für Drehungen

**Satz 9.6** Sei  $\delta \neq id$  eine Drehung mit Drehzentrum  $D$ , sei  $g \in \mathbb{G}$  mit  $D \in g$ . Dann gilt

- (1)  $\exists_1 h \in \mathbb{G}, D \in h$  mit  $\delta = \tilde{h} \circ \tilde{g}$
- (2)  $\exists_1 k \in \mathbb{G}, D \in k$  mit  $\delta = \tilde{g} \circ \tilde{k}$

**Beweis** zur Existenz der gesuchten Geraden (der Rest ist einfach) (1): Für  $A \in g \setminus \{D\}$ , also  $A \neq \delta(A)$ , existiert die Mittelsenkrechte  $h := m_{A, \delta(A)}$ . Weil  $\{A, D\} \equiv \{\delta(A), \delta(D)\} = \{\delta(A), D\}$  ist  $D \in h$  und  $h \neq g$ .

Die Bewegung  $\tilde{h} \delta \neq id$  hat zwei Fixpunkte  $A$  und  $D$ :

$$\begin{aligned} (\tilde{h} \delta)(A) &= \tilde{h}(\delta(A)) = A \quad (\text{denn } h \text{ ist entsprechende Mittelsenkrechte}) \\ (\tilde{h} \delta)(D) &= \tilde{h}(\delta(D)) = \tilde{h}(D) = D \quad (\text{warum?}) \end{aligned}$$

Nach Satz 9.3 ist  $\tilde{h} \delta$  eine Geradenspiegelung, wegen  $AD = g$  muss gelten  $\tilde{h} \delta = \tilde{g} \iff \delta = \tilde{h} \tilde{g}$ .

(2) Für  $k := \tilde{g}(h)$  ist nach Satz 9.2  $\tilde{k} = \widetilde{\tilde{g}(h)} = \tilde{g} \tilde{h} \tilde{g} = \tilde{g} \delta \iff \tilde{g} \tilde{k} = \delta$ .

Jede Translation und jede Drehung besteht aus je zwei Geradenspiegelungen. Wir sehen uns das noch einmal an einigen *Beispielen* in der Anschauungsebene an:

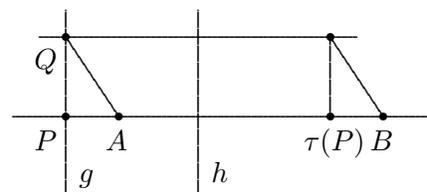
1) *Frage:* Wie findet man Geradenspiegelungen zu einer Translation  $\tau$ , die durch ein Punktepaar  $A, B$  mit  $B = \tau(A)$  gegeben ist?

*Antwort:* Für  $A = B$  ist  $\tau = \tilde{g} \tilde{g} = id$  mit beliebigem  $g \in \mathbb{G}$ ;

für  $A \neq B$  wählen wir eine beliebige Gerade  $g \perp AB$ .

Sei  $P := g \cap AB$ . Mit Hilfe eines weiteren Punktes  $Q \in g$  ist  $\tau(P) = AB \cap ((Q, AB) \cap (B, AQ), PQ)$  (warum?).

Für  $h := m_{P, \tau(P)}$  und  $k := \tilde{g}(h)$  ist  $\tau = \tilde{h} \tilde{g} = \tilde{g} \tilde{k}$ .



2) *Frage*: Wie findet man Geradenspiegelungen zu einer Translation  $\tau$ , die durch  $\tau : (x, y) \mapsto (x + 2, y)$  gegeben ist?

*Antwort*: Wir gehen wie in 1) vor. Weil  $\tau$  eine Translation in Richtung  $g_{0,0}$  ist, wählen wir beispielsweise  $g = g_0$ . Wegen  $\tau(g_0 \cap g_{0,0}) = (2, 0)$  ist  $h = g_1 \Rightarrow (\tilde{h} \tilde{g})(x, y) = \tilde{g}_1(\tilde{g}_0(x, y)) = \tilde{g}_1(-x, y) = (x + 2, y) = \tau(x, y)$ , die gesuchte Geradenspiegelungen sind  $\tilde{g}_1 : (x, y) \mapsto (2 - x, y)$  und  $\tilde{g}_0 : (x, y) \mapsto (-x, y)$ .

*Zusatzfrage*: Für welche  $k \in \mathbb{G}$  ist  $\tau = \tilde{g}_0 \tilde{k}$ ?

*Antwort*:  $\tilde{k} = \tilde{g}(h) = \tilde{g}_0(g_1) = \widetilde{g_{-1}} : (x, y) \mapsto (-2 - x, y)$ .

3) *Frage*: Wie findet man Geradenspiegelungen zu einer Drehung  $\delta$  mit Zentrum  $D = (0, 0)$ , die durch  $\delta(A) = (0, 1)$  für  $A = (1, 0)$  gegeben ist?

*Antwort*: Man wähle beispielsweise die Gerade  $DA = g_{0,0}$ . Für  $h = m_{A,\delta(A)} = g_{1,0}$  ist  $\delta = \tilde{h} \tilde{g} = \widetilde{g_{1,0}} \widetilde{g_{0,0}}$ , also  $\delta(x, y) = \widetilde{g_{1,0}}(x, -y) = (-y, x)$ .

Man kommt auch mit anderen Geraden zum Ziel, beispielsweise setze  $g = g_0$  mit  $(0, 1) \in g_0$ . Wegen  $\delta((0, 1)) = (-1, 0)$  ist  $\delta = \widetilde{g_{-1,0}} \tilde{g}_0$ ; denn  $m_{(0,1),(-1,0)} = g_{-1,0}$ .

$\tilde{g} \tilde{h}$  ist für parallele Geraden eine Translation und sonst eine Drehung. Im nächsten sogenannten *Dreispiegelungssatz* wird untersucht, wie sich die zugehörigen Geradenspiegelungen im Fall dreier Geraden verhalten, die im Büschel liegen, für die also  $g \parallel h \parallel k$  oder  $g \cap h \cap k = P$  gilt.

**Satz 9.7** Seien  $g, h, k \in \mathbb{G}$ . Dann gilt

$g, h, k$  liegen im Büschel  $\iff \tilde{g} \tilde{h} \tilde{k}$  ist eine Geradenspiegelung.

**Beweis**: „ $\Rightarrow$ “: Wir unterscheiden die Fälle  $g \parallel h$  und  $g \not\parallel h$ :

1. Fall  $g \parallel h$ : Ist  $g = h$ , liegen  $g, h, k$  stets im Büschel und es ist  $\tilde{g} \tilde{h} \tilde{k} = \tilde{k}$ . Ist  $g \cap h = \emptyset$ , folgt aus Satz 9.3, dass  $\tilde{g} \tilde{h}$  eine Translation  $\tau \neq id$  in senkrechter Richtung zu  $g$  ist. Aus der Voraussetzung *im Büschel liegen* folgt  $g \parallel k$ , damit ist die Richtung von  $\tau$  senkrecht zu  $k$ . Diese Konstellation wenden wir auf Satz 9.5 (1) an:  $\exists l \in \mathbb{G}, l \parallel k$  mit  $\tau = \tilde{l} \tilde{k}$ .

