Übungen Modul Grundlagen der Analysis

WiSe 10/11 J. Mylosz und H.-J. Samaga **Blatt 4**

A: Präsenzaufgaben und Verständnisfragen

13. Gesucht sind alle Häufungspunkte der Folge $(-1)^n + \frac{2n+3}{3n-1}$.

14. Bestimme den Grenzwert von a) $\frac{n^2+5}{n^3}$ b) $\frac{5-4n}{3n}$ c) $\frac{2^n+5}{3^n}$ d) $\frac{n^2}{n-1} - \frac{n^2}{n+1}$

15. Gesucht sind alle Hoch– und Tiefpunkte der Folge (a_n), definiert durch $a_n := \frac{3n-4}{n+1}$ für $n < 4$ und $a_n = 1$ für $n \geq 4$.

16. Wahr oder falsch?

a) Wenn eine Folge zwei der drei Eigenschaften *beschränkt*, *monoton*, *konvergent* besitzt, dann auch die dritte.

b) Es gibt Folgen mit genau zwei Hoch– und genau zwei Tiefpunkten.

c) Wenn eine Folge genau zwei Hoch– und genau zwei Tiefpunkten hat, ist sie beschränkt.

d) Für Folgen $(a_n), (b_n)$ gilt $\frac{a_n}{b_n} \to 0 \Rightarrow \frac{b_n}{a_n} \to \infty$.

e) Der Satz 4.4 über die Existenz von monotonen Teilfolgen kann mit Hilfe von Tiefpunkten bewiesen werden.

B: Übungsaufgaben

10. Sei $a_1 := 0$ und $a_{n+1} := \frac{1}{4}\,(1 + a_n)^2$.

a) Gibt es untere Schranken? (Mit Begründung)

b) Beweisen Sie durch vollständige Induktion: $a_n \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

c) Beweisen Sie, dass die Folge gegen 1 konvergiert.

11. Überprüfen Sie auf Konvergenz und geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an:

a) $a_n := \frac{5n}{7n^2-3} \cdot \frac{8n^3}{6n^2+5}$ b) $b_n := \frac{3n(n+2)}{n+3} - \frac{3n^3}{n^2+2}$

c) $c_n := \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n-1}{n^2}$, hier ist ferner c_{50} gesucht (kann man im Kopf ausrechnen!).

12. Beweisen oder widerlegen Sie: Jede beschränkte Folge mit höchstens einem Häufungspunkt ist konvergent. (Kleiner Tipp: Was folgt aus bekannten Sätzen, falls ein Häufungspunkt einer beschränkten Folge kein Grenzwert ist?)

Abgabe der Übungsaufgaben am 17.11.10 nach der Vorlesung bzw. in den Übungen.