

Übungen Modul Grundlagen der Analysis

WiSe 10/11

J. Mylosz und H.-J. Samaga

Blatt 6

A: Präsenzaufgaben und Verständnisfragen

21. Bestimme die Grenzwerte von a) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ und b) $\frac{5}{n} \cos(\sqrt{n}) + \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{2n+3}$
Hinweis zu b): $\left(1 + \frac{3}{n}\right)^n \rightarrow e^3$

22. Sei $a_{n+1} := a_n^2 + d$. Gesucht sind $a_1, d \in \mathbb{R}$ mit
a) (a_n) ist konstant (mindestens zwei verschiedene Beispiele).
b) (a_n) ist nicht konstant, aber konvergent.
c) (a_n) ist nicht konvergent, aber beschränkt.
d) (a_n) ist nicht beschränkt.
e) Wie lauten a_1, a_3 und a_{10} im Fall $a_2 = \frac{1}{2}$ und $d = \frac{1}{4}$?

23. Untersuche folgende Reihen auf Konvergenz:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(-4)^{k+1}}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{20k+101}$$

24. Wahr oder falsch?

a) $(a_n) \rightarrow 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist konvergent.

b) $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2+n}} = \frac{1}{\sqrt{2+\frac{1}{n}}}$

c) Im Internet findet man unter www.math.uni-hamburg.de/home/werner/java/PDApplet.html Interessantes zur Folge $a_{n+1} = \alpha a_n(1 - a_n)$.

B: Übungsaufgaben

16. Überprüfen Sie auf Konvergenz und geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an! (Mit Beweis):

a) $a_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+4} - \sqrt{n})$ b) $b_n = n \cdot \left(1 - \sqrt{\left(1 + \frac{a}{n}\right)\left(1 + \frac{b}{n}\right)}\right)$ mit $a = 5, b = 9$

c) (Extrapunkt) Was gilt in b) für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$?

17. Es geht um die Folge $a_{n+1} := a_n^2 + d$ aus Aufgabe A 22.:

a) Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) $\forall a_1 \in \mathbb{R} \exists d \in \mathbb{R}$ mit (a_n) konstant.

(ii) $\forall d \in \mathbb{R} \exists a_1 \in \mathbb{R}$ mit (a_n) konstant.

b) Geben Sie für $d = -\frac{3}{4}$ ein $a_1 \in \mathbb{R}$ an, so dass die Folge (a_n) ab dem dritten Glied konstant ist (also $a_1, a_2 \neq a_3 = a_n \forall n \geq 3$, mit Herleitung).

18. Beweisen Sie für die Folge $a_{n+1} := 2a_n(1 - a_n)$ mit $a_1 := \frac{1}{2} + x, x \in \mathbb{R}$:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(1 - (2x)^{2^n}\right) \quad \text{für } n = 1, 2, 3, \dots$$

Abgabe der Übungsaufgaben am 1.12.10 nach der Vorlesung bzw. in den Übungen.