Der Rest ist Kinderspiel:  $\tilde{g} \tilde{h} \tilde{k} = \tau = \tilde{l} \tilde{k} \Rightarrow \tilde{g} \tilde{h} \tilde{k} = \tilde{l}$ .

2. Fall  $g \cap h = D$ : Jetzt handelt es sich bei  $\tilde{g} \tilde{h}$  um eine Drehung  $\delta$ , aus der Büschel-Voraussetzung folgt  $D \in k$ . Wir argumentieren analog zum ersten Fall mit Satz 9.6 (1):

Sei  $\delta \neq id$  eine Drehung mit Zentrum  $D$  und  $D \in k$ . Dann gibt es genau eine Gerade  $l$  mit  $D \in l$  und  $\delta = \tilde{l} \tilde{k} \Rightarrow \tilde{g} \tilde{h} \tilde{k} = \tilde{l}$ .

„ $\Leftarrow$ “: Beweisen wir an dieser Stelle nicht und erhalten uns so die Möglichkeit einer Übungsaufgabe.

Wir sind (fast) am Ende unserer Überlegungen über Bewegungen angelangt und wiederholen:

Bewegungen sind längentreue Kollineationen, sie bilden bezüglich der Verkettung eine Gruppe. Jede Bewegung  $\neq id$  mit mehr als einem Fixpunkt ist eine Geradenspiegelung. Jede Bewegung mit genau einem Fixpunkt ist eine Drehung und deshalb als Verkettung zweier Geradenspiegelungen darstellbar. Was wissen wir über Bewegungen ohne Fixpunkt? Es können Translationen sein, die ebenfalls eine Verkettung zweier Geradenspiegelungen sind. Im nächsten Beispiel werden wir sehen, dass es aber auch Bewegungen ohne Fixpunkt gibt, die keine Translationen sind.

*Beispiel*: Seien in der Anschauungsebene die Geraden  $g_0, g_{0,0}$  und  $g_{-1,1}$  gegeben. Um welche Abbildung handelt es sich bei  $\tilde{g}_0 \widetilde{g_{-1,1}} \widetilde{g_{0,0}}$ ?

$$\tilde{g}_0 \widetilde{g_{-1,1}} \widetilde{g_{0,0}} : (x, y) \mapsto (??, ??)$$

$\widetilde{g}_0$  und  $\widetilde{g}_{0,0}$  sind leicht zu durchschauen, es ist  $\widetilde{g}_0 : (x, y) \mapsto (-x, y)$  und  $\widetilde{g}_{0,0} : (x, y) \mapsto (x, -y)$ . Um  $\widetilde{g}_{-1,1}$  in den Griff zu bekommen, wenden wir die gleiche Idee wie bei der Darstellung von Streckungen an (siehe Ende von § 5). Statt sofort an  $g_{-1,1}$  zu spiegeln, verschieben wir diese Gerade erst in eine Ursprungsgerade, spiegeln an dieser und schieben zurück:

$$\widetilde{g}_{-1,1} = \tau^{-1} \widetilde{g}_{-1,0} \tau \quad \text{mit} \quad \tau((x, y)) = (x - 1, y) \quad \text{und} \quad \widetilde{g}_{-1,0}((x, y)) = (-y, -x)$$

Insgesamt ist  $\widetilde{g}_0 \widetilde{g}_{-1,1} \widetilde{g}_{0,0} = \widetilde{g}_0 \tau^{-1} \widetilde{g}_{-1,0} \tau \widetilde{g}_{0,0}$ , nacheinander folgt (von rechts nach links abgebildet)

$$(x, y) \mapsto (x, -y) \mapsto (x - 1, -y) \mapsto (y, 1 - x) \mapsto (y + 1, 1 - x) \mapsto (-y - 1, 1 - x)$$

Diese Bewegung hat keine Fixpunkte (warum nicht?), ist aber keine Translation; denn  $g_k$  wird auf  $g_{0,1-k}$  abgebildet.

Mit diesem Beispiel einer sogenannten *Gleitspiegelung* oder *Schubspiegelung* haben wir die letzte uns bisher unbekannte Bewegungsart kennengelernt, eine Verkettung von drei Geradenspiegelungen, die nicht im Büschel liegen. Wir fassen unser Wissen über Bewegungen in normalen euklidischen Ebenen in einem Satz zusammen, den wir nicht beweisen werden.

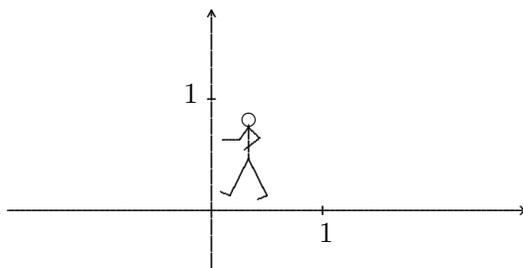
**Satz 9.8** (1) Jede Bewegung besteht aus zwei oder drei Geradenspiegelungen.

(2) Die Menge der zweifachen Geradenspiegelungen bildet (mit  $\circ$ ) die Gruppe der *eigentlichen* Bewegungen, sie besteht aus Drehungen und Translationen.

(3) Die Menge der dreifachen Geradenspiegelungen umfasst die *uneigentlichen* Bewegungen, sie besteht aus Geradenspiegelungen und Gleitspiegelungen.

Bewegungen sind genau die Abbildungen, die in der Anschauungsebene Dreiecke in kongruente Dreiecke überführen, daher heißen sie auch *Kongruenzabbildungen*.

*Frage und Beispiel:* In der Anschauungsebene ist  $\alpha : (x, y) \mapsto (y + 1, x + 1)$  eine Gleitspiegelung. Wo liegen  $\alpha(\text{Wanderer})$  und  $\alpha^2(\text{Wanderer})$ ? Welche drei Geradenspiegelungen ergeben  $\alpha$ ?



## 10 Winkel

Wir bleiben in normalen euklidischen Ebenen  $(\mathbb{P}, \mathbb{G}, \equiv)$  und wollen einen Winkelbegriff einführen. Zur Beruhigung sei versichert, dass alle Beispiele in diesem Abschnitt aus der Anschauungsebene stammen und es vollkommen ausreicht, wenn man die folgenden Ausführungen im  $\mathbb{R}^2$  verstanden hat.

**Def 10.1** Jedes geordnete Paar  $(g, h) \in \mathbb{G} \times \mathbb{G}$  heißt *Winkel* mit *erstem Schenkel*  $g$  und *zweitem Schenkel*  $h$ .

Im Gegensatz zur Streckendefinition, bei der es nicht auf die Reihenfolge der beiden Punkte ankommt, ist hier die Reihenfolge der Geraden wichtig. (Beachte die unterschiedliche Schreibweise: Strecke als Menge von zwei Punkten, Winkel als geordnetes Tupel). Man spricht deshalb auch von *orientierten* Winkeln. Für manche Zwecke kann es sinnvoller sein, nichtorientierte Winkel oder aber orientierte oder nichtorientierte Winkel zwischen Halbgeraden (Strahlen) zu untersuchen. Wir beschränken unsere Überlegungen im Folgenden auf Winkel im Sinn von Definition 10.1.

