Modul Grundlagen der Mathematik

Im Folgenden bedeutet

A.: Wurde in diesem Kapitel behandelt

B.: Interessante Aufgaben

C.: Weitere Fragen

I.1 Grundbegriffe der naiven Mengenlehre
Skript Seite 4–7

A. Was ist eine Menge?

Wichtige Mengenoperationen: $\cup$, $\cap$, $\overline{}$

Kartesisches Produkt $A \times B$, Potenzmenge

B. **A** 6, 10, 13

C. $\operatorname{Pot}\{\emptyset, \{\emptyset\}\} =$ ____________________

Unterschied zwischen (a, b) und $\{a, b\}$.

I.2 Grundbegriffe der Aussagenlogik S. 8–10

A. Aussagen sind immer wahr oder falsch

Logische Verknüpfungen: $\wedge, \vee, \overline{}, \Rightarrow, \iff$

Wahrheitstafel

B. —

C. —

I.3 Relationen

Seite 10–13

A. Was sind Relationen (Def 3.1)

Eigenschaften (r), (s), (t), (as) (Def 3.2)

Ordnung–, Äquivalenzrelation (Def 3.3)

Besonderheit der = - Relation

Charakterisierung von ÄR durch Partitionen

B. **A** 14

C. Eigenschaften der Relation
$a \sim b :\iff a = -b$ auf $\mathbb{Z}$

Eigenschaften der Relation
$a \sim b :\iff a + b$ gerade auf $\mathbb{N}$

Ist $\{(a,a),(a,b),(b,a),(c,c)\}$ transitiv?

Nenne Beispiele für ÄR, OR

I.4 Abbildungen — Seite 14–18

A. Es geht um $f : A \to B$, Bildmenge, Urbildmenge

wichtig: injektiv, surjektiv, bijektiv (Def 4.2)

Spezialfall reelle Funktion $A = B = \mathbb{R}$

Erklärung injektiv/surjektiv/bijektiv am Graph

Bei endlichen Mengen: Anzahl der Abbildungen

Verkettung $f \circ g$ (Eigenschaften)

Umkehrabbildung

später wichtig: gleichmächtig

B. **A** 18, 19, 20, 24

C. Für $|A| = 3$ und $|B| = 2$ ist gesucht

Anzahl aller inj. Abbildungen $A \to B$: ____

Anzahl aller surj. Abbildungen $A \to B$: ____

Anzahl aller Abbildungen $B \to A$: ____

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} x & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ x - 1 & \text{für } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

Ist f injektiv oder surjektiv? Gibt es eine Umkehrabbildung?

Zeichne den Graph einer injektiven, nicht surjektiven reellen Funktion.

I.5 Das Prinzip der vollständigen Induktion Seite 18–21

A. Wichtiges Beweisverfahren für Aussagen über $\mathbb{N}$

Grundlage PEANO– Axiome

Typische Anwendungen: Summenformeln (Gauß, geometrisch)

Umgang mit Summenzeichen

B. **B** 18, 19

C. $\sum\limits_{l=3}^{5} 3 = \_\_\_\_$

II.1 Die Körper $\mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}$ Seite 22–27

A. Definition Körper

Beispiele $\mathbb{R}, \mathbb{Q}$, später $\mathbb{C}$

Gegenbeispiele $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$

Anordnung, Vollständigkeit

Rechnen mit Ungleichungen

$\mathbb{R}$ ist einziger angeordneter vollständiger Körper

B. **B** 22

C. Wahr oder falsch? $\sqrt{a^2} = a$

II.2 Einige ordnungstheoretische Begriffe
Seite 27–28

A. Obere und untere Schranken von Zahlenmengen

Maximum, Minimum, Supremum, Infimum

Supremumsprinzip für reelle Zahlen

B. **A** 31, 32

C. Wahr oder falsch? $\inf \left\{ \frac{2}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} > 0$

Gesucht (falls vorhanden) sup, max, inf, min von $\{4 + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$

II.3 Folgen und (Über)abzählbarkeit
Seite 28–32

A. Formale Einführung von Folgen als Hilfsmittel für (über)abzählbar

Abzählbarkeit von $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$

Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$

B. —

C. Erkläre die Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$ oder die Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$.

II.4 Über $\mathbb{Z}$: Teilbarkeit, Primzahlen und Euklidischer Algorithmus

Seite 32–36

A. Definition teilbar (Schulwissen ?) $a|b$

Primzahlen: Definition und Anzahl

Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung

ggT und kgV, Euklidischer Algorithmus

B. **A** 37, **B** 30

C. Wahr oder falsch? $\text{ggT}\,(2^7, 3^7) = 7$

II.5 Teilbarkeitskriterien und g–adische Darstellung Seite 36–42

A. Teilbarkeitsregeln:

Endzifferregel für $n = 2, 4, 8, 5$

Quersummenregel für $n = 3, 9, 11, 7$

g–adisches (Um)rechnen

B. **A** 39, 40, 42

C. $(205)_6 \ = \ (\underline{\hspace{2cm}})_7$

II.6 Elementare Kombinatorik Seite 42–47

Nur behandelt:

A. Binomialkoeffizient

Binomischer Lehrsatz, Pascalsches Dreieck

B. —

C. —

II.7 Einiges über die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ Seite 47–53

A. Einführung der komplexen Zahlen $a + ib$

Real– und Imaginärteil, Betrag,
konjugiert komplex

Abstand zweier komplexer Zahlen (auch zeichnerisch)

Rechenregeln (Rechnen können)

$\mathbb{C}$ nicht angeordnet

Polarkoordinaten $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

Bedeutung der Polarkoordinaten bei der Multiplikation

B. **A** 45, 47, **B** 36 a)

C. —