Modul Grundbildung Analysis   WiSe 10/11

Im Folgenden bedeutet

A.: Wurde in diesem Kapitel behandelt

B.: Interessante Aufgaben

C.: Weitere Fragen
(Nicht nur für die Klausur interessant)

V.1 Konvergenz, Grenzwert und Häufungspunkte

S. 114–117

A. Bereits bekannt: Folge

Extrem wichtig: Grenzwert bzw. Konvergenz:

$a_n \to a$ oder $\lim_{n\to\infty} a_n = a :\iff$

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \ |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

Begriffe: Fast alle, Endstück , Nullfolge

Definition Häufungspunkt

Satz: Jede Folge hat höchstens einen Grenzwert

Satz: Jede konvergente Folge besitzt genau einen Häufungspunkt

B. A 2 und A 4

C. Definition Grenzwert, konvergent, Häufungspunkt

Unterschiede und Gemeinsamkeiten von Grenzwert und Häufungspunkt

Beispiele für Folgen mit unterschiedlichen Eigenschaften

Mögliche Anzahl Häufungspunkte oder Grenzwerte

Beweisideen der obigen Sätze

V.2 Wie erkennt man konvergente Folgen? (1. Teil)

S. 118–121

A. Antwort:

Monoton und beschränkt $\Rightarrow$ konvergent (Satz 2.4)

Definition monoton

Monotonie und Häufungspunkte

Definition beschränkt

Konvergente Folgen müssen beschränkt sein

Beschränkte Folgen müssen mindestens einen Häufungspunkt haben

$$\begin{tikzcd} \text{beschränkt?} \arrow[r, "\text{ja}"] \arrow[dr, "\text{nein}"] & \text{monoton?} \arrow[r, "\text{ja}"] \arrow[dr, "\text{nein}"] & \underline{\textit{konvergent}} \\ & \underline{\textit{divergent}} & \textit{???} \end{tikzcd}$$

$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e$

B. A 7 , B 4, B 5

C. Zusammenhänge zwischen konvergent, monoton, beschränkt (mit Beweisidee)

„Folgentopf“

Mögliche Anzahl von Häufungspunkten bei monotonen oder bei beschränkten Folgen

Beweisideen der obigen Sätze

V.3 Wie erkennt man konvergente Folgen? (2. Teil)

S. 121–124

A. Weitere Hilfsmittel:

Einschließungssatz (Satz 3.2)

Nullfolge · beschränkte Folge = Nullfolge
(Satz 3.3)

Grenzwertsätze

Rechnen mit konvergenten Folgen

Rekursiv definierte Folgen

Geometrisches und algebraisches Mittel:

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

B. A 10, 13, 14, 20, 21, B 16

C. Bestimmung von Grenzwerten durch Anwendung der Grenzwertsätze

Verhalten der Folge $\frac{1}{n} \cdot \sin(n)$

V.4 Teilfolgen und der Satz von Bolzano–Weierstraß

S. 124–127

A. Teilfolge (Def 4.1):
∞ viele Folgenglieder in unveränderter Reihenfolge

Weitere Aussagen über Folgen:

Zu jedem Häufungspunkt gibt es eine konvergente Teilfolge

Folge konvergent $\iff$ jede Teilfolge konvergent

Hoch– und Tiefpunkt

Jede Folge besitzt eine monotone Teilfolge

Satz von Bolzano–Weierstraß
Jede beschränkte reelle Folge besitzt mindestens einen Häufungspunkt

B. —

C. Beweis(e) zu Bolzano–Weierstraß

Beweis des Satzes über die Existenz monotoner Teilfolgen

V.5 Das Cauchysche Konvergenzprinzip S. 127–129

A. Weitere Möglichkeit, Folgen auf Konvergenz zu untersuchen

Cauchyfolge

$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N}: \;\; |a_n - a_m| < \varepsilon \;\; \forall n, m \geq n_0$

In $\mathbb{R}$ gilt:

Konvergente Folge $\iff$ Cauchyfolge

Cauchykriterium liefert nicht den konkreten Grenzwert

B. —

C. Zusammenhang beschränkt, konvergent, Nullfolge, Cauchy

V.6 Drei Beispiele S. 129–132

A. Mathematische und außermathematische Anwendungen:

Zinseszinsrechnung

Investitionen in der Volkswirtschaft

Insektenpopulation

B. und **C.** entfallen

V.7 Reihen S. 132–137

A. Reihen sind spezielle Folgen
(Folge der Partialsummen)

Zu jeder Reihe $\sum a_n$ gehört Folge a_n

$\sum a_n$ konvergent $\Rightarrow$ a_n Nullfolge

Aber: Umkehrung ist falsch!

Wichtig für Anwendung:

a_n keine Nullfolge $\Rightarrow$ Reihe $\sum a_n$ nicht konvergent

Harmonische Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist divergent

Alternierende harmonische Reihe ist konvergent

Geometrische Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$, $\quad \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

Absolut konvergent

B. A 23 und A 27

C. Kenntnis der (alternierenden) harmonischen und der geometrischen Reihe

Beweisidee zur Divergenz der harmonischen Reihe

Grenzwerte von geometrischen Reihen

V.8 Einige Konvergenzkriterien für Reihen

S. 137–141

A. Einfache Rechnungen mit konvergenten Reihen

Mit $\sum a_n$, $\sum b_n$ auch $\sum aa_n$, $\sum(a_n + b_n)$ konvergent

Vier wichtige Kriterien:

Majoranten–, Minorantenkriterium

Quotientenkriterium
– hilft nicht immer
– auch als Limesversion

Wurzelkriterium

Potenzreihen und Exponentialreihe

Für Spezialisten: Riemannscher Umordnungssatz

B. B 22

C. Wie lautet das Quotientenkriterium?

Beispiele für Reihen, bei denen das Quotientenkriterium (nicht) weiterhilft

V.9 Grenzwerte von Funktionen S. 141–144

A. Vorbereitung auf Stetigkeitsbegriff

Intervall (offen, abgeschlossen)

Dirichlet–Funktion

Grenzwert einer reellen Funktion
– Funktion muss im Grenzwert nicht definiert sein
– Grenzwert darf kein isolierter Punkt sein

B. —

C. Graph der Dirichlet–Funktion zeichnen

Graph von anderen Funktionen zeichnen

V.10 **Stetigkeit: Definition und Beispiele** S. 144–148

A. $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt stetig in $x_0 \in D :\Longleftrightarrow$

Für jede Folge (x_n) aus D mit Grenzwert x_0 gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$

Kurzform: $x_n \to x_0 \quad \Rightarrow \quad f(x_n) \to f(x_0)$

Beispiele für (un)stetige Funktionen

Rechnen mit stetigen Funktionen: $f + g, \ldots$

Polynome und rationale Funktionen sind stetig

$\varepsilon - \delta$ Kriterium der Stetigkeit

B. A 33 und A 34

C. Unterschied Grenzwert in x_0 – stetig in x_0

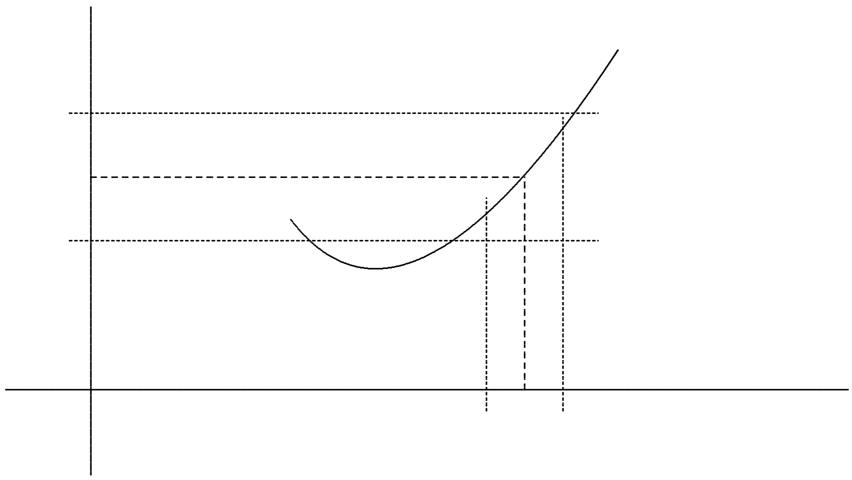
(Un)stetigkeit an einer Skizze mit eigenen Worten erklären können

Problematik des Stetigkeitsnachweises

Überprüfung gegebener Funktionen auf Stetigkeit

Anzahl Unstetigkeitsstellen?

Ergänze



V.11 Einfache Eigenschaften stetiger Funktionen

S. 148–152

A. Verhalten einer stetigen Funktion in (kleinen) Umgebungen von x_0

Nullstellensatz (Satz 11.2)

Fixpunktsatz (Satz 11.3)

Zwischenwertsatz (Satz 11.4)

Prinzip vom Maximum und Minimum (Satz 11.5)

Für Spezialisten:

Umkehrsatz für streng monotone Funktionen

B. A 36 und B 29

C. Nenne und erkläre bekannte Sätze über Stetigkeit

Beweisskizze zum Nullstellensatz

Beweisskizze zum Fixpunktsatz

Bedeutung der Voraussetzungen bei diesen Sätzen (Gegenbeispiele)

V.12 Über Abbildungen $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ S. 152–155

A. Nicht Prüfungsrelevant!

$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ für $m = 2, 3$:

Parameterdarstellung von Kurven

$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: „Funktionsgebirge“

$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$: Parameterflächen

B. —

C. Kreis als Graph von $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

V.13 Die Ableitung einer Abbildung S. 155–159

A. Vom Differenzenquotienten zum Steigungsmaß oder von der Sekante zur Tangente:

Definition differenzierbar in x_0 (Def 13.1)

Ableitung

Differenzierbarkeitsnachweis ausschließlich mit Hilfe der Definition

Zusammenhang stetig und differenzierbar

(Satz 13.1)

Höhere Ableitungen

B. A 41, 42 und B 32

C. Differenzierbarkeit mit eigenen Worten erklären können

Zusammenhang stetig und differenzierbar,

(Gegen)beispiele

Überprüfe Differenzierbarkeit einfacher Funktionen nur mit Hilfe der Definition

V.14 Einige Ableitungsregeln S. 159–164

A. Summenregel $(f+g)' = f' + g'$

Produktregel $(f \cdot g)' = f'g + fg'$

Quotientenregel $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

Ableitung von Polynomen und rationalen Funktionen

Kettenregel $(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'$

Für Spezialisten: Umkehrregel

Ableitung von e^x, $\ln x$, $\sin x$, $\cos x$

Regel von de l'Hospital

B. A 47, B 34, B 36

C. Regeln kennen und anwenden können

Differenziere x^2, 2^x, 2^2, x^x

Regel von de l'Hospital anwenden können

V.15 Weitere Eigenschaften differenzierbarer Funktionen S. 164–169

A. Hilfsmittel für Kurvendiskussionen

Ableitung und strenge Monotonie

Wie erkennt man an Ableitungen die Existenz von (lokalen) Extrema und Wendestellen?

Bedeutung von konkav und konvex

Mittelwertsatz der Differenzialrechnung

(Satz 15.7)

Satz von Rolle

Newton–Verfahren zur näherungsweisen Berechnung von Nullstellen

B. —

C. Mittelwertsatz skizzieren können

Wahr oder falsch?

f streng monoton $\Rightarrow$ $f'(x) \neq 0 \quad \forall x$

(Teile von) Kurvendiskussionen