Übungen Modul Grundlagen der Analysis

WiSe 10/11 J. Mylosz und H.-J. Samaga **Extrablatt 2**

Einige alte Klausuraufgaben zu stetig und differenzierbar

1. Wahr oder falsch?

		Wahr	Falsch
a)	Die Umkehrfunktion von $\frac{1}{2x}$ ist $2x$.	☐	☐
b)	Wenn $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in x stetig ist, existiert nicht immer ein $\delta > 0$, so dass f auch in $x + \delta$ stetig ist.	☐	☐
c)	Wenn $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in x_0 stetig ist, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $\lvert x - x_0\rvert < \varepsilon$ folgt $\lvert f(x) - f(x_0)\rvert < \delta$.	☐	☐
d)	$f(x) := \begin{cases} x^3 - x & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ ist an genau drei Stellen stetig.	☐	☐
e)	Jede in x differenzierbare Funktion ist dort auch stetig.	☐	☐
f)	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2+1}{x+1}$ kann mit Hilfe der Regel von de l'Hospital bestimmt werden.	☐	☐
h)	Es gibt stetige Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ohne Fixpunkt und ohne Nullstelle.	☐	☐
i)	Die Stetigkeit von $f : x \mapsto x^2$ in $x_0 = 1$ kann mit der Folge $x_n : 1 - \frac{1}{n}$ bewiesen werden.	☐	☐

2. Sei $f : x \mapsto x^2 + 2$ und $g : x \mapsto 3x - 2$. Gesucht sind

$(f \circ g) : x \mapsto$ ________________ und $(g \circ f) : x \mapsto$ ________________

3. Erklären Sie mit Hilfe je einer Skizze den Nullstellensatz und den Fixpunktsatz.

4. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := x^3 - 5x + 1$.

a) Gesucht ist das kleinste $n \in \mathbb{N}$, für das f auf dem Intervall $[1, n]$ alle Voraussetzungen des Nullstellensatzes erfüllt (mit Begründung).

b) Gesucht sind alle Wendepunkte von f (mit Herleitung).

5. Welche der folgenden Funktionen sind differenzierbar? Geben Sie – wenn möglich – jeweils die erste Ableitung an:

a) $y = \sqrt{x\sqrt{x}}$ b) $y = e^{\sin x}$ c) $y = 2 + \lvert x - 5\rvert$ d) $y = 3^{2x}$

6. Gesucht sind die Grenzwerte (mit allen Zwischenschritten) von

a) $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{\sin(7x)}{x^2-\pi^2}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-e^{-x}-2x}{x^3}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} 5x \cdot \ln x$

Besprechung dieser Aufgaben in den Übungen.