

# Übungen Modul Grundlagen der Analysis

WiSe 10/11

J. Mylosz und H.-J. Samaga

Blatt 5

**Hinweis:** Bitte bringen Sie (ausnahmsweise) einen Taschenrechner mit!

## A: Präsenzaufgaben und Verständnisfragen

17. In einem Mathematikkaufhaus erkundigt sich ein Kunde nach Folgen mit mehreren Häufungspunkten. Der Verkäufer antwortet: „Sorry, sind leider gerade ausverkauft! Wir haben aber spezielle beschränkte Folgen im Sonderangebot, vielleicht haben Sie Glück und die helfen Ihnen weiter!“ Auf Nachfrage des Kunden, warum die im Angebot sind, antwortet der Verkäufer „Die lassen sich schlecht verkaufen, weil sie nicht konvergent sind.“  
Was denkt der Kunde über die Kompetenz des Verkäufers? Wird er sich mehr oder weniger notgedrungen mit einer Folge aus dem Sonderangebot zufrieden geben oder wird er zum teureren Spezialgeschäft wechseln?
18. Eine Übung zum geometrischen und arithmetischen Mittel: Beginnend mit  $a_1 = 1$  und  $b_1 = 9$  berechne man für  $n = 1, 2, 3$   $a_{n+1} = \sqrt{a_n \cdot b_n}$  und  $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ . Was fällt auf?
19. Beweise oder widerlege: Bei einem Zinssatz von 20 % verdoppelt sich bei jährlicher Verzinsung jedes Kapital nach 4 Jahren.
20. Wahr oder falsch?
- a) Für Folgen  $(a_n)$  mit  $a_n \rightarrow a$  gilt für jede natürliche Zahl  $k$  auch  $a_n^k \rightarrow a^k$ .
- b) Für Folgen  $(a_n)$  mit  $a_n \rightarrow a$  gilt nicht immer  $a_n^n \rightarrow a^n$ .
- c) Für alle positiven reellen Zahlen  $a, b$  gilt  $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$ .
- d)  $\ln(e^2) = 2$ .
- e)  $\frac{2 + \left(2 + \frac{1}{n^3}\right)^3 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}}{2 + \frac{1}{\sqrt[n]{n}}} \rightarrow 1 + \frac{4}{e}$

**B** – Aufgaben auf der nächsten Seite!

## B: Übungsaufgaben Blatt 5

13. Eine Folge  $(a_n)$  sei definiert durch  $a_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$ .
- Gesucht sind  $a_n$  für  $n = 1, 2, 3, 4$ .
  - Beweisen oder widerlegen Sie:  $(a_n)$  ist
    - beschränkt
    - monoton
    - konvergent.
14. Analog zu Aufgabe A 18 seien Folgen  $(a_n)$  und  $(b_n)$  definiert durch  $a_{n+1} := \sqrt{a_n \cdot b_n}$  und  $b_{n+1} := \frac{a_n + b_n}{2}$  mit reellen Zahlen  $0 < a_1 < b_1$ . Beweisen oder widerlegen Sie:
- $(a_n)$  ist monoton
  - $(b_n)$  ist monoton.
  - $(a_n)$  ist beschränkt
  - $(b_n)$  ist beschränkt.
  - $(a_n)$  und  $(b_n)$  haben den gleichen Grenzwert.
15. a) Nach wieviel Jahren vervierfacht sich ein Kapital bei halbjährlicher Zinszahlung, falls 8% Zinsen gezahlt werden?
- b) Nach wieviel Jahren verfünffacht sich ein Kapital bei ständiger Zinszahlung, falls 6% Zinsen gezahlt werden?

Abgabe der Übungsaufgaben am 24.11.10 nach der Vorlesung bzw. in den Übungen.