

Übungen Modul Grundlagen der Analysis

WiSe 10/11

J. Mylosz und H.-J. Samaga

Blatt 9

A: Präsenzaufgaben und Verständnisfragen

33. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := \begin{cases} 2x + 1 & \text{für } x < 1 \\ 1 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$.

- Skizziere f und untersuche f an den Stellen $x_0 = -1$ und $x_1 = 1$ auf Stetigkeit.
- Erkläre an Hand der Zeichnung die Bedeutung von Satz 10.3 für die Stelle $x_1 = 1$.

34. Seien f und g gegeben durch $f(x) := x + 1$ und $g(x) := \begin{cases} x + 1 & \text{für } x \leq 0 \\ x - 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$.

Was weiß man über die Stetigkeit der Funktionen $f \circ f$, $f + g$, $f \circ g$ und $g \circ f$?

35. Wahr oder falsch?

- Für die Funktion f aus **A 34** gilt $f + f = f \circ f$.
- Wenn für eine Funktion $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existiert, so ist f an der Stelle x_0 stetig.
- Wenn eine Funktion f an einer Stelle x_0 stetig ist, so existiert $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.
- f konstant $\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

B: Übungsaufgaben

25. a) Beweisen Sie für stetige Funktionen f und g , dass auch die Funktion $f - g$ stetig ist.
b) Beweisen Sie: Ist f an einer Stelle x_0 unstetig und g an dieser Stelle stetig, so ist $f + g$ an dieser Stelle ???
26. Sei $f :] - 2, 2[\rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := 1 + |x|$ für $x \notin \mathbb{Q}$ und $f(x) := 1 - x$ für $x \in \mathbb{Q}$.
- Wo ist diese Funktion (un)stetig? (Mit Beweis)
 - Wie lautet die Funktionsvorschrift von $f \circ f$?
27. a) Skizzieren Sie für g aus Aufgabe **A 34** den Graph der Funktion $g \circ g$. An welchen Stellen ist $g \circ g$ unstetig? (Mit Beweis)
b) Zeigen Sie am Beispiel der Dirichletfunktion f_1 und der Funktion f_2 , definiert durch $f_2(x) := x \cdot f_1(x)$, dass die Verkettung zweier Funktionen je nach Reihenfolge stetig oder unstetig sein kann. (Die Stetigkeit bzw. Unstetigkeit der verketteten Funktion muss nicht nachgewiesen werden.)

Abgabe der Übungsaufgaben am 3.1.11 nach der Vorlesung bzw. in den Übungen.

C: Eine Knobelaufgabe für lange Weihnachtsabende, ohne Punktwertung: Zerlege ein Quadrat in möglichst wenige spitzwinklige Dreiecke (jeder Winkel muss kleiner als 90 Grad sein.)

Wir wünschen allen Studierenden ein besinnliches Weihnachtsfest und ein erfolgreiches Jahr 2011!