Modul Grundbildung Lineare Algebra und analytische Geometrie **SoSe 10**

Im Folgenden bedeutet

A.: Wurde in diesem Kapitel behandelt

B.: Interessante Aufgaben

C.: Weitere Fragen
(Nicht nur für die Klausur interessant)

III.1 Grundlegendes über Gruppen S. 54–60

A. Gruppoid, Halbgruppe, Gruppe

Eine Gruppe besteht aus einer *nichtleeren Menge*, auf der eine *binäre Verknüpfung* definiert ist. Es gibt ein *neutrales Element*, jedes Element besitzt ein *inverses Element*. Die binäre Verknüpfung ist *assoziativ*. Falls zusätzlich das Kommutativgesetz gilt, hat man eine *abelsche Gruppe*.

Beispiele $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{K},+)$, $(\mathbb{K}^*,\cdot)$ mit $\mathbb{K}=\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$

Keine Gruppen sind $(\mathbb{N}_{(0)},+)$, $(\mathbb{Z},-)$, $(\mathbb{Z}^*,\cdot)$, $(\mathbb{Q},\cdot)$

Einfache Sätze:

Es gibt genau ein neutrales Element

$(a^{-1})^{-1}=a, \quad (ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}$

Kürzungsregel, eindeutige Lösbarkeit,

Verknüpfungstafel

B. **A** 2, 7, **B** 4, 6

C. Beweis der einfachen Sätze

Ergänzung von Verknüpfungstafeln

III.2 Weitere Beispiele für Gruppen S. 61–63

A. Ordnung einer Gruppe

Erzeugendensystem

Zyklische Gruppe

Satz 2.2: Zyklisch $\Rightarrow$ abelsch

Zykelschreibweise

Spezielle Gruppen:

Dreh–, Spiegelungsgruppe vom Quadrat

Diedergruppe D_n,

Symmetrische Gruppe S_n

Später: Kleinsche Vierergruppe V_4

B. **A** 10, 13, **B** 7

C. Bedeutung von D_n, S_n, V_4

Anzahl der Elemente von D_n, S_n

Beweis von Satz 2.2

Suche Erzeugendensysteme

III.3 Untergruppen

Seite 64–65

A. Teilmengen einer Gruppe, die selbst Gruppen sind (also gleiche Verknüpfung)

Überprüfung, ob Teilmengen Untergruppen sind

Satz 3.1: $U \neq \emptyset,\ ab^{-1} \in U\ \forall a, b \in U$

Zusammenhang Ordnung einer Gruppe, Untergruppe

Untergruppenverband

B. **A** 13

C. Konkrete Beispiele

III.4 Isomorphie Seite 65–68

A. Wie verschieden sind Gruppen gleicher Ordnung?
Was heißt verschieden?

Isomorphie von Gruppen (Def. 4.1)

Isomorphismus ist eine strukturerhaltende Bijektion

Wie erkennt man isomorphe Gruppen?

Neutrales Element wird auf neutrales Element abgebildet

Selbstinverse Elemente werden auf selbstinverse Elemente abgebildet

Notwendig für Isomorphie: gleiche Anzahl

Weitere Morphismen: Automorphismus

Für jede Gruppe $(G, *)$ ist $(\mathrm{Aut}\, G, \circ)$ eine Gruppe

B. **A** 14, 15, 17, **B** 12

C. Beweise: Bei jedem Isomorphismus wird das neutrale Element auf das neutrale Element abgebildet.

Sind zwei Gruppen isomorph?

Nachweis der Bijektivität und/oder Strukturerhaltung bei Abbildungen zwischen Gruppen

IV.1 Vektorräume und Untervektorräume Seite 69–73

A. Def. 1.1: Reeller Vektorraum:

$(V, +)$ abelsche Gruppe

Skalarmultiplikation $\mathbb{R} \times V \to V$

Beispiele $\mathbb{R}^n$, Abb $([0,1], \circ)$

Satz 1.1: $0 \cdot x = o, \quad r \cdot o = o \qquad \forall\, x \in V, r \in \mathbb{R}$

Teilmengen und Untervektorräume

Satz 1.2: Kriterium für Untervektorräume

$U \neq \emptyset, \quad x + y \in U, \quad \alpha \cdot u \in U$

Alle UVR von $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$

B. **A** 18, **B** 15

C. Beweis von Satz 1.1

Überprüfen, ob Teilmenge UVR

IV.2 Lineare Unabhängigkeit Seite 73–76

A. Lineare Hülle (ist UVR)

Def 2.2: Linear (un)abhängig

$(v_1, \ldots, v_r)$ ist linear __________________ $:\Longleftrightarrow$

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i = o \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \ldots = \alpha_r = 0$$

Def 2.3: Basis

$(v_1, \ldots, v_r)$ lin. unabh., $\quad L(v_1, \ldots, v_r) = V$

Kanonische Basis $(e_1, \ldots, e_n)$

B. **A** 22, 23, 24, 29, **B** 17

C. Überprüfe, ob Basis bzw. ob linear (un)abhängig

IV.3 Dimension

Seite 76–79

A. Alle Basen von V sind gleichmächtig: Dimension

BErg: Jede Menge linear unabh. Vektoren kann zu einer Basis ergänzt werden

ATL: Elemente zwischen Basen können ausgetauscht werden

Summe von UVR, $U_1 + U_2$ ist UVR

Dimensionsformel für UVR

$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)$

B. **A** 29, **B** 20

C. Bestimme Dimension von UVR

IV.4 Lineare Abbildungen Seite 79–82

A. Def 4.1: $f : V \to W$ linear $:\Longleftrightarrow$

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad \forall\, x, y \in V$$
$$f(a \cdot x) = a \cdot f(x) \qquad \forall\, a \in \mathbb{R},\ x \in V$$

