

Übungen Modul Grundlagen der Analysis

WiSe 10/11

J. Mylosz und H.-J. Samaga

Blatt 8

A: Präsenzaufgaben und Verständnisfragen

29. Wo steckt der Fehler bei dem folgenden „Beweis“ von $1 = 0$?

Wir klammern die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} = 1 - 1 + 1 - 1 \pm \dots$ auf zwei verschiedene Arten:
$$1 = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - \dots = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0$$

30. Es geht um die Funktion $f : \mathbb{R}[-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) := |x|$ für $x \in \mathbb{Q}$ und $f(x) := 1$ andernfalls.

- Skizziere den Graphen dieser Funktion.
- Existieren $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ oder $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$?
- An welchen Stellen ist die Funktion stetig?

31. Es geht um die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) := |\operatorname{sgn}(x)|$.

- Existiert $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$?
- Ist f an der Stelle $x_0 = 0$ stetig?

32. Wahr oder falsch?

- $\mathbb{R} = [-\infty, \infty]$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x$ existiert.
- Die Funktion $f(x) := \sin(\frac{1}{x})$ hat für $x > \frac{2}{\pi}$ keine Nullstelle.

B: Übungsaufgaben

22. Eine alte Examensklausuraufgabe, nur leicht abgeändert:

Welche der Folgen oder Reihen sind konvergent? Geben Sie im Fall der Konvergenz den Grenzwert an. (Alle Schritte sind zu begründen, aus der Vorlesung bekannte Sätze dürfen benutzt werden)

- | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---|--|
| a) $\frac{7n-3}{7+3n}$ | b) $\frac{3}{n} \sin(n^2)$ | c) $(4 + \frac{1}{n})^3$ | d) $(3 - \frac{1}{n})^n$ |
| e) $\sqrt{n+2} - \sqrt{n}$ | f) $\sqrt{n} - \sqrt{2n}$ | g) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{3k-1}$ | h) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{5^k}$ |

23. Es geht um die Funktion $f(x) := \sin(\frac{1}{x})$.

- Zeichnen Sie den Graphen von f für $\frac{2}{11\pi} \leq x \leq \frac{2}{\pi}$.
- Zeigen Sie mit Hilfe einer geschickt gewählten Folge, dass $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ nicht existiert.

24. Es geht um die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) := \max\{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq |x|\}$.

- Zeichnen Sie den Graphen von f für $-3 \leq x \leq 3$.
- Gesucht sind unendlich viele Stellen $x_0 \in \mathbb{R}$, an denen $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ nicht existiert.
- Gesucht sind alle ganzzahligen Stellen, an denen f stetig ist.

Abgabe der Übungsaufgaben am 15.12.10 nach der Vorlesung bzw. in den Übungen.