Geraden können parallel sein oder nicht. Jedes Paar  $(g, h)$  mit  $g \parallel h$ , wobei der Fall  $g = h$  nicht ausgeschlossen ist, heißt *Nullwinkel*. Im Fall  $g \nparallel h$  heißt der Schnittpunkt  $g \cap h$  *Scheitel* des Winkels  $(g, h)$ . Wie bei den Strecken wollen wir Winkel lediglich vergleichen, es kommt uns nicht auf die konkrete Größe eines Winkels an.

**Def 10.2** a) Winkel  $(g, h)$  und  $(k, l)$ , die keine Nullwinkel sind, heißen *gleichgroß* oder *konform*, geschrieben  $(g, h) \triangle (k, l) : \iff$  Es gibt eine eigentliche Bewegung  $\alpha$  mit  $\alpha(g) = k$  und  $\alpha(h) = l$ .

b) Alle Nullwinkel sind *konform*.

Nullwinkel können nicht zu anderen Winkeln konform sein. Wie man leicht sieht, ist  $\triangle$  eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Winkel. Will man überprüfen, ob zwei Winkel  $(g, h)$  und  $(k, l)$  mit  $g \nparallel h$  und  $k \nparallel l$  konform sind, suche man eine eigentliche Bewegung  $\alpha$  (Translation oder Drehung), die den Scheitel  $g \cap h$  auf den Scheitel  $k \cap l$  und  $g$  auf  $k$  abbildet (dies ist immer möglich). Gilt dann  $\alpha(h) = l$ , sind die Winkel konform.

Die Sonderbehandlung von Nullwinkeln ist leider notwendig, da es beispielsweise keine Bewegung gibt, die in der Anschauungsebene die „gleichgroßen“ Nullwinkel  $(g_0, g_1)$  und  $(g_0, g_2)$  ineinander überführt.

Trotzdem gibt es eine Möglichkeit, mit Hilfe eigentlicher Bewegungen Konformität auch bei Nullwinkel festzustellen. Hierzu nutzen wir die in Satz 9.8 gelernte Tatsache aus, dass jede eigentliche Bewegung aus zwei miteinander verketteten Geradenspiegelungen besteht.

**Satz 10.1**  $(g, h) \triangle (k, l) \iff \exists X \in \mathbb{P} : \widetilde{(X, g)} \circ \widetilde{(X, h)} = \widetilde{(X, k)} \circ \widetilde{(X, l)}$

**Beweisidee:** Im Fall von Nullwinkel ist  $(g, h) \triangle (k, l) \iff g \parallel h$  und  $k \parallel l$ . Für jeden Punkt  $X$  gilt demnach

$$(g, h) \triangle (k, l) \iff \widetilde{(X, g)} = \widetilde{(X, h)} \text{ und } \widetilde{(X, k)} = \widetilde{(X, l)} \iff \widetilde{(X, g)} \circ \widetilde{(X, h)} = id = \widetilde{(X, k)} \circ \widetilde{(X, l)}.$$

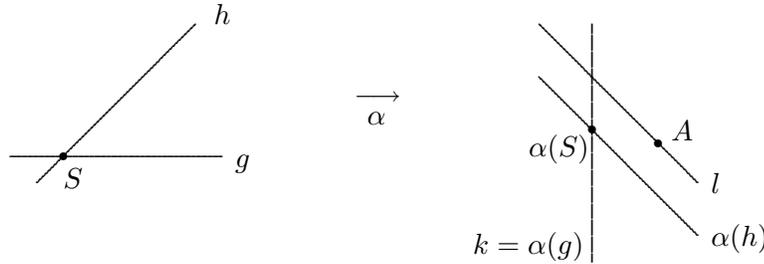
Im andern Fall  $g \nparallel h$  ist  $\widetilde{(X, g)} \nparallel \widetilde{(X, h)}$  und damit  $\widetilde{(X, g)} \circ \widetilde{(X, h)} = \delta_1$  eine Drehung. Man zeigt dann, dass die Winkel  $(g, h)$  und  $(k, l)$  genau dann konform sind, wenn die zugehörigen Drehungen  $\delta_1$  und  $\delta_2 = \widetilde{(X, k)} \circ \widetilde{(X, l)}$  übereinstimmen.

Während uns Satz 10.1 im Folgenden hauptsächlich als Hilfsmittel bei Beweisen dienen wird, bilden die nächsten Aussagen wichtige Grundlagen für viele Anwendungen im Geometrieunterricht in der Schule.

**Satz 10.2** (Abtragbarkeit von Winkel)

Sei  $(g, h)$  ein Winkel, sei  $k \in \mathbb{G}$  und  $A \in \mathbb{P}$ . Dann gibt es genau eine Gerade  $l$  mit  $A \in l$  und  $(g, h) \triangleq (k, l)$ .

**Beweisskizze:** Für Nullwinkel folgt die Behauptung direkt aus dem Parallelitätsaxiom affiner Ebenen. Für andere Winkel  $(g, h)$  mit Scheitel  $S$  wähle man eine eigentliche Bewegung  $\alpha$ , die  $g$  auf  $k$  abbildet.  $l := (A, \alpha(h))$  ist die gesuchte Gerade, dies zeigt man mit Hilfe der eigentlichen Bewegung  $\tau \circ \alpha$ , wobei  $\tau$  die Translation ist, die  $\alpha(S)$  auf  $k \cap l$  abbildet:  $(\tau \circ \alpha)(g) = k$ ,  $(\tau \circ \alpha)(h) = \tau(\alpha(h)) = l$ .



**Satz 10.3** (Schenkelaustauschsatz)

Seien  $g, h, k, l \in \mathbb{G}$ , dann gilt  $(g, h) \triangleq (k, l) \iff (h, g) \triangleq (l, k) \iff (g, k) \triangleq (h, l)$

**Beweis:** (Die Zeichnung wird in der Vorlesung beschriftet.)

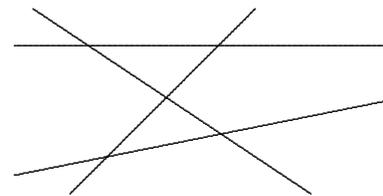
Sei  $X \in \mathbb{P}$  beliebig, sei  $g' := (X, g)$  und analog

$h' := (X, h)$ ,  $k' := (X, k)$ ,  $l' := (X, l)$ . Nach Satz 10.1 gilt

$$(g, h) \triangleq (k, l) \iff \tilde{g}' \tilde{h}' = \tilde{k}' \tilde{l}'$$

Jede Geradenspiegelung ist involutorisch:

$$\iff \tilde{g}' = \tilde{k}' \tilde{l}' \tilde{h}' = \tilde{g}'^{-1} = (\tilde{k}' \tilde{l}' \tilde{h}')^{-1} = \tilde{h}'^{-1} \tilde{l}'^{-1} \tilde{k}'^{-1} = \tilde{h}' \tilde{l}' \tilde{k}' \implies h' g' = l' k' \text{ bzw. } g' k' = h' l'$$



**Korollar** In jedem Parallelogramm  $(A, B, C, D)$  sind gegenüberliegende Winkel konform.

**Beweis:** Sei  $AB = g$ ,  $CD = h$ ,  $AD = k$  und  $BC = l$ . Weil alle Nullwinkel konform sind, gilt  $(g, h) \triangleq (k, l) \triangleq (h, g)$ . Aus Satz 10.3 folgen  $(g, k) \triangleq (h, l)$  und  $(k, h) \triangleq (l, g)$ .

Außer den Nullwinkeln gibt es weitere „besondere“ Winkel:

**Def 10.3**  $(g, h) \in \mathbb{G} \times \mathbb{G}$  heißt *rechter Winkel* :  $\iff g \perp h$ .

Im folgenden Satz fassen wir einige Eigenschaften rechter Winkel zusammen:

**Satz 10.4** Sei  $(g, h)$  ein rechter Winkel

- a)  $(h, g)$  ist ebenfalls ein rechter Winkel
- b)  $(g, h) \triangleq (h, g)$
- c) Alle rechten Winkel sind konform.

**Beweisskizze:** a) Definition 10.3 und Satz 8.1 (dort wurde die Symmetrie der  $\perp$  – Relation behandelt).

b)  $g \perp h \implies \tilde{g}(h) = h \implies \tilde{h} = \tilde{\tilde{g}(h)} = \tilde{g} \tilde{h} \tilde{g} \implies \tilde{g} \tilde{h} = \tilde{h} \tilde{g} \implies (g, h) \triangleq (h, g)$ .

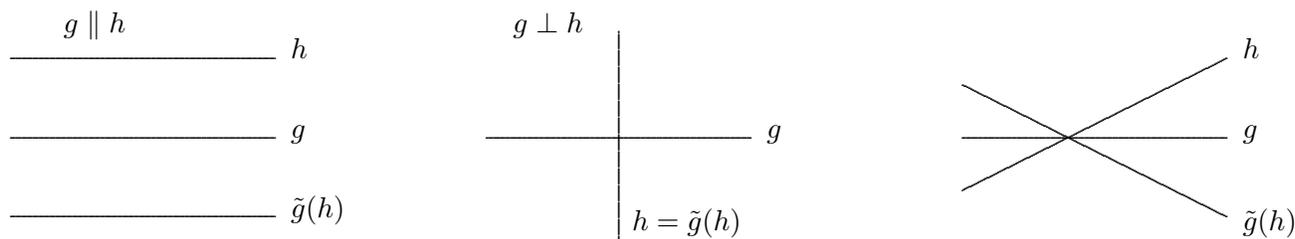
c)  $g \perp h \Rightarrow g \nparallel h \Rightarrow \tilde{g}\tilde{h}$  ist eine Drehung mit Zentrum  $X = g \cap h$ , aus b) folgt  $\tilde{g}\tilde{h} = \tilde{h}\tilde{g}$ , damit ist  $\tilde{g}\tilde{h}$  eine selbstinverse Drehung, d.h.,  $\tilde{g}\tilde{h} = \varphi_X$  (Punktspiegelung).

$k \perp l \Rightarrow k' \perp l'$  für  $k' = (X, k)$  und  $l' = (X, l)$  (folgt aus Satz 8.2)  $\Rightarrow \tilde{k}'\tilde{l}' = \varphi_X \Rightarrow (g, h) \triangle (k, l)$ .

Bevor wir weitere mehr oder weniger bekannte Eigenschaften im Umfeld des Winkelbegriffs zusammentragen, geben wir eine Möglichkeit an, wie man in der Anschauungsebene Winkel „messen“ kann:

Sei  $(g, h)$  ein Winkel mit Scheitel  $S$ . Durch eine eigentliche Bewegung  $\alpha$  kann man  $S$  auf  $(0, 0)$  und  $g$  auf  $g_{0,0}$  abbilden: Man verschiebt zuerst  $S$  auf  $(0, 0)$ , dann dreht man  $g$  um  $(0, 0)$  auf  $g_{0,0}$ , die zusammengesetzte Abbildung ist  $\alpha$ . (Wieviele solcher Abbildungen gibt es?) Je nachdem, auf welche der Ursprungsgeraden der zweite Schenkel  $h$  unter  $\alpha$  abgebildet wird, kann man ein Maß für die Größe des Winkels angeben und so mit Winkelmaßen rechnen.<sup>21</sup>

Kehren wir zurück zum Zusammenhang zwischen Winkel und Geradenspiegelungen. Hierzu betrachten wir zwei Geraden  $g, h$  und vergleichen die Winkel  $(g, h)$ ,  $(g, \tilde{g}(h))$ ,  $(\tilde{g}(h), g)$ .



Man markiere die oben genannten Winkel in den Zeichnungen. Was stellt man fest?

Beh: (1) Für alle Geraden  $g, h$  gilt  $(g, h) \triangle (\tilde{g}(h), g)$ .

(2)  $(g, h) \triangle (g, \tilde{g}(h)) \iff g \parallel h$  oder  $g \perp h$ .

Bew: (1) Für  $g \parallel h$  ist auch  $\tilde{g}(h) \parallel h$  und die Behauptung gilt. Für  $g \nparallel h$  gibt es genau einen Punkt  $X \in g \cap h \cap \tilde{g}(h)$ . Nach Satz 9.2 ist  $\tilde{g}(h) = \tilde{g}\tilde{h}\tilde{g} \iff \tilde{g}\tilde{h} = \tilde{g}(h)\tilde{g} \Rightarrow$  Behauptung.

(2) „ $\Leftarrow$ “: Für  $g \parallel h$  bereits in (1) gezeigt, für  $g \perp h$  ist  $\tilde{g}(h) = h$ .

„ $\Rightarrow$ “: Nach Satz 10.1 sei  $X \in \mathbb{P}$  mit  $g' = (X, g)$ ,  $h' = (X, h)$  und  $\tilde{g}(h)' = (X, \tilde{g}(h))$ ,

also  $\tilde{g}'\tilde{h}' = \tilde{g}'\tilde{g}(h)'\iff \tilde{h}' = \tilde{g}(h)'\iff h' = \tilde{g}(h)'\iff h \parallel \tilde{g}(h)$ .

Ist  $h \cap \tilde{g}(h) = \emptyset$ , folgt  $h \cap g = \emptyset \Rightarrow g \parallel h$ .

Ist  $h = \tilde{g}(h) \iff h \in \text{Fix } \tilde{g} \iff h = g$  oder  $h \perp g$ .

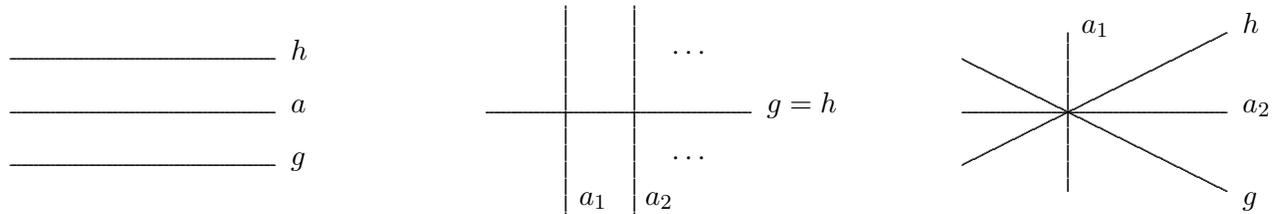
Für jede eigentliche Bewegung  $\varphi$  gilt auf Grund der Definition von konform  $(g, h) \triangle (\varphi(g), \varphi(h))$ . Daher sagt man auch, dass eigentliche Bewegungen *gleichsinnig winkeltreu* sind. Bei Geradenspiegelungen ändert sich die Reihenfolge der Schenkel, wir merken uns (ohne Beweis)

**Satz 10.5** Sei  $\psi$  eine uneigentliche Bewegung. Dann gilt für jeden Winkel  $(g, h) \triangle (\psi(h), \psi(g))$ , d.h., uneigentliche Bewegungen sind *gegensinnig winkeltreu*.

<sup>21</sup>Für Insider:  $\alpha(h) = g_{m,0} \Rightarrow m$  ist der Tangens des eingeschlossenen Winkels;  $\alpha(h) = g_0 \Rightarrow g \perp h$ .

**Def 10.4** Sei  $(g, h) \in \mathbb{G} \times \mathbb{G}$ . Eine Gerade  $a$  heißt *Symmetrieachse* oder *Winkelhalbierende* des Winkels  $(g, h)$ :  $\iff \tilde{a}(g) = h$ .

*Beispiele:*



Wie man an den Beispielen sieht, sind Winkelhalbierende nicht eindeutig festgelegt. (Wieviele Winkelhalbierende gibt es im mittleren Beispiel?) Der nächste Satz liefert eine Begründung für die Bezeichnung Winkelhalbierende.

**Satz 10.6** Seien  $g, h, k \in \mathbb{G}$  kopunktal. Dann gilt

$$k \text{ Winkelhalbierende von } (g, h) \iff (g, k) \triangle (k, h)$$

**Beweisskizze:** Für kopunktale Geraden  $g, k$  bzw.  $k, h$  gilt nach Satz 10.1  $(g, k) \triangle (k, h) \iff \tilde{g}\tilde{k} = \tilde{k}\tilde{h}$ .

Wir untersuchen diese Geradenspiegelungen etwas genauer: Einerseits ist  $\tilde{g}\tilde{k} = \tilde{k}\tilde{h} \iff \tilde{k}\tilde{g}\tilde{k} = \tilde{h}$ , andererseits gilt nach Satz 9.2  $\tilde{k}\tilde{g}\tilde{k} = \tilde{k}(g)$ .

Zusammen erhalten wir  $\tilde{k}(g) = \tilde{h} \iff \tilde{k}(g) = h \iff k \text{ ist Winkelhalbierende von } (g, h)$

Nur der Vollständigkeit halber halten wir fest, dass es nicht in jeder normalen euklidischen Ebene zu jedem Winkel Winkelhalbierende gibt. In der Anschauungsebene geht es zum Glück „vernünftig“ zu. Wenn  $A, B, C$  nicht gemeinsam auf einer Geraden liegen, also ein Dreieck bilden, gilt

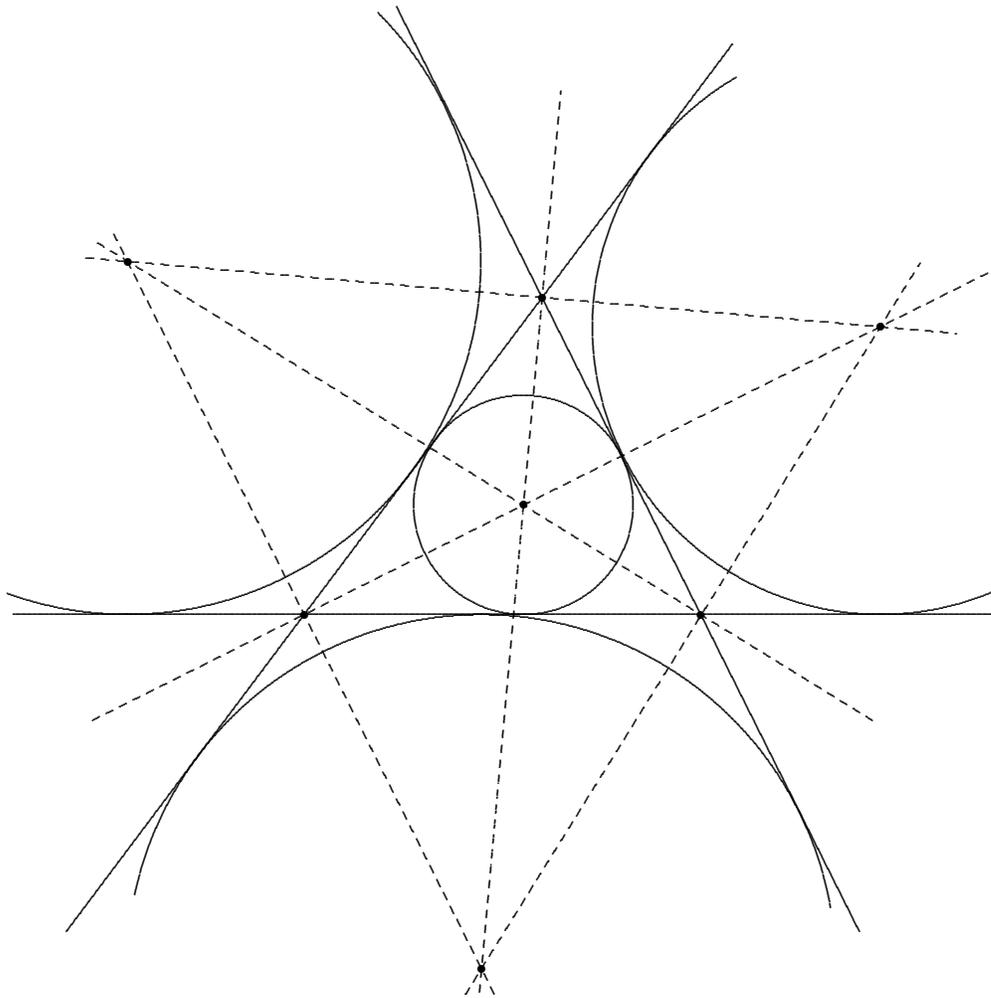
**Satz 10.7** (Berührkreise)

Sei  $ABC$  ein Dreieck in der Anschauungsebene.

- (1) Durch jeden Eckpunkt gehen zwei Winkelhalbierende des Dreiecks  $ABC$ .
- (2) Die beiden Winkelhalbierenden stehen in jedem Eckpunkt aufeinander senkrecht.
- (3) Es gibt genau vier Punkte, in denen sich je drei Winkelhalbierende schneiden.
- (4) Jeder der Punkte aus (3) ist Mittelpunkt eines *Berührkreises* an die Seiten des Dreiecks.

Einen Beweis zu diesem Satz findet man in E. Schröder: Geometrie euklidischer Ebenen (Mathematische Grundlegung der Schulgeometrie), Paderborn 1985. Wir begnügen uns mit einer Zeichnung auf der folgenden Seite. Diese Zeichnung wird in der Vorlesung beschriftet und ergänzt, wie übrigens auch die weiteren Zeichnungen in diesem Paragraphen.

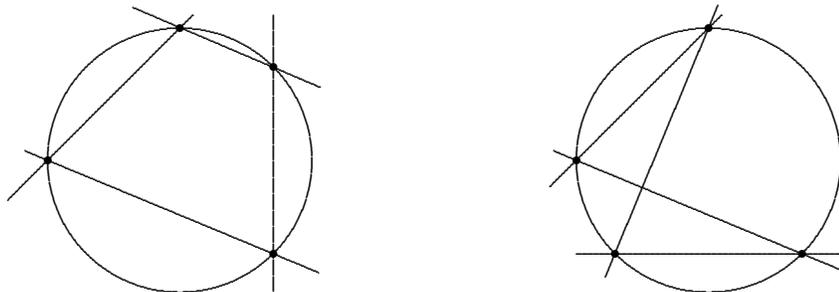
Zeichnung zum Satz über Berührungskreise und Winkelhalbierende:



Der nächste Satz beschäftigt sich mit Winkel an Kreisen in der Anschauungsebene.

**Satz 10.8** (Kreiswinkelsatz)

Sei  $ABC$  ein Dreieck mit Umkreis  $k$ , seien  $a, c \in \mathbb{G}$  mit  $a \cap k = \{A, X\}$  und  $c \cap k = \{C, Y\}$ . Dann gilt  $(a, c) \hat{=} (AB, BC) \iff X = Y$ .



**Beweis:** Sei  $M$  der Mittelpunkt von  $k$ , seien  $r, s, t, u$  die Lote von  $M$  auf  $a, c, AB, BC$ . Wir untersuchen

die Abbildung  $\alpha := \tilde{r}\tilde{t}\tilde{u}\tilde{s}$ , es ist  $\alpha(M) = M$  und  $\alpha(Y) = X$ .

*Beh:*  $X = Y \iff \alpha = id$

*Bew:* Es ist nur „ $\Rightarrow$ “ zu zeigen. Wegen der Fixpunkte  $M$  und  $X = Y$  ist  $\alpha$  nach Satz 9.3 eine Geradenspiegelung oder die Identität. Weil  $\alpha$  aus vier Geradenspiegelungen besteht, handelt es sich um eine eigentliche Bewegung, damit bleibt nur die Identität übrig.

$$\tilde{r}\tilde{t}\tilde{u}\tilde{s} = id \iff \tilde{r}\tilde{t} = \tilde{s}\tilde{u} \iff (r, t) \triangle (s, u) \iff (r, s) \triangle (t, u) \quad (\text{Schenkelaustauschsatz})$$

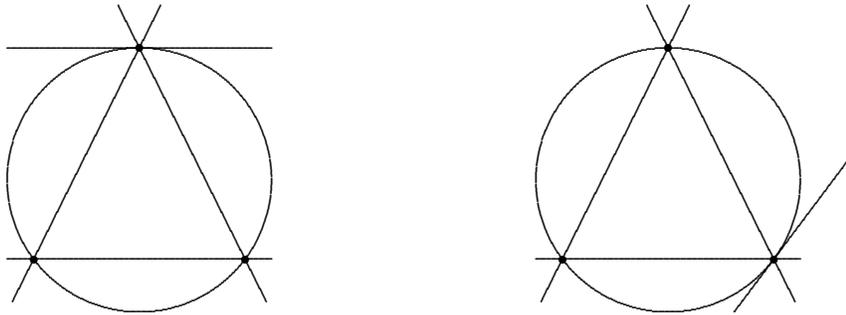
Nach Satz 10.4 sind alle rechten Winkel konform:  $(t, AB) \triangle (u, BC) \triangle (r, a) \triangle (s, c)$

Erneut der Schenkelaustauschsatz liefert  $(t, u) \triangle (AB, BC)$  und  $(r, s) \triangle (a, c)$ .

Damit gilt insgesamt  $X = Y \iff \alpha = id \iff (a, c) \triangle (AB, BC)$ .

Liest man den Kreiswinkelsatz genau, stellt man fest, dass  $A = X$  oder  $C = Y$  nicht ausgeschlossen sind. Diese Spezialfälle bilden den *Tangentenwinkelsatz*. Wir erinnern uns: Eine Gerade  $t$  heißt Tangente an einen Kreis  $k$ , falls  $|t \cap k| = 1$  gilt.

**Korollar 1** Seien  $A, B, C$  Punkte auf einem Kreis  $k$ , die Tangente in  $A$  sei  $t_A$ , die Tangente in  $C$  sei  $t_C$ . Dann gilt  $(t_A, AC) \triangle (AB, BC) \triangle (AC, t_C)$



**Beweis:** Im Fall  $A = X$  ist  $a = t_A$  und  $c = AC$ , im Fall  $C = Y$  ist  $c = t_C$  und  $a = AC$ .

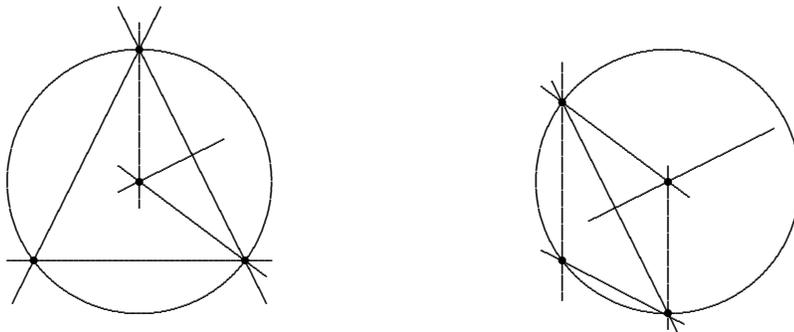
Anders formuliert wird der Kreiswinkelsatz zum *Peripheriewinkelsatz*: Vier Punkte liegen genau dann auf einem Kreis, wenn die entsprechenden Winkel konform sind, formal

**Korollar 2** Seien  $A, B, C \in k$ ,  $Z \in \mathbb{P} \setminus \{A, C\}$ . Dann gilt  $Z \in k \iff (AZ, ZC) \triangle (AB, BC)$ .

Jetzt betrachten wir zusätzlich Winkel am Kreismittelpunkt. Es gilt (ohne Beweis):

**Korollar 3** (Mittenwinkelsatz)

Seien  $A, B, C \in k_M(A)$ . Dann gilt  $(AB, BC) \triangle (AM, m_{A,C}) \triangle (m_{A,C}, MC)$ .



## 11 Eulergerade und Feuerbachkreis in der Anschauungsebene

Weil wir uns in diesem Paragraphen ausschließlich in der Anschauungsebene befinden, in der Punkte, Geraden und Kreise durch Koordinaten gegeben sind, können wir mit Koordinaten rechnen.

Wir wiederholen einige bereits bekannte Tatsachen über Abbildungen:

**Satz 11.1** Seien  $X = (x, y)$ ,  $A = (a, b) \in \mathbb{R}^2$  und  $\alpha \in \mathbb{R}^*$ .

- 1) Für jede Translation  $\tau$  existiert  $A \in \mathbb{R}^2$  mit  $\tau(X) = X + A$ .
- 2) Für jede Punktspiegelung  $\varphi_A$  an  $A$  gilt  $\varphi_A(X) = 2A - X$ .
- 3) Für jede Streckung  $\sigma_A$  mit Zentrum  $A$  und Streckungsfaktor  $\alpha$  gilt  $\sigma_A(X) = (1 - \alpha)A + \alpha X$ .

Dieser Satz wurde bereits früher in der Vorlesung behandelt (wenn auch nicht im Skript erwähnt). Hier nochmal einige Hinweise zu 2):

Bei der Punktspiegelung  $\varphi_A$  erhält man das Bild von  $X$ , indem man zu  $A$  den Vektor  $A - X$  addiert, d.h.,  $\varphi_A(X) = 2A - X$ .

Eine andere Beweismöglichkeit: Es ist  $\varphi_A = \tau^{-1} \varphi_O \tau$  mit  $\tau(X) = X - A$  und  $\varphi_O(X) = -X$ , also  $\varphi_A(X) = (\tau^{-1} \varphi_O \tau)(X) = (\tau^{-1} \varphi_O)(X - A) = \tau^{-1}(A - X) = 2A - X$ .

An speziellen Punkten in einem Dreieck  $ABC$  haben wir bisher den Höhenschnittpunkt  $H = h_A \cap h_B \cap h_C$  und den Schnittpunkt der Mittelsenkrechten  $M$  als Mittelpunkt des Umkreises kennengelernt. Jetzt wollen wir uns mit weiteren ausgezeichneten Punkten und ihrer Lage zueinander beschäftigen. Wir bezeichnen die Mitten der Seiten  $\{A, B\}$ ,  $\{A, C\}$  und  $\{B, C\}$  eines Dreiecks  $ABC$  mit  $M_c$ ,  $M_b$ ,  $M_a$ .

**Def. 11.1** Sei  $ABC$  ein Dreieck. Dann heißt  $S = \frac{1}{3}(A+B+C)$  *Schwerpunkt*, die Geraden  $AM_a$ ,  $BM_b$ ,  $CM_c$  heißen *Seitenhalbierende*.

Mit obiger Bezeichnung gilt

**Satz 11.2**  $S \in AM_a$

**Beweis:** Wir nutzen aus, dass für Geraden der Anschauungsebene gilt  $AB = A + \mathbb{R}(B - A)$ .

$$M_a = \frac{1}{2}(B + C) \Rightarrow S = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}(B + C) = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}M_a = A + \frac{2}{3}(M_a - A) \in AM_a.$$

**Korollar**  $S = AM_a \cap BM_b \cap CM_c$

**Satz 11.3** Sei  $ABC$  ein Dreieck mit Höhenschnittpunkt  $H$ , Mittelsenkrechtenschnittpunkt  $M$  und Schwerpunkt  $S$ . Dann gilt  $S \in HM$  für  $H \neq M$  oder  $S = H = M$ .

**Beweis:** Für die Streckung  $\sigma_S(X) := 3S - 2X$  gilt  $\sigma_S(M_a) = 3S - 2M_a = A + B + C - (B + C) = A$  und analog  $\sigma_S(M_b) = B$ ,  $\sigma_S(M_c) = C$ .

*Beh 1:* Für alle Geraden  $g, h$  gilt  $g \perp h \Rightarrow g \perp \sigma_S(h)$

*Bew:* Als Streckung ist  $\sigma_S$  eine Dilatation mit  $h \parallel \sigma_S(h)$ , die Behauptung folgt aus Satz 8.3.

*Beh 2:*  $\sigma_S(M) = H$

*Bew:*  $M \in (M_a \perp BC) \Rightarrow \sigma_S(M) \in (\sigma_S(M_a) \perp BC)$  (wegen Beh. 1)  $\Rightarrow \sigma_S(M) \in (A \perp BC) = h_A$ . Weil analog  $\sigma_S(M) \in h_B$  und  $h_A \cap h_B = H$ , ist  $\sigma_S(M) = H$ .

Im Fall  $H \neq M$  liegen  $M, S, H$  kollinear; im Fall  $H = M$  ist  $H$  Fixpunkt von  $\sigma_S$ , also  $H = M = S$ .

**Korollar** Ist  $M \neq H$ , so liegt  $S$  zwischen  $M$  und  $H$  und es ist  $S - H = -2(S - M)$ . ( $S$  teilt die Strecke  $\{H, M\}$  im Verhältnis 2:1).

**Beweis:**  $H = \sigma_S(M) = 3S - 2M \iff H - S = 2(S - M)$ .

**Def. 11.2** Für  $M \neq H$  heißt  $HM$  die *Eulergerade* des Dreiecks  $ABC$ .

Die Seitenmitten  $M_a, M_b, M_c$  eines Dreiecks  $ABC$  bilden natürlich wieder ein Dreieck, und wie jedes Dreieck besitzt auch dieses Dreieck einen Umkreis.

**Def. 11.3** Der Umkreis des Seitenmittendreiecks  $M_a M_b M_c$  heißt *Feuerbachkreis* des Dreiecks  $ABC$ .

Wir werden den Feuerbachkreis eines Dreiecks  $ABC$  mit  $f_k$  abkürzen. In den nächsten zwei Sätzen zeigen wir, warum der Feuerbachkreis auch Neun-Punkte-Kreis genannt wird.

**Satz 11.4** In jedem Dreieck liegen die Punkte  $A' := \frac{1}{2}(A + H)$ ,  $B' := \frac{1}{2}(B + H)$ ,  $C' := \frac{1}{2}(C + H)$  auf dem Feuerbachkreis.

**Beweis:** Wir zeigen nur  $A' \in f_k$ : Für  $A' = M_b$  ist nichts zu zeigen; für  $A' \neq M_b$  ist nach Satz 8.7 über die Mitten der Seiten eines Dreiecks, bezogen auf das Dreieck  $AHC$ ,  $A'M_b \parallel h_C$ .

Wegen  $h_C \perp AB$  und  $AB \parallel M_a M_b$  folgt  $A'M_b \perp M_a M_b$ , d.h.,  $M_b$  liegt auf dem Thaleskreis  $k(A', M_a)$ .

Völlig analog folgt auch  $M_c \in k(A', M_a)$ . Damit liegt  $A'$  gemeinsam mit  $M_a, M_b, M_c$  auf dem Kreis  $f_k$ .

**Satz 11.5** In jedem Dreieck liegen die Lotfußpunkte<sup>22</sup>  $H_a = BC \cap (A \perp BC)$ ,  $H_b = AC \cap (B \perp AC)$  und  $H_c = AB \cap (C \perp AB)$  auf dem Feuerbachkreis.

**Beweis:** Wir zeigen nur  $H_a \in f_k$ :  $H_a$  liegt auf dem Thaleskreis über  $AC$  mit Mittelpunkt  $M_b$ , d.h.,  $CH_a \perp H_a A$  oder  $H_a = C$ .

*Beh 1:*  $(BC, H_a M_b) \triangle (AC, BC)$

*Bew:* Im Fall  $CH_a \perp AH_a$  liefert die Spiegelung  $\psi$  an der Geraden  $m_{C, H_a}$  (eine uneigentliche Bewegung) wegen Satz 10.5  $(BC, H_a M_b) \triangle (\psi(H_a M_b), \psi(BC))$ .

Da  $M_b \in m_{C, H_a}$  (beachte  $H_a \in k_{M_b}(C)$ ) ist  $\psi(H_a) = C$  und  $\psi(M_b) = M_b$ . Weil ferner  $\psi(BC) = BC$  (beachte  $BC \perp m_{C, H_a}$ ) folgt  $(BC, H_a M_b) \triangle (CM_b, BC) = (AC, BC)$ .

Im Fall  $H_a = C$  handelt es sich um rechte Winkel, die nach Satz 10.4 stets konform sind.

*Beh 2:*  $(AC, BC) \triangle (M_a M_c, M_c M_b)$

*Bew:* Es handelt sich um gegenüberliegende Winkel in dem Parallelogramm  $(C, M_b, M_c, M_a)$ , die nach dem Korollar zu Satz 10.3 konform sind.

Insgesamt gilt  $(BC, H_a M_b) \triangle (M_a M_c, M_c M_b)$ , die Behauptung  $H_a \in f_k$  folgt jetzt aus dem Tangenten- bzw. Peripheriewinkelsatz (Korollare zu Satz 10.8).

<sup>22</sup>Zur Erinnerung: In Def 9.1 wurden Lotfußpunkte mit dieser Schreibweise eingeführt.

Der Feuerbachkreis enthält die neun Punkte  $M_a, M_b, M_c, A', B', C', H_a, H_b, H_c$ . Zum Schluss stellen wir den Zusammenhang zwischen Eulergerade und Feuerbachkreis her:

**Satz 11.6** Der Mittelpunkt  $F$  des Feuerbachkreises liegt auf der Eulergeraden und ist die Mitte von  $\{H, M\}$ .

**Beweis:** Die Dilatation  $\sigma_S$  aus Satz 11.3 bildet den Umkreis des Dreiecks  $M_a M_b M_c$  auf den Umkreis des Dreiecks  $ABC$  ab. Damit folgt

$$\sigma_S(F) = M = 3S - 2F = -2F + 3S = -2F + H + 2M \quad (\text{siehe Korollar zu Satz 11.3})$$

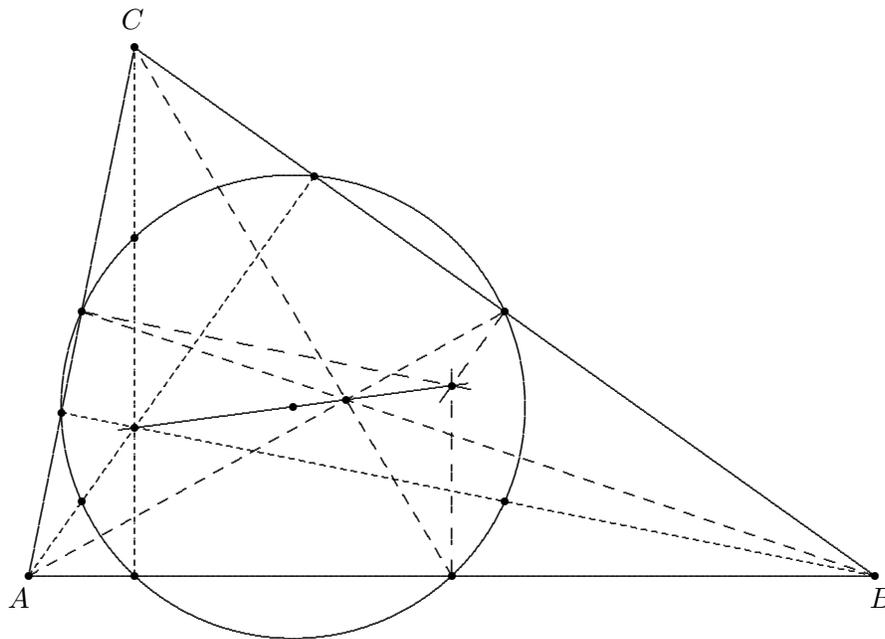
$$\Rightarrow F = \frac{1}{2}(H + M)$$

$F$  liegt zusammen mit  $H, S, M$  auf der Eulergeraden. In jedem Dreieck, in dem diese vier Punkte nicht zusammenfallen, gilt darüber hinaus

**Korollar**  $M - H = 3(M - S)$  und  $F - H = 3(S - F)$

**Beweis:**  $M - H = M - (3S - 2M) = 3(M - S)$

$$F - H = 4F - H - 3F = 2H + 2M - H - 3F = H + 2M - 3F = 3S - 3F = 3(S - F).$$



## Index

- abgeschlossene Kreisscheibe, 79
- affine Ebene, 58
  - Minimalmodell, 60
  - Sphärenmodell, 61
- Anschauungsebene, 56
- Automorphismus, 64
  
- Berührkreis, 98
- Bewegung, 80
  
- Dilatation, 73
- distanztreu, 80
- Drehung, 92
- Drehzentrum, 92
- Dreieck, 87
- Dreispiegelungssatz, 93
  
- eigentliche Bewegung, 94
- Einheitskugel, 61
- euklidisches Axiom, 79
- Eulergerade, 102
  
- Feuerbachkreis, 102
- Fixgerade, 74
  
- gegensinnig winkeltreu, 97
- Gerade, 56
- Geradenspiegelung, 88
- gleichsinnig winkeltreu, 97
- Gleitspiegelung, 94
  
- Höhe, 87
- Höhenschnittpunkt, 87
  
- innerer Punkt, 79
- Inzidenztafel, 57
- Isomorphie, 63
- Isomorphismus, 63
  
- Knickgerade, 62
- kollinear, 58
- Kollineation, 63
- kommutatives Diagramm, 90
- konform, 95
- kongruent, 78
- Kongruenzabbildungen, 94
- kopunktal, 58
- Kreis, 78
  
- Kreisschnittaxiom, 79
- Kreiswinkelsatz, 99
  
- Lot, 87
- Lotfußpunkt, 88
  
- Mitte einer Strecke, 84
- Mittelpunkt, 78
- Mittelsenkrechte, 78
- Mittenswinkelsatz, 100
- Moultonebene, 62
  
- normale euklidische Ebene, 79
- Nullwinkel, 95
  
- orthogonal, 86
  
- parallel, 58
- Parallelenaxiom, 58
- Parallelogramm, 79, 85
- Parallelogrammaxiom, 79
- Peripheriewinkelsatz, 100
- Punkt, 56
- Punktspiegelung, 81
  
- rechter Winkel, 96
  
- Satz von Desargues, 68
- Satz von Pappus, 67
- Scheitel, 95
- Schenkel, 95
- Schenkelaustauschsatz, 96
- Scherensatz, 69
- Schubspiegelung, 94
- Schwerpunkt, 101
- Seitenhalbierende, 101
- senkrecht, 86
- Sphäre, 61
- stereographische Projektion, 66
- Strecke, 78
- Streckung, 76
- Streckungsebene, 77
- Symmetrieachse, 98
  
- Tangente, 79
- Tangentenwinkelsatz, 100
- Tetraeder, 57
- Thaleskreis, 88

Translation, 75, 84

Translationsebene, 76

Umkreis, 87

uneigentliche Bewegung, 94

vollständige euklidische Ebene, 80

Vollständigkeitsaxiom, 80

Winkel, 95

Winkelhalbierende, 98

Würfel, 57

Zahlenstrahl, 56

Zentrum, 76