Kern $f \leq V$, Bild $f \leq W$

Zusammenhang f injektiv und Kern f

Dimensionsformel für lineare Abbildungen

$\dim V = \dim \text{Kern } f + \dim \text{Bild } f$

Jede lineare Abbildung ist eindeutig festgelegt durch die Bilder der Basisvektoren

B. **A** 30, 31, 33, **B** 23

C. Überprüfe ob $f : V \to W$ linear

Bestimme Anzahl linearer Abbildungen mit Nebenbedingungen

IV.5 Beispiele von linearen Abbildungen in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$
Seite 82–84

A. Drehungen, Spiegelungen, Streckungen

B. **A** 37, **B** 24

C. Zeichnung von Bildmengen

IV.6 Lineare Abbildungen und Matrizen Seite 84–89

A. Matrix $A \in M(l \times k)$

Zusammenhang lineare Abbildung – Matrix
i–te Spalte von A ist $f(e_i)$

$A \cdot x,\ A \circ B$ falls $A \in M(l \times r), B \in M(r \times k)$
Merkhilfe „Zeile mal Spalte"

Eigenschaften der Matrizenmultiplikation

Nullteiler

Additionsregeln für Sinus und Cosinus

B. **A** 34, 35, 36, **B** 27

C. Bestimme Matrix zu gegebener Abbildung
Welche Abbildung gehört zu gegebener Matrix

IV.7 Reguläre Matrizen

Seite 90–92

A. Regulär = invertierbar

Zugehörige lineare Abbildung ist bijektiv

Einheitsmatrix E_n

Inverse Matrix A^{-1}

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} =$$

$Ax = b$ mit A regulär $\Rightarrow x = A^{-1}b$

B. **A** 39, 41, 45

C. Lösen von LGS mit Voraussetzungen wie oben

IV.8 Rang einer Matrix

Seite 92–94

A. Zeilenrang und Spaltenrang

Satz: $ZR(A) = SR(A) = rgA$

EZU und ESU ändern den Rang einer Matrix nicht

Umformung einer Matrix auf Zeilenstufenform

$(A|E) \rightarrow (E|A^{-1})$

B. **A** 39, 41, 44, 45, **B** 32

C. —

IV.9 Determinanten

Seite 94–98

A. $|A|$ nur definiert für $A \in M(k \times k)$

$k = 2$: „Hauptdiagonale $-$ Nebendiagonale“

$k = 3$: Jägerzaunregel (Sarrus)

$k \in \mathbb{N}$: Entwicklungssatz

Merkhilfe Streichungsmatrix $A_{i,j}$

Determinantenmultiplikationssatz

B. **A** 39, 42, 43

C. Möglichst effektive Berechnung von Determinanten

Warum gilt die Jägerzaunregel nur für $k = 3$?

IV.10 Lineare Gleichungssysteme Seite 98–101

A. Homogene und inhomogene LGS $Ax = b$

Lösungsmenge $\text{Lös}\,(A, b) = x_0 + \text{ Kern } A$

Erweiterte Matrix (A, b)

Für $A \in M(l \times k)$ gilt:

$Ax = b$ lösbar $\iff$ rg $A =$ rg (A, b)

$Ax = b$ eindeutig lösbar $\iff$ rg $A =$ rg $(A, b) = k$

Falls $l = k$: Eindeutig lösbar $\iff$ $|A| \neq 0$

B. **A** 39, 45, **B** 28, 33

C. —

IV.11 Über das Lösen von LGS   Seite 101–105

A. Spezialfall $A \in M(k \times k)$ und A regulär:

Cramersche Regel $\quad x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$

Immer anwendbar: Gauß–Algorithmus:

– Überführe (A, b) auf Zeilenstufenform

– Bestimme x_i (von unten nach oben)

– Falls keine Stufe: x_i freier Parameter

– Falls Stufe: Löse Zeile nach x_i auf

B. **A** 46, 47, **B** 33

C. Löse $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

IV.12 Spezielle Eigenschaften des $\mathbb{R}^2$ Seite 105–110

A. Unterschiedliche Geradendarstellungen

Parameterform $g_{A,B} = \{A + \lambda(B - A) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

Koordinatenform $g_k = \{(k, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$

$$g_{m,b} = \{(x, mx + b) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

Parallelität von Geraden

Skalarprodukt $< X, Y >$

Orthogonalität (Vektoren, Abbildungen)

Matrizen von orthogonalen Abbildungen

Fläche eines Parallelogramms und Determinanten

B. —

C. —

IV.13 Spezielle Eigenschaften des $\mathbb{R}^3$ Seite 110–112

A. Parameterdarstellung von Geraden und Ebenen

Schnitt von Ebenen

Skalarprodukt $< X, Y >$, orthogonal

Volumen eines Parallelotops und Determinanten

Kreuzprodukt (Vektorprodukt)

B. —

